Una propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento matemático

Pilar Valencia Saravia

A didactic proposal for the development of mathematical thinking

Resumen

Enseñar y aprender matemáticas en nuestro país parece un reto insuperable. Los resultados de la más reciente aplicación -2018- de las pruebas PISA lo confirman: más de la mitad de nuestros estudiantes no alcanza el *nivel de competencias básico*, mientras que el promedio con este nivel, en los países de la OCDE, es de 23%. En este trabajo se muestra una propuesta que aprovecha el uso de la geometría computacional como instrumento para promover el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras clave: pensamiento matemático, herramientas tecnológicas, mediatriz, segmento, geometría computacional, diagrama de Voronoi.

Abstract

Teaching and learning mathematics in our country seems like an insurmountable challenge. Results in the PISA 2018 evaluations confirm this statement: more than half of our students do not reach the basic proficiency level, while the OECD average in this area is 23%. This article presents a proposal based on computational geometry as a means to promote mathematical thinking.

Keywords: mathematical thinking, technological tools, perpendicular bisector, segment, computational geometry, Voronoi diagram.

Introducción

En nuestro país, enseñar matemáticas es uno de los mayores retos del sistema educativo nacional. Existe una aversión mayoritaria hacia esta disciplina. Para el común de los estudiantes, aprenderlas resulta frustrante y poco útil pues no ven en su entorno cotidiano una aplicación rápida de aquello que tanto trabajo les cuesta aprender. De acuerdo con de la Peña et al. (2002), la mayoría de las personas en México, piensa que las matemáticas:

- Son, casi exclusivamente, la aritmética.
- Son algo complejo y oscuro, de acceso solo para unos cuantos superdotados y están alejadas de su realidad inmediata

Como consecuencia, observamos que los resultados de las evaluaciones internacionales, aplicadas a nuestros estudiantes de bachillerato, son muy bajos. La prueba PISA establece seis niveles de competencia matemática, numerados del 1 (el más bajo) al 6 (el más alto). En la prueba más reciente, aplicada en 2018, un 44% de los estudiantes en México alcanzó nivel 2 o superior en matemáticas (o sea que el restante 56% logró solamente el nivel 1). En el nivel 2 se encuentran los estudiantes que "pueden interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación (simple) (por ejemplo, comparar la distancia total de dos rutas alternativas o convertir los precios en una moneda diferente)." (OCDE, 2018, p. 4). En los países de la OCDE, en promedio, el 76% de los estudiantes obtuvo al menos nivel de competencia 2 en matemáticas.

Mientras que en México, solamente el 1% logra llegar al nivel 5 o 6 -niveles en los que los estudiantes muestran poseer un *pensamiento matemático* avanzado- seis países y economías asiáticas tuvieron la mayor proporción de estudiantes que lo hicieron: "Beijing-Shanghai-Jiangsu-Zhejiang (China) (justo sobre el 44%), Singapur (casi 37%), Hong Kong (China) (29%), Macao (China) (casi 28%), China Taipéi (justo sobre 23%) y Corea (justo sobre 21%). Estos estudiantes pueden modelar situaciones complejas matemáticamente y pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias apropiadas de resolución de problemas para tratar con ellos" (OCDE, 2018, p. 4).

En América Latina el país con mejores resultados es Chile. La Tabla 1 muestra en términos de puntaje obtenido los datos de algunos países en la última aplicación (por género).

	México	Chile	Promedio OCDE	Japón
hombres	415	421	492	532
mujeres	403	414	487	522
promedio	409	417	489	527

Tabla 1. Comparación entre México, Chile y Japón

Nota. Elaboración propia con datos de OECD Data

Observamos las consecuencias de esta situación todos los días: jóvenes que evitan elegir carreras “difíciles”; es decir, aquellas que presentan varias asignaturas de contenido matemático; una planta laboral poco calificada, y una población mayoritariamente inerme, poco crítica, proclive a las creencias fantásticas y que, si bien trabaja mucho, prefiere pensar poco (De la Peña et al, 2002).

El entrenamiento matemático que el sistema educativo mexicano provee ha privilegiado la mecanización y memorización de procedimientos sobre el desarrollo de habilidades de pensamiento, análisis, reflexión y argumentación.

Las ventajas de la modalidad a distancia

¿Qué puede hacer el asesor a distancia para que sus estudiantes aprendan matemáticas? ¿Cómo promovemos el desarrollo de las habilidades de pensamiento? La respuesta no es sencilla ni única, requiere de inventiva y mucha proactividad por parte del maestro. Hay que echar mano de imaginación, tenacidad y paciencia, pero la modalidad a distancia tiene ventajas que no se encuentran en la presencial, al permitirnos:

- **Tener un espacio de trabajo privilegiado:** tenemos la oportunidad de crear este espacio de cercanía con cada estudiante. Ahí, ellos lograrán sentirse libres de participar, preguntar, experimentar, conjeturar y equivocarse sin la presión de hacerlo delante del grupo. Como afirma Vadillo (2016), la modalidad en línea tiene la oportunidad de generar sentido de cercanía y pertenencia entre el grupo de estudiantes y su docente.

- **Enseñar a través de medios tecnológicos:** esto es muy conveniente, pues nos permite aprovechar el uso de aplicaciones, sitios, simuladores y, en general, un enorme acervo de recursos abiertos disponibles en la red.

Quisiéramos enseñar a nuestros estudiantes a desarrollar su *pensamiento matemático*, no tanto su habilidad con las operaciones aritméticas. Las mecanizaciones y algoritmos en general, si bien son útiles, dejan de serlo cuando se vuelven el único fin. Buscamos propiciar la observación y la reflexión, llevarlos a percibir e interpretar el entorno de otra manera, que puedan explicar, que argumenten, que debatan y defiendan sus hallazgos y soluciones, porque entonces aprender matemáticas les será útil para la vida, no solamente para acreditar un curso. Cantoral et al. (2005) afirman que el pensamiento matemático no es de uso exclusivo de los matemáticos, pues se trata de la construcción de ideas matemáticas incluyendo las que provienen de la vida cotidiana. En este sentido, el pensamiento matemático tiene muchos niveles y profundidades.

Y si bien es cierto que hay que usar un *lenguaje*, la notación matemática, que permita entenderlas y expresarlas con el rigor y precisión, a eso no se reducen las matemáticas. Así lo expresa Keith Devlin (2012, p. 14) cuando afirma que: “mathematical notation no more is mathematics than musical notation is music” (la notación matemática no es más matemática de lo que la notación musical es música). Más importante que aprender a usar este lenguaje, será aprender sin memorizar, buscando patrones; al convertir lo estudiado en una aventura exploratoria, dinámica, inacabada. Las matemáticas se refieren más a encontrar orden, simetría, mensajes ocultos y no simplemente a manejar números y fórmulas.

En México los programas de estudio han privilegiado, en la enseñanza matemática, el aprendizaje y dominio de procedimientos dando la impresión de que aprender matemáticas es más parecido a aprender “recetas”, en lugar de aprender a pensar.

Carnelli et al., (2000) sostienen que para lograr aprendizaje significativo es necesario propiciar las condiciones para que los estudiantes relacionen sus experiencias previas con lo que están aprendiendo actualmente: antes de esperar que ellos encuentren la solución a un problema mediante procedimientos estandarizados, habremos de invitarles a usar sus propias formas de proceder, provocar su interés por intentar. Y es que la realización de actividad matemática conlleva, para todos quienes participan en ella, la construcción de un trabajo creativo:

- Quien está aprendiendo parte de lo que conoce y trata de adecuarlo para aplicarlo a la nueva situación. Si bien no crea nuevo conocimiento para la humanidad, lo crea para sí mismo.

- Quien enseña reformula lo que sabe en función de los estudiantes y el contexto en que lo enseña.

De esta forma, el docente tiene varios retos por delante: hacerse de un catálogo amplio de estrategias y herramientas que provoquen en los estudiantes la curiosidad y el interés por aprender, al tiempo que promueven el uso de las habilidades de pensamiento que deseamos desarrollar. K. Devlin describe este proceso en general como *aprender a pensar fuera de la caja* (Devlin, 2012) y hace una larga lista de recomendaciones. De ellas, podríamos presentar las siguientes a nuestros estudiantes, a manera de consejos:

1. Cuando se enfrenten a un problema, en lugar de buscar una fórmula o procedimiento que seguir, leer y releer el problema y preguntarse: ¿cómo lo resolvería yo?

2. Trabajar en equipos. Interactuar con otros siempre es enriquecedor. El intercambio de ideas es la base del trabajo científico, hay que promoverlo entre nuestros estudiantes. Buscar espacios de discusión -foros, wikis o grupos en redes- en donde se presenten todas las ideas siempre es algo muy útil para encontrar soluciones.

3. Motivarlos para que no se apresuren ni desesperen pero que sí sigan avanzando con constancia. Si no presentan avance, indaguemos junto con ellos hasta encontrar alternativas factibles.

4. Practicar con muchos ejercicios. La repetición conduce a la mecanización. Si un procedimiento particular ha sido dominado, la atención del estudiante se podrá dirigir hacia fines de mayor interés.

El último punto requiere de explicación adicional: no se sugiere aquí que los estudiantes solamente deban ejercitar para mecanizar y que con esto puedan desarrollar habilidades de pensamiento matemático. Una cosa no implica la otra, es de lo que se habla en la introducción. Si es necesario mecanizar algún procedimiento o algoritmo, hágase, pero no como finalidad última, sino como un paso intermedio para proceder a la obtención de un aprendizaje más elaborado, que tendrá que ver quizá con la aplicación del procedimiento o, más ambiciosamente, con la identificación de un patrón que pueda generalizarse y llevar a otros contenidos de mayor dificultad. Es así como se irá construyendo el aprendizaje matemático. Si bien el lenguaje simbólico es esencial para comunicar con precisión los hallazgos y logros obtenidos, habrá de enseñarse sin privilegiarlo, consideremos que para los estudiantes resulta mucho más satisfactorio descubrir que *comprenden* algo que aprender a escribirlo bien.

Hacia la propuesta: un acercamiento a la geometría computacional

La geometría, con su fuerte contenido visual, es fuente de recursos para enseñar matemáticas y fomentar el pensamiento matemático. El rigor con el que Euclides construyera este edificio de conocimiento en *Los elementos* impulsó el desarrollo acelerado del conocimiento matemático durante varios siglos. En la actualidad, la enseñanza de la geometría en las escuelas de educación básica y media se reduce, casi exclusivamente, al cálculo de áreas y perímetros de figuras geométricas.

Durante la segunda mitad del siglo pasado y gracias al poderoso desarrollo que tuvieron las matemáticas discretas, surgió la *geometría computacional*, cuyo origen se asocia con la publicación de la tesis doctoral que, con este nombre, escribiera Michael Ian Shamos (1978). Esta área conjunta geometría, combinatoria y análisis de algoritmos, en una amalgama tan poderosa como amena, inquietante y engañosa, pues la mayoría de sus resultados se explican en un lenguaje coloquial entendible para todo el mundo, aunque pueden ser increíblemente difíciles de resolver. En sus inicios se concentraba en la resolución de problemas de búsqueda y clasificación. Al encontrar una solución a un problema se procede a la elaboración de un algoritmo que pueda ser implementado en una computadora.

Un objeto geométrico fundamental en geometría computacional es el *diagrama de Voronoi* que tiene una gran variedad de aplicaciones. Se construye a partir de una colección de puntos en el plano, construyendo las *regiones de influencia de cada punto* -las celdas de Voronoi-, formadas por todos los puntos más cercanos al punto dado. Estas celdas dividen al plano en regiones ajenas. Una manera sencilla de entenderlos es con la explicación de Clara Grima (2017) que nos pide que pensemos en las farmacias de cierta ciudad. El plano sería el mapa de la ciudad y pondremos un punto por cada una de las farmacias existentes. Si solamente hay una farmacia en toda la ciudad, su región de influencia será toda la ciudad, pues cada habitante no tiene otro remedio que acudir a ella. Si hay dos farmacias, *A* y *B,* entonces la ciudad se divide en dos regiones: la zona en la que habitan quienes les queda más cerca la farmacia *A* y aquella en la que viven los que están más cerca de la farmacia *B* (la distancia a la farmacia se mide en línea recta, considerando la longitud del segmento entre la farmacia y la casa de alguien).

Cada región es una celda de Voronoi, la celda de *A* y la celda de *B.* Entonces, los que están a la misma distancia de las dos farmacias son quienes viven sobre la *mediatriz* del segmento entre *A* y *B.* La Figura 1 muestra las celdas de Voronoi asociadas a cada farmacia y determinadas por la mediatriz del segmento *AB*.

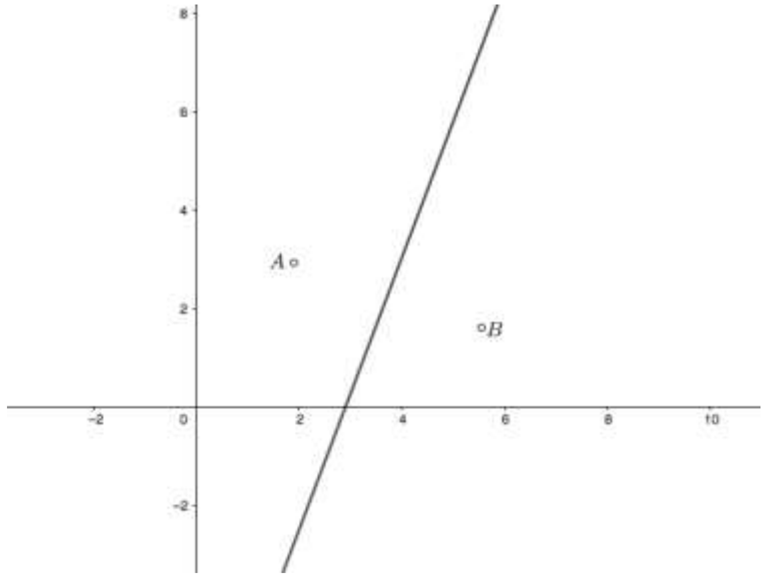

Figura 1. Celdas de Voronoi con dos puntos

¿Qué pasaría si hubiera tres farmacias, *A,B* y *C*? nuevamente, con un razonamiento similar y usando las mediatrices de los segmentos formados por los tres puntos (los segmentos: *AB*, *AC* y *BC*), se construye el nuevo diagrama con las regiones de influencia de cada farmacia. Las regiones de influencia de cada farmacia quedarían definidas como se ve en la Figura 2.

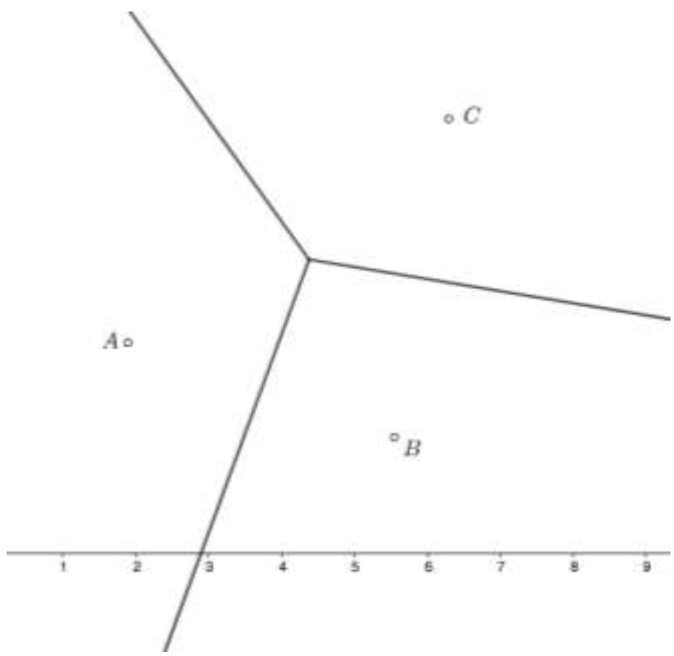

Figura 2. Celdas de Voronoi con tres puntos.

Siguiendo este proceso, se construye el diagrama de Voronoi para más puntos.

La actividad propuesta

Uno de los contenidos temáticos de geometría plana de nivel medio superior es el estudio del triángulo y sus rectas y puntos asociados. Al trabajar este tema, los estudiantes aprenden el concepto de mediatriz de un segmento. Lo que aquí proponemos es que, mediante la definición de regiones de influencia, se invite al estudiante a construir el diagrama de Voronoi de una colección de puntos dada (suponiendo que estos puntos son ciertos servicios a instalar: farmacias, escuelas, mercados, torres de transmisión, etc.) Para esto, deberán usar las mediatrices de los segmentos entre cada par de puntos.

Aprovechamos para que los estudiantes usen sus conocimientos previos de geometría (punto, segmento, recta) y aprendan a usar el programa Geogebra. Proponemos iniciar con las siguientes actividades:

1. Colocar puntos en el plano.
2. Construir segmentos entre ellos.
3. Construir puntos equidistantes a dos puntos dados.
4. Averiguar la definición de mediatriz.
5. Crear un algoritmo para obtener la mediatriz de un segmento.

La parte central de la actividad es la construcción del algoritmo, pues la creación de algoritmos motiva fuertemente el pensamiento matemático al propiciar análisis, observación y reflexión. Por supuesto, no hay que dejar de lado el trabajo colaborativo, ya que la interacción con sus pares promueve la creación de ideas. Este ejercicio da para muchas actividades relacionadas, por ejemplo, en una colección con varios puntos, obtener todos los segmentos posibles (o todos los triángulos o todos los cuadriláteros), contarlos y buscar patrones en varias colecciones para enunciar una regla.

El diagrama de Voronoi se usa muy frecuentemente en la visualización de imágenes, asignación de recursos, en telefonía celular o para determinar regiones de contacto en una epidemia. Es una herramienta para modelar casi todas las situaciones que tengan que ver con proximidad.

Conclusiones

En la modalidad a distancia cada estudiante está en primera fila, pues, "en las aulas presenciales, es frecuente que la atención del maestro se centre en quienes más colaboran o demuestran interés, dejando de lado a los que tienen un desempeño o involucramiento menor"; no obstante, "la atención constante del equipo docente de los programas en línea promueve un clima de confianza y seguridad en el estudiante" (Vadillo & Cervantes, 2017, p. 2).

En mi experiencia, usar contenidos de geometría computacional -y en general de matemáticas discretas- constituye una herramienta conveniente para promover el desarrollo del pensamiento matemático. Aprovechar las ventajas de la educación en línea lo vuelve factible, de fácil implementación y estimulante.

Referencias

Cantoral R., Farfán R. M., Cordero F., Alanís J. A., Rodríguez R. A. & Garza A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas.

Carnelli G., Falsetti M., Formica A. & Rodríguez M. (2000). *Matemática para el Aprestamiento Universitario.* Colección textos básicos, Universidad Nacional de General Sarmiento.

Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking.*

Grima C. (2017). *ABC Ciencia*. https://bit.ly/2Oam0uY

OCDE (2018). *Nota país. PISA 2018 -- Resultados.* https://bit.ly/3uFuHxU

Peña J. A. de la. (comp.), Alatorre S., de Beongoechea N., Barot M., Bravo A., Díaz-Barriga A., Fernández-Villanueva M., Meda A. & Mendiola E. (2002). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. UNAM, Instituto de Matemáticas, Siglo XXI.

Shamos, M.I. (1978). *Computational Geometry* [Tesis doctoral]. Yale University. https://bit.ly/3kwKDOs

Vadillo, G. & Cervantes, F. (2017). *Y tú... ¿qué piensas del aprendizaje en línea? Revista Digital Universitaria* [RDU], *18*(8), noviembre-diciembre. DOI: https://bit.ly/37TOkZi

Vadillo, G. (2016). Masivos e íntimos: la presencia social en los MOOC. *Revista Digital Universitaria* [RDU], *17*(1), enero. https://bit.ly/3aZYR7p

Dra. Pilar Valencia Saravia

Universidad Nacional Autónoma de México

pilar_valencia@cuaieed.unam.mx

ORCID: 0000-0003-0634-9310