

Inteligencia artificial y la demostración analógica: Estrategia, soluciones y trascendencia educativa.

(Artificial intelligence and analogical demonstration: strategies, solutions and educational importance)

José Negrete M.

Universidad Nacional Autónoma de México

RESUMEN

La presente comunicación inicialmente describe las estrategias de solución que pueden observarse en dos juegos (el de Rompecabezas y el del Tangrama) y en el Razonamiento Analógico de la Psicología. Estas descripciones permiten concluir que se trata de verdaderas demostraciones que denominamos, por su carácter, Demostraciones Analógicas. Tales demostraciones guardan un gran paralelismo con la demostración lógica: Parten de ciertos "dados" y terminan en construcciones análogas a imágenes que son el objetivo de la demostración. En ellas se pueden identificar reglas análogas a las definiciones, principios y teoremas que se emplean en la demostración lógica y trayectorias de demostración equivalentes a los razonamientos hacia adelante y hacia atrás como los que ocurren en la demostración lógica. Hacemos ver que ciertas dificultades para una demostración analógica pura se resuelven recurriendo a replanteamientos de tipo lógico. Describimos las heurísticas que se han empleado en Inteligencia Artificial en tales juegos y razonamientos, y proponemos que las heurísticas involucradas, que hasta ahora han ocurrido en el ámbito totalmente simbólico, se verían grandemente beneficiadas por la participación de etapas no simbólicas, implementadas con redes neurales. Proponemos que la demostración analógica puede ser un instrumento educativo valioso como una introducción a la demostración lógica en la enseñanza de matemáticas elementales y de nivel medio.

Palabras clave: inteligencia artificial, demostración analítica, demostración lógica, psicología, razonamiento.

Abstract

The present communication describes the solution strategies that can be drawn from two puzzles (the jigsaw puzzle and the tangram puzzle) and the analogue reasoning from Psychology. We conclude that in all the three cases the mental activity involved is an Analogical Demonstration: starts with a certain "givens" and ends up with an analogical construction very similar to the demonstration in logic. The analogical demonstration uses (as is the case in lo-

gic) rules in the form of definitions, principles and theorems, analogical in this case, that can lead the demonstration to valid "trajectories", equivalent to forward or backward reasoning.

We show in our work that occasionally the demonstrator makes use of pure logical reasoning in order to find its way in the analogical demonstration.

Additionally in this communication we describe the heuristics that have been used in Artificial Intelligence for this kind of problems.

The AI solutions are for the moment confined to the symbolic paradigm with its limitations. We propose that the use of parallelism in the form of neural nets will solve some of the present limitations.

Finally we propose also that the analogical demonstration can be a very valuable instrument as a pre-training for demonstration in mathematics at elementary and intermediate level.

Key words: Artificial intelligence, logical demonstration, psychology.

EL CONCEPTO DE ANALOGIA

La analogía siempre plantea una comparación entre objetos. Estos objetos no necesariamente son objetos físicos, puede tratarse de objetos sonoros como los de la música; sensoriales como los de la gastronomía o instrumentales como los de la computación analógica. Un caso para discusión especial es el planteamiento de analogía como concepto relativo a objetos [Rada, 1989].

La analogía entre dos objetos está referida siempre a una regla de mapeo implícita o explícita [Hall, 1989].

A y B son análogas entre sí, si A puede ser mapeada en B bajo una regla R de mapeo $A \rightarrow B$.

La anterior formalización de la analogía puede ejemplificarse si recurrimos a la representación simbólica de figuras mediante estructuras llamadas Marcos (frames) [Minsky, 1975, Winsto, 1980]. Las imágenes de la figura 1, clásicas del razonamiento analógico de la psicología se han representado con la figura 2 en dichos marcos. El inserto de la figura 1 pretende una representación pictórica de la regla R de mapeo $A \rightarrow B$ y el inserto de la figura 2 es su versión simbólica. En estas representaciones se especifica con variables los valores de atributos que pueden ser cambiados arbitrariamente. Referidas a la regla R de mapeo las figuras A y B son analógicas entre sí y también lo son las figuras C y "1".

EL JUEGO DEL ROMPECABEZAS

El juego de rompecabezas se fabrica con un cartón, sobre el que se ha pegado una imagen, recortándolo en piezas de distinta forma, las piezas se entregan separadas para ser construidas por el solucionador, restituyendo

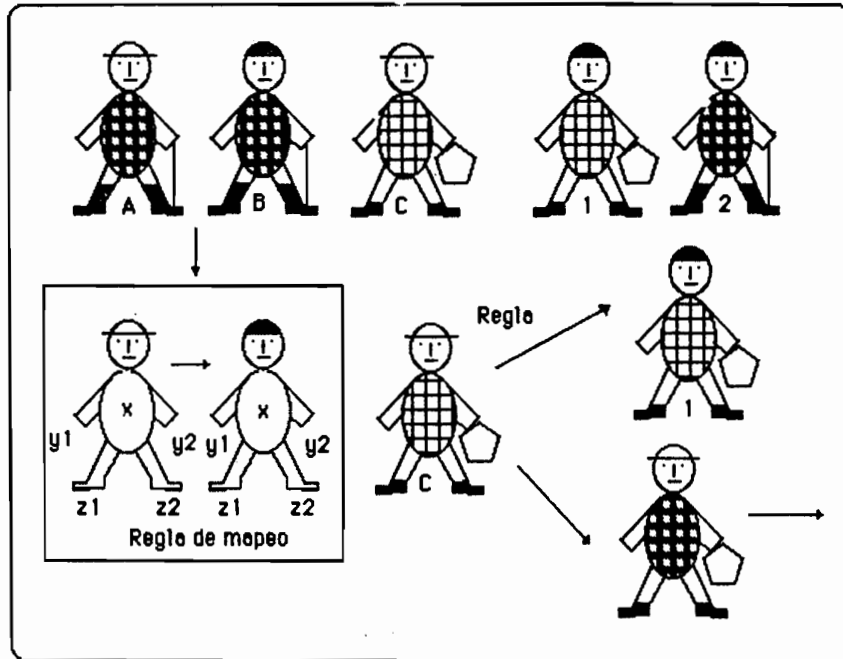


Figura 1

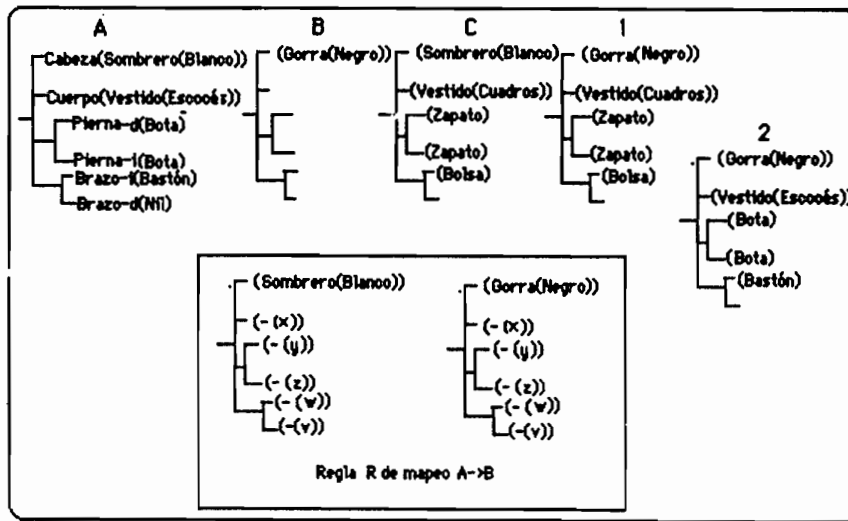


Figura 2

con ello la imagen superpuesta. Al solucionador se le ofrece una versión reducida y en general ligeramente diferente de la imagen superpuesta como referencia para la ejecución del juego.

PROCESO DE SOLUCION DE ROMPECABEZAS

La figura x muestra dos procesos seguidos para la solución de un rompecabezas formado por siete piezas. La imagen a construir es un cuadrado análogo a la imagen que se presenta en la parte inferior de la figura. El solucionador, en un proceso, toma una pieza cualquiera () y pega a ella alguna otra () de tal manera que así se complete una imagen análoga a parte del cuadrado (construcción hacia adelante), objeto del juego y repite el mismo proceso hasta terminar el juego. En otro proceso diferente el jugador se plantea un objetivo inicial, el formar el ángulo inferior derecho del cuadrado y dada esta estrategia pega las dos piezas correspondientes (construcción hacia atrás), se fija otro objetivo de la misma naturaleza y lo construye, y finalmente resuelve pegando los conjuntos construidos según los objetivos por él planteados. En rompecabezas de muchas piezas es frecuente que se alternen ambos tipos de construcciones.

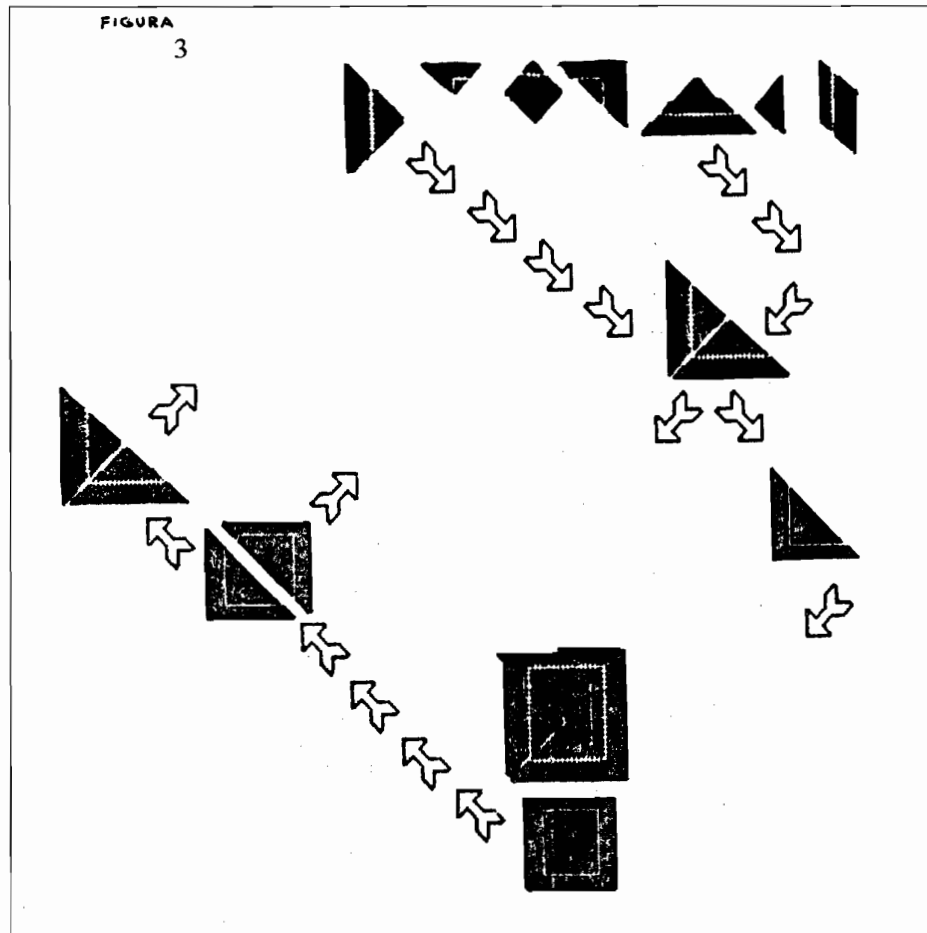
El paralelismo entre la demostración lógica y este tipo de construcciones se establece considerando que las piezas del rompecabezas son los "dados" de la demostración lógica y la imagen de diferencia, el objetivo de la demostración. La solución no es sin embargo la imagen objetiva sino una análoga generada por la construcción. Hay en la construcción por lo menos dos reglas implícitas que juegan el mismo papel que los teoremas, definiciones y principios de la demostración lógica.

R1: Toda pieza que se coloque junto a otra debe generar junto con las otras ya pegadas, un análogo de parte o toda la figura de referencia.

R2: Los objetivos planteados subdividen al rompecabezas en subrompecabezas (subproblemas de la demostración lógica).

Este paralelismo entre el proceso de solución de este juego y el de la demostración lógica nos inclina a considerar que se trata de un proceso formal idéntico y con ello la postulación de que se trata de un proceso de demostración analógico ya que los juicios de correcto o incorrecto en la marcha de la demostración sólo son por analogía con la imagen de referencia y no de igualdad o de desigualdad, por ejemplo de la demostración lógica. Las estrategias de construcción hacia adelante son idénticas con las de razonamiento hacia adelante de la demostración lógica y las de construcción hacia atrás idénticas a las de razonamiento hacia atrás. La naturaleza de las reglas implícitas mencionadas hace que las trayectorias posibles

de solución sean muchas, especialmente cuando se combinan las estrategias, situación que en general es diferente en las demostraciones lógicas. Esto explica en parte la mayor dificultad resolutoria de estas últimas. En el rompecabezas a diferencia del Tangrama que veremos a continuación, y desde luego de la demostración lógica, toda trayectoria es resolutoria lo que la califica de demostración trivial. El juego del rompecabezas se constituye en juego interesante, sólo cuando el número de piezas es suficientemente grande para que las analogías que se presenten en su construcción resulten ambiguas para su elección (y difíciles de encontrar).



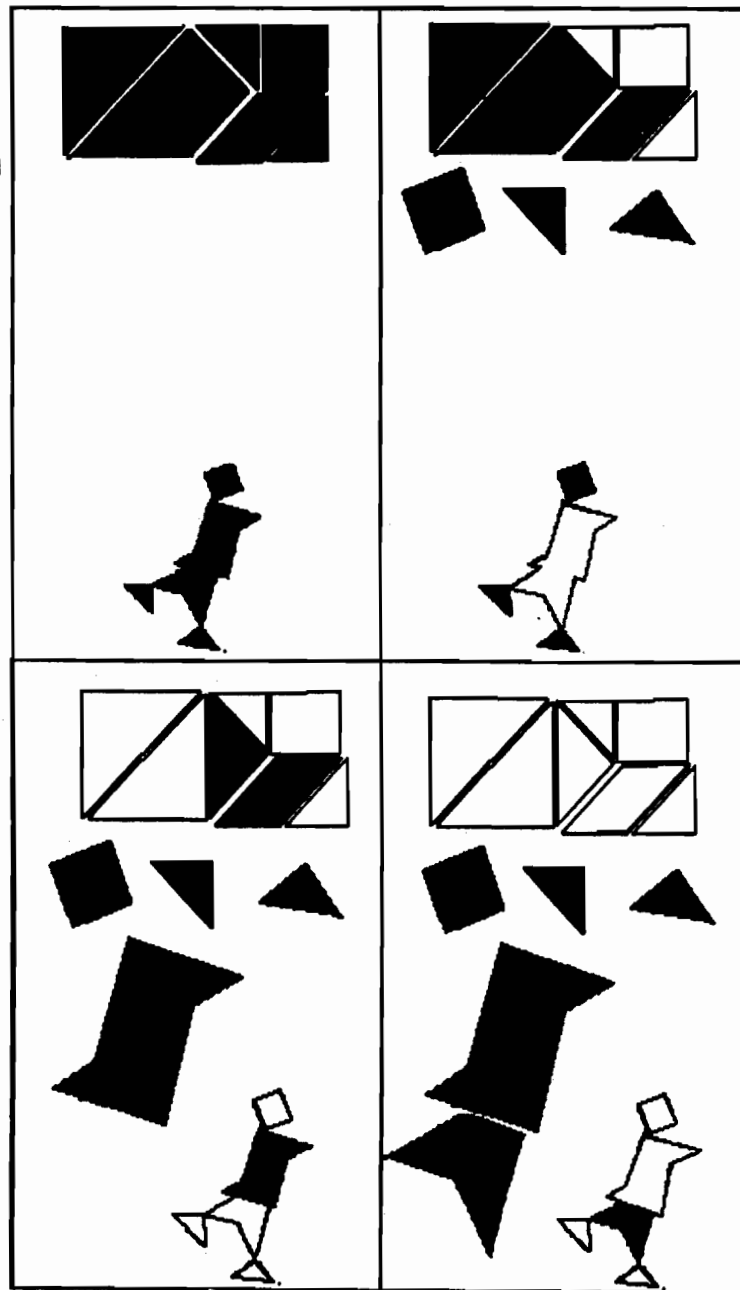


Figura 4

EL JUEGO DEL TANGRAMA

El tangrama es un juego que ofrece una mejor oportunidad que el rompecabezas para observar la búsqueda de soluciones pictóricas por construcción con miras a establecer una comparación entre esta búsqueda y la que se realiza en una marcha de demostración lógica.

El juego consiste en construir una figura análoga a la de una imagen de referencias uniendo sobre un plano siete piezas de madera o cartón (TANES): cinco triángulos rectángulos (dos grandes, uno mediano, dos pequeños, un cuadrado y un trapecio).

PROCESO DE SOLUCION DE TANGRAMAS CONCAVOS

Un tangrama cóncavo como el de la figura x, que presenta en general muchos ángulos, es un problema que se puede resolver como una demostración analógica relativamente simple. Como el caso del rompecabezas, los "dados" son las siete piezas mencionadas de la parte superior de la figura y la imagen a demostrar se representa en la figura interior de la misma. El proceso de demostración que se siguió en este ejemplo combinar las estrategias hacia adelante y hacia atrás como sigue: El proceso de solución se inicia como un razonamiento hacia atrás, reconociendo como TANES, la cabeza y los pies de la imagen de referencia, dejando con ello como problema a resolver el cuerpo extremidades.

Este último subproblema se subdivide en dos: extremidades superiores con el cuerpo y las piernas. Se reconoce "Gestálticamente" el primer subproblema como resuelto por los dos triángulos mayores y el segundo se resuelve ensayando distintas posiciones de las dos piezas restantes (trapecio y triángulo mediano). La solución final se encuentra pegando los subtangramas construidos. La única parte de construcción hacia adelante que se practica es la correspondencia a la solución del subtangrama de las piernas. Las posibles reglas utilizadas en la demostración descrita, son reglas locales que cada pieza establece, que para el caso del triángulo rectángulo están representadas en la figura x.

En esta figura postulamos que las naciones analógicas que generamos son las de "pico" (ángulo recto), claramente distinguibles entre sí. Las reglas se leerían como sigue:

Si un triángulo recto se agrega a como en la figura xA se agrega un poco a la analogía construida; si se construye como en xB se agregan dos picos y si se construye como en xC entonces se agrega un pico y un recto.

El pegamiento del triángulo por un vértice agrega el triángulo. Esta regla se puede postular también como regla general para cualquier TAN.

PROCESO DE SOLUCION DE TANGRAMAS CONVEXOS

El caso de la solución de Tangramas convexos como lo es el cuadrado, no se hace frecuentemente como una demostración analógica pura:

La figura x representa un proceso de solución en el que aparecen consideraciones lógicas que orientan la demostración analógica: la demostración exhibe inicialmente una construcción hacia atrás con la solución del subproblema "trapezio comprendido entre los triángulos mayores colocados paralelos a su hipotenusa" (). Construcciones infructuosas, hacia adelante de este subproblema hacen abandonar esta trayectoria de solución . Un intento de la misma naturaleza también fallido se representa en la Figura xC. A continuación se recurre a orientar la búsqueda y del doble a los lados mayores del arreglo original de los TANES.

Esto permite asignar a la hipotenusa de los triángulos grandes de valor de $2\sqrt{2}$ y de $\sqrt{2}$ a los lados menores del triángulo medio, a las hipotenusas de los triángulos pequeños y a los lados grandes del trapezio. El área del cuadrado que debe formarse debe ser $(2+1+1)*(1+1)=8$ por lo que se concluye que el cuadrado en cuestión debe tener por lado $2\sqrt{2}$ con esta guía se retoma a la demostración analógica, colocando a los dos triángulos grandes opuestos por el vértice, esperando resolver los dos subproblemas que esta constitución plantea. Después de varios intentos infructuosos de construcción hacia adelante se abandona la trayectoria, al notar que los triángulos mayores, opuestos por el vértice, generarían un rectángulo y no un cuadrado. A continuación se adosan los dos triángulos mayores formando un triángulo cuyos catetos son $2\sqrt{2}$ con lo cual se genera el subtangrama simétrico a resolver con el resto de los TANES (G).

Después de algunos ensayos de construcción hacia adelante se llega a la construcción H donde se visualiza gestálticamente que los TANES restantes son precisamente los sugeridos por la construcción. Se comprueba por analogía la solución colocando las piezas restantes lo que termina la demostración. Este tipo de demostraciones combinadas aparecen frecuentemente en la solución de los tangramas convexos porque no dan opción el uso de los teoremas que postulamos en la demostración anterior.

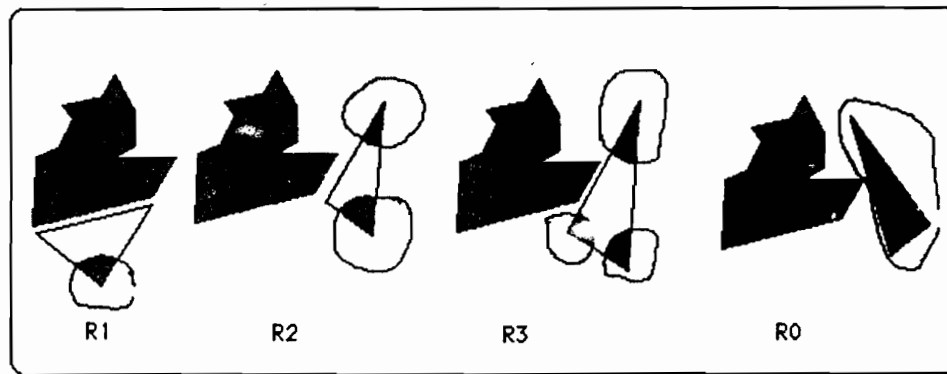


Figura 5

EL REACTIVO PARA RAZONAMIENTO ANALÓGICO DE LA PSICOLOGÍA

Los reactivos para evaluación de razonamiento analógico de la psicología, consisten en la presentación de tres imágenes A B y C como de la Figura y un menú de varias otras como 1 y 2 de la misma figura. El resolutor es invitado a designar cuál de las figuras del menú es análoga a C de la misma manera que A es análoga a B.

PROCESOS DE RAZONAMIENTO ANALÓGICO DE LA PSICOLOGÍA

Este tipo de razonamiento también puede verse como un problema de demostración si se considera que el proceso de inferencia $A \rightarrow B$ que se supone que en este razonamiento ocurre [Sternb, 1977] se puede tomar como el problema de encontrar la regla de mapeo $A \rightarrow B$ para ser usada en la demostración $C \rightarrow X$ dado C, cuál figura del menú es igual a X donde X es el resultado de la aplicación de la regla sobre C (Fig. 1). La regla de mapeo puede ser considerada un concepto en el sentido de Michalsky (Michal, 1980).

SOLUCIONES DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

La demostración analógica ha sido programada para ser ejecutada por computadoras en distintas situaciones de juego como es el caso del Razonamiento Analógico de la Psicología [Evans, 1968] de los Rompecabezas

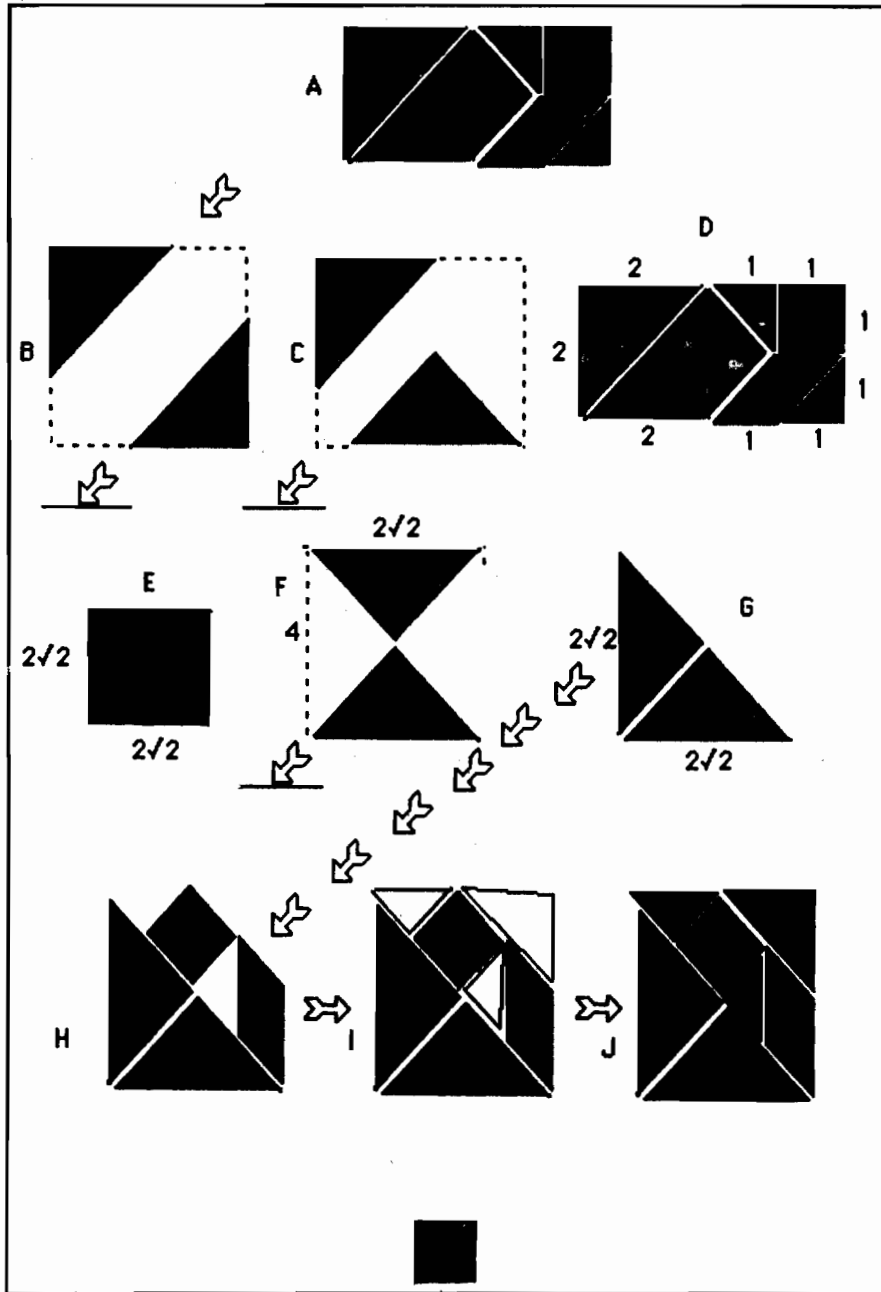


Figura 6

[FreGar, 1964] y del Tangrama [DeuHay, 1972]. (Una sistematización de Razonamiento Analógico por Computadoras ha sido hecho por Hall). En ninguno de los casos se postula que la mecánica de solución es la de demostración como aquí se propone.

Soluciones computacionales de los juegos mencionados se pueden encontrar, en principio, por búsqueda en un espacio de soluciones. Por razones obvias este espacio de soluciones está representado por figuras geométricas y no por imágenes análogas como es en la práctica. Esta decisión simplificadora, condiciona toda la representación del conocimiento, ya que las soluciones parciales y la final deben estar representadas dentro de la métrica que exigen las imágenes geométricas de preferencia.

Las soluciones se pueden buscar por la "fuerza bruta", empleando una búsqueda combinatoria, que desde luego es prohibitiva por la cantidad de computación comprometida, aunque la participación de ciertos criterios de "poda" en este tipo de búsquedas promete ser un camino de solución en esta línea de ataque [YanNor, 1990]. Este tipo de búsqueda es en nuestros términos una marcha de demostración hacia adelante sin auxilio de teoremas.

Otra opción de estrategia computacional es la que en nuestros términos, correspondería a la marcha de demostración hacia atrás por generación de subproblemas por partición tentativa de los análogos de referencia. Tal es una de las heurísticas usadas por Deutsch y Hayes en la solución automática de Tangramas [DeuHay, 1972].

LA OPORTUNIDAD DE DEMOSTRACION ANALOGICA QUE OFRECEN LAS REDES NEURALES

Como se mencionó en párrafos anteriores el problema computacional comienza a resolverse con figuras de referencia que tienen una métrica o que están predefinidas simbólicamente, lo que condiciona toda la programación. Una avenida diferente es comenzar con figuras de referencia que son patrones pictóricos para ser comparados con construcciones producidas por la computadora. La capacidad que las redes neurodales muestran para este tipo de reconocimiento de patrones es un buen punto de partida para iniciar una programación más realista [RumMcC, 1986]. Quizá las construcciones deben producir una versión en pixels para ser examinada por una red entrenada a distinguir el análogo de referencia. Estas construcciones pueden ser programadas simbólicamente como hasta ahora, lo que provee la oportunidad de cambiar a recursos lógicos cuando se requiera. Se antoja también la programación de una red que produzca particiones de

los patrones de referencia para con ello aspirar a soluciones heurísticas y quizá a soluciones gestálticas.

TRASCENDENCIA EDUCATIVA

La práctica de la demostración en la enseñanza de las matemáticas elementales y de nivel medio se ha reducido a la memorización de ciertas demostraciones famosas como la del teorema de Pitágoras, debido a el homenaje implícito que se da a estas demostraciones en el sentido de no esperar que tales demostraciones puedan ser inventadas por un estudiante. El resultado es que la pedagogía de las matemáticas se ha reducido al entrenamiento en la aplicación inmediateista de teoremas en ejercicios de final de capítulo. Este homenaje, no es inocuo, produce a la postre una Demostrofobia en el estudiante y en el maestro (una variedad de Matofobia [Negrete, 1981]).

Es posible que la enseñanza de la práctica de la demostración no tenga un inicio adecuado. Proponemos que la adquisición de habilidades de demostración analógica, es el inicio adecuado. Esta iniciación a la demostración requiere primero del diseño de una técnica para su enseñanza y después de una práctica efectiva de tal técnica, en estudiantes, con anterioridad a su enfrentamiento con la demostración lógica. Un reactivo adecuado para tal propósito es el juego del Tangrama.

CONCLUSIONES

El conjunto de descripciones que hicimos de los procesos de solución de Rompecabezas, de Tangramas y de reactivos para Razonamiento analógico de la Psicología, y una revisión de programas de Inteligencia Artificial que dan también solución a los juegos y reactivos mencionados, nos permite concluir que:

- a) Existe una Demostración Analógica.
 - b) Una forma de esta demostración es la construcción de un patrón a partir de elementos indivisibles dados.
 - c) Toda construcción parcial o final de este tipo es solamente análoga a todo o parte del patrón en cuestión.
 - d) Es posible definir análogo dentro de una representación simbólica en términos de una regla de mapeo.
 - e) Los objetos para la demostración analógica son los datos "dados" de la demostración lógica.
-

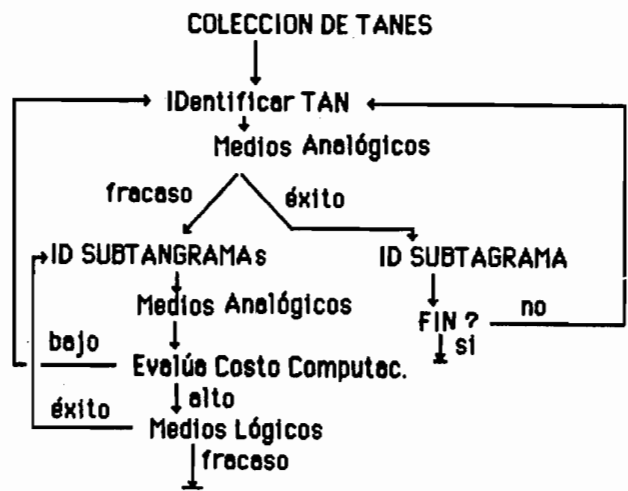
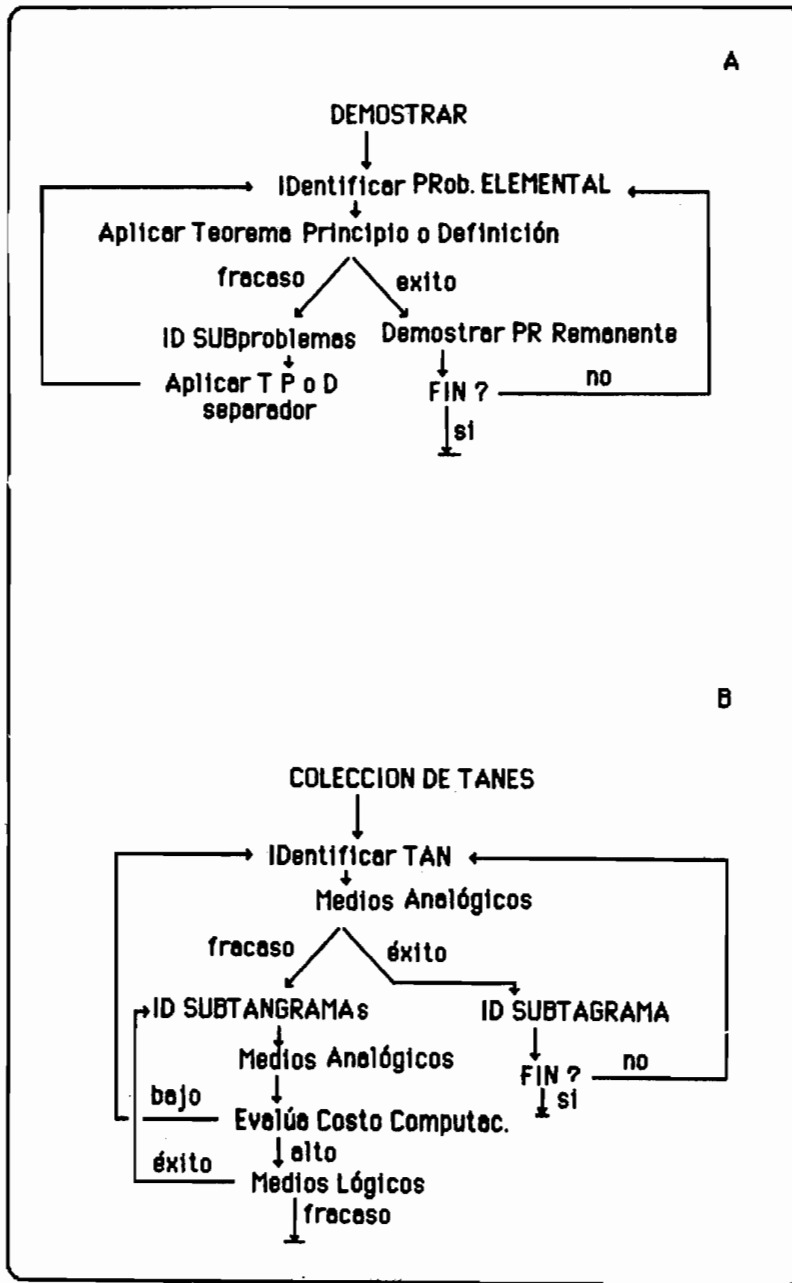


Figure 7

- f) Lo que se pretende demostrar es el patrón propuesto.
 - g) Existe un conjunto de reglas de construcción o teoremas, implícitos o explícitos que pueden conducir a la construcción final o demostración.
 - h) La marcha de la demostración analógica puede proceder hacia adelante por simple ensayo constructivo o hacia atrás a partir de la generación y posterior demostración de patrones intermedios.
 - f) La marcha de la demostración puede ser en un sentido o en otro, pero frecuentemente es mixto.
 - j) La demostración analógica frecuentemente se acompaña de marchas lógicas de demostración.
 - k) Frecuentemente aparecen soluciones gestálticas en los juegos de Rompecabezas y Tangrama.
 - l) El razonamiento analógico de la psicología puede verse como un caso de demostración analógica.
 - m) Algunos programas de computación que hacen algunas demostraciones de tipo k o l son del tipo de manipulación simbólica.
 - n) Algunos programas entre los anteriores ejecutan marchas hacia atrás llamadas heurísticas.
 - ñ) Para tales demostraciones la representación de los patrones es simbólica o simbólico-métrica lo cual transforma el problema en un proceso de construcción contra una construcción de referencia. Desaparece el componente analógico.
 - o) Un paradigma de medios-fines con un procedimiento subdivisor de problemas, asociados a un medidor de esfuerzo computacional que desencadene una reubicación lógica de los problemas analógicos se sugiere como una contribución a las soluciones que ofrece la IA en el planteamiento simbólico.
 - p) La recuperación de la construcción en un ámbito analógico como ocurre en condiciones naturales se puede lograr mediante una red neural que maneje las entradas del sistema desde un "pizarrón", dejando a cargo de una programación simbólica tanto la estrategia de demostración como la representación de resultados parciales o finales de la construcción en otro pizarrón. Las analogías pueden ser juzgadas por la comparación de los dos pizarrones, a cargo de la red neural. Esta programación híbrida da acceso a la posibilidad de incorporar marchas de demostración lógica y también a la posibilidad de encontrar soluciones gestálticas.
 - q) La demostración analógica puede ser un instrumento pedagógico para una introducción no traumática a la demostración lógica.
-

REFERENCIAS

- Deutsch, E.S. and Hayes, K.C. (1972) A Heuristic Solution to the Tangram Puzzle, *Machine Intelligence*, Wiley, 205-204.
- Evans, T. G., (1968) A Program for the Solution of Geometric-Analogy intelligence Test Questions en: M. Minsky (Ed.) *Semantic Information Processing*, (MIT Press, Cambridge, Mass.
- Hall R.P. (1989) Computational Approaches to Analogical Reasoning: A Comparative Analysis, *Artificial Intelligence*, 30 39-120.
- Minsky, M. (1975) A framework for representing Knowledge. En P.H. Winston *The psychology of computer vision*. New York. MacGraw-Hill
- Michalaski, R. (1980) Knowledge acquisition through conceptual dosterling: A theoretical frame work and Algorithm for partitionary data into conjunctive concepts. *International Journal of Palicy Analysis and Information Systems*. 4 (3) 219-243.
- Negrete, M.J. (1981) Matofobia y Matofilia. *Comunicación e Informática*. 2 (5) (1981) 34-38.
- Rada, R. (1989) The Road to Knowledge-rich Learning en: R. Forsyth. (Ed.) *Machine Learning London, Chapman and Hall*.
- Ruméhart, D.E., McClelland, J.L. and the PDP Research Gruop, (1986 *Paralle Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*. Cambridge, MA: Bradford Books.
- Sternberg, R.J. (1977) Component processes in analogical reasoning *Psychological Review* 84, 353-378.
- Winston, P.H. (1980) Learning and Reasoning by analogy, *Communications of A.C.M.*, 23, 689-703.
- Yankelevich, G. y Noriega, J. (en prensa) Inteligencia Natural ↔ Inteligencia Artificial: Promoción mutua entre expertos, *Memorias de la Computación en la Educación*. Guatemala, por publicarse.