Investigación Económica, vol. LXXVII, núm. 303, enero-marzo de 2018, pp. 79-93.

¿Debe ser el cambio tecnológico ahorrador puro de trabajo en un modelo endógeno de crecimiento de la producción?

Armando Sánchez Vargas [a,b]
José Márquez Estrada[a]

Resumen

Los modelos existentes de producción no han profundizado en el análisis de las razones por las cuales el progreso técnico debería ser ahorrador puro de trabajo con base en modelos donde *las innovaciones tecnológicas son consideradas endógenas*. Así, con la finalidad de llenar este vacío en la literatura, en este artículo hacemos una deducción matemática de la generalización del teorema de Uzawa en el contexto de un modelo endógeno y discutir las implicaciones del mismo para la teoría del crecimiento económico. Se encontró, en contraste con el resultado clásico del teorema de Uzawa, que para que las innovaciones tecnológicas en el largo plazo sean ahorradoras puras de trabajo se necesita que el modelo cumpla las siguientes condiciones: 1) que la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital sea menor que la unidad y 2) que la expansión de la frontera tecnológica se base sólo en el incremento de las innovaciones que ahorran trabajo en el largo plazo. En caso contrario, el cambio tecnológico será no solo ahorrador de trabajo, sino también ahorrador de capital.

Palabras clave: función de producción CES, innovación tecnológica, teorema de Uzawa, senda de crecimiento balanceado.
Clasificación JEL: C10, E23, O30, O40.

Abstract

Existing production models have not deeply analyzed the reasons why technical progress should be pure labor-saving in the models that consider endogenous technological innovations. Thus, in order to fill this gap in the literature, we do

Manuscrito recibido el 20 de junio de 2017; aceptado el 13 de febrero de 2018.

[a] Instituto de Investigaciones Económicas (IIEC) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM, México).
[b] Autor para correspondencia: armando_sanchez123@hotmail.com

a mathematical deduction of the generalization of Uzawa's theorem in an endogenous model and discuss its implications in the economic growth theory. It was found that, contrasting the classical result of Uzawa's theorem, in order for technological innovations in the long term to be purely labor-saving, the production model must have the following characteristics: 1) the elasticity of substitution between labor and capital must be less than one and 2) the expansion of the technological frontier must only due to the increase of innovations that save work in the long term. Otherwise, technological change will not only be work-saving, but also capital-saving.
Keywords: Production function CES, technological innovation, Uzawa theorem, balanced growth path.
JEL **Classification**: C10, E23, O30, O40.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los resultados clásicos de la teoría del crecimiento económico es el llamado teorema del estado estacionario (*Steady State Growth Theorem*), cuya demostración formal se atribuye a Uzawa (1961). Este teorema establece que si un modelo de crecimiento basado en una función de producción neoclásica exhibe crecimiento de largo plazo, entonces el progreso tecnológico debe ser ahorrador puro de trabajo (APT), al menos en el estado estacionario (Jones, 2003). Cabe destacar que la demostración matemática original publicada por Uzawa en realidad busca demostrar que el cambio tecnológico que no modifica la participación del capital en el producto (*Harrod-Neutral*) es equivalente al cambio tecnológico APT, lo que formaliza los hechos estilizados sugeridos por Robinson (1938).

Las implicaciones de dicho teorema para la teoría del crecimiento económico han sido sujetas a debate por una serie de autores. Una discusión relevante en la que literatura se ha enfocado en tratar de responder la pregunta de por qué todo el cambio tecnológico debería dirigirse a sustituir trabajo en lugar de remplazar capital físico en la senda de crecimiento balanceado (SCB) (Solow, 1956; Fellner, 1961; Kennedy, 1964; Samuelson, 1965; Drandakis y Phelps, 1966; Acemoglu, 2003; Jones, 2005, y Caselli y Coleman, 2006). Esta discusión equivale a plantear la interrogante de por qué las firmas sólo elegirían innovaciones tecnológicas que reemplazan trabajo en dicha senda.

En la literatura reciente destacan dos artículos que discuten de manera profunda esta interrogante. Por un lado, Acemoglu (2003) asume una función de producción CES en un modelo donde las firmas pueden invertir no sólo en tecnología que sustituye trabajadores, sino también en tecnología que remplaza capital o mejora procesos. La conclusión a la que Acemoglu llega es que, contario al modelo clásico, si puede haber progreso tecnológico de los dos tipos en el corto plazo (en la llamada senda de transición). Por otro lado, el progreso tecnológico sólo buscará, en el largo plazo, sustituir trabajo en lugar de remplazar máquinas, tal y como lo sostiene el modelo clásico (en la senda de equilibrio balanceado). Cabe destacar que los resultados de Acemoglu son mucho más consistentes con la evidencia empírica que sugiere que la participación del capital en el producto no es constante en el corto plazo, pero que si lo es en el largo plazo. De hecho, la evidencia empírica para diferentes países generalmente no corresponde con el modelo clásico de crecimiento económico basado en una función de producción Cobb-Douglas con elasticidad unitaria y donde las participaciones son constantes tanto en el corto como en el largo plazo.

El hecho de que también tiene que existir progreso tecnológico que sustituye capital, en el corto plazo, se explica por los ahorros en costos que trae aparejada la innovación tecnológica que sustituye maquinaria y equipo. Supongamos que en una economía donde prevalece una elasticidad de sustitución entre capital y trabajo menor que la unidad, con escasas posibilidades de sustituir capital por trabajo, surge un nivel alto de innovaciones que sustituyen trabajo en relación con el nivel de innovaciones que sustituyen capital, entonces la participación del capital es alta comparada con la participación del trabajo. Lo anterior generaría los incentivos de ganancias de corto plazo para que aparezca progreso técnico ahorrador de capital. Sin embargo, dado que el capital puede acumularse y el trabajo no, en la senda de lago plazo sólo hay incentivos para introducir progreso técnico ahorrador de trabajo para las empresas maximizadoras del beneficio, lo cual si es consistente con una participación constante del capital en el producto, tal y como lo predice el modelo de crecimiento neoclásico estándar.

Por otra parte, Jones (2003) también recupera el teorema de Uzawa y lo demuestra formalmente, pero con argumentos más intuitivos. Su demostración le permite discutir sobre la existencia de una participación no constante del trabajo en el producto en el corto plazo, como sugieren los hechos estilizados. Jones establece un modelo en el que la elasticidad de la función de producción de corto plazo exhibe una sustitución entre el capital y el trabajo que es menor que la unidad, pero que la elasticidad de largo plazo de dicha función es igual a la unidad en el largo plazo. Entonces, Jones, al igual que Acemoglu, concluye que es posible conciliar el modelo de crecimiento neoclásico solamente en el largo plazo, lo cual es más parecido a la evidencia empírica.

En general, estos dos autores han contribuido a explicar el fenómeno. No obstante, los modelos existentes, hasta donde sabemos, no han profundizado en el análisis de las razones por las cuales el progreso técnico debería ser APT con base en un modelo donde *las innovaciones tecnológicas sean consideradas endógenas*. Así, con la finalidad de llenar este vacío en la literatura, en este artículo buscamos ofrecer una demostración matemática de dicho teorema, pero en el contexto de un modelo endógeno, y discutir las implicaciones del mismo para la teoría del crecimiento económico. Para ello, se plantea un modelo en el que asumimos que las innovaciones que sustituyen trabajo y las innovaciones que sustituyen capital son primeramente determinadas de manera óptima dentro del modelo de crecimiento y se desarrolla una demostración formal del teorema de Uzawa en este contexto. Asimismo, discutimos de manera breve las implicaciones de esta nueva versión del teorema de crecimiento estacionario respecto a la dirección del cambio tecnológico.

Cabe destacar que el principal resultado de este artículo se basa en una modificación propia de la demostración del teorema de Uzawa propuesta por Jones (2003), quien propone que, en un modelo de naturaleza endógena, para que las participaciones del trabajo y el capital se mantengan constantes en el largo plazo, tal y como lo sugería Kaldor (1950), se requiere una u otra de las siguientes condiciones:

a) La dirección del cambio tecnológico debe ser APT.
b) La función de producción debe ser Cobb-Douglas en la SCB.

Sin embargo, nuestro hallazgo más importante es que lo más común es que el cambio tecnológico será no sólo ahorrador de trabajo, sino también ahorrador de capital, pues para que la innovación sea APT se necesitan las siguientes condiciones: 1) que la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital sea menor que la unidad y 2) que la expansión de la frontera tecnológica se base sólo en el incremento de las innovaciones que sustituyen trabajo en el largo plazo.

El presente artículo está organizado como sigue. En la segunda sección presentamos el teorema de crecimiento tal y como se presenta en Jones (2003), base para nuestro modelo endógeno que se detalla en dicho apartado. En la tercera sección mostramos la derivación de la función de producción global y la demostración del teorema de Uzawa en el contexto de un modelo endógeno. En la última sección se discuten de manera breve las implicaciones teóricas y empíricas de la demostración de la segunda sección.

2. MARCO TEÓRICO: EL MODELO DE CRECIMIENTO CLÁSICO Y EL TEOREMA DE UZAWA

En esta sección se presenta un modelo general de crecimiento económico endógeno basado en una función de producción neoclásica y se analiza el comportamiento del modelo en la SCB. Lo anterior con el fin de caracterizar a la función de producción en dicha senda y discutir las implicaciones del teorema de Uzawa en un modelo con crecimiento endógeno. Este apartado servirá de base para construir una modificación del modelo neoclásico original hacia una versión con crecimiento endógeno basado en una función de producción CES particular, la cual permitirá demostrar el teorema de Uzawa e interpretar su significado en un contexto diferente en la próxima sección.

Supongamos un modelo de crecimiento neoclásico con la siguiente función de producción general sin forma funcional específica:

$$Y_t = F((B_t K_t), (A_t L_t))$$

donde el producto (Y) depende de los factores de capital (K) y de trabajo (L) potenciados por las innovaciones tecnológicas B y A respectivamente en el tiempo t. La función F cumple las propiedades estándar de rendimientos constantes a escala (RCE) en K y L, productos marginales positivos y decrecientes, así como las condiciones de Inada. Además, suponemos que la acumulación de capital en la economía está gobernada por la siguiente ecuación dinámica:

$$\dot{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t, \text{ con } K_0 > 0 \text{ y } \delta \geq 0$$

donde $\dot{K}_t$ es la derivada de K_t respecto al tiempo, C_t es el consumo en el tiempo t, y δ es la tasa de depreciación del capital. Por último, asumimos que el trabajo crece a una tasa exógena constante n, por lo que se tiene que:

$$L_t = L_0 e^{nt}, \text{ con } L_0 > 0$$

A continuación estudiamos el modelo de crecimiento económico en dos etapas. En la primera vamos a obtener la función de producción global de la economía en cuestión. Para ello, suponemos que el productor elige la mejor tecnología a su alcance, por lo que debe elegir de entre el conjunto de posibles tecnologías que remplazan capital y las que sustituyen trabajo (b_t, a_t), cuya frontera está dada por $H(b_t, a_t) = N$.

Así, el problema de optimización del productor se puede expresar como:

$$\underset{a,b}{máx}\ Y_t = F(B_tK_t, A_tL_t) \text{ sujeto a } H(b_t, a_t) = N$$

donde b_t y a_t son las variables de innovación en capital y trabajo respectivamente, es decir, $B_t = B(b_t)$ y $A_t = A(a_t)$. Estas últimas funciones expanden la productividad de los factores de la producción L y K.

Posteriormente, suponiendo que el productor produce de acuerdo a esta descripción, y que el conjunto de las innovaciones crece a una tasa exógena $g > 0$, analizaremos el comportamiento de la producción en el largo plazo, esto es, trataremos de determinar la dirección del cambio tecnológico en la senda de largo plazo y analizaremos el teorema de Uzawa.

Definición 1. En un modelo de crecimiento neoclásico caracterizado como lo describimos anteriormente, una SCB es una situación en la cual las variables endógenas del modelo crecen a una misma tasa. En nuestro modelo, esto se reduce a que la tasa de crecimiento del capital es igual a la del producto, es decir, $\widehat{K} = \widehat{Y}$, donde $\widehat{X} = \frac{d}{dt}\text{Ln}(X)$ es la tasa de crecimiento de la variable X.

Además, diremos que el cambio tecnológico en la SCB será APT si la tasa de crecimiento de las innovaciones de trabajo es mayor que cero ($\widehat{a_t} = 0$) y la tasa de crecimiento de las innovaciones de capital es cero ($\widehat{b_t} = 0$), y será ahorrador puro de capital (APC) si ocurre que $\widehat{a_t} = 0$ y $\widehat{b_t} > 0$.

Así, la dirección del cambio técnico es APT si solamente hay crecimiento económico motivado por las innovaciones de capital o de trabajo respectivamente. En el presente modelo, más que analizar el crecimiento del producto per cápita estaremos interesados en estudiar el crecimiento del producto per cápita dado por el trabajo efectivo, esto es, aquél que ocurre una vez que descontamos los efectos del incremento en el tamaño de la población potenciada por las innovaciones de trabajo, por lo que tenemos las siguientes definiciones.

Definición 2. Se define el producto per cápita efectivo como el cociente $y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$, y el capital per cápita efectivo como el cociente $k_t = \frac{B_t K_t}{A_t L_t}$.

Note que la función de producción es homogénea de grado uno, por lo que podemos expresar la producción efectiva per cápita como:

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = F\left(\frac{B_t K_t}{A_t L_t}, 1\right) = f(k_t)$$

Además, por el teorema de Euler, la suma de las participaciones del capital y del trabajo efectivo es uno, es decir:

$$\frac{F_{BK} B_t K_t}{Y_t} + \frac{F_{AL} A_t L_t}{Y_t} = V_K + V_L = 1$$

donde F_{BK} y F_{AL} son las derivadas parciales de F respecto a la primera y segunda entrada. Luego, tomando la derivada total de F, tenemos que:

$$\frac{dF}{dt} = \dot{Y}_t = F_{BK}(B_t \dot{K}_t + \dot{B}_t K_t) + F_{AL}(A_t \dot{L}_t + \dot{A}_t L_t)$$

y dividiendo por Y_t obtenemos su tasa de crecimiento, dada por:

$$\widehat{Y}_t = \frac{F_{BK} B_t K_t}{Y_t}\left[\frac{\dot{K}_t}{K_t} + \frac{\dot{B}_t}{B_t}\right] + \frac{F_{AL} A_t L_t}{Y_t}\left[\frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t}\right] = V_K[\widehat{K}_t + \widehat{B}_t] + V_L[\widehat{A}_t + n]$$

Por último, se tiene que en la SCB:

$$\widehat{Y}_t = \frac{V_K}{1 - V_K}\widehat{B}_t + \widehat{A}_t + n$$

como $y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$, se tiene que $\hat{y}_t = \widehat{Y}_t - [\widehat{A}_t + n]$, por lo que, simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$\hat{y}_t = \frac{V_K}{1-V_K}\hat{B}_t = \frac{V_K}{V_L}\hat{B}_t$$

Así, de la generalización del teorema de Uzawa, hecha en Jones (2003), se tiene que si la participación del capital en el producto ($V_K = V$) es constante en la SCB, entonces las innovaciones de capital deben ser constantes, $B_t = B$ (en cuyo caso el crecimiento de largo plazo es ATP), o la función de producción en esta senda debe ser una función Cobb-Douglas de la forma $Y_t = C(B_tK_t)^V(A_tL_t)^{1-V}$.

3. MODELO DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN CES Y EL TEOREMA DE UZAWA

Con base en el modelo de la sección anterior, obtenemos nuestro modelo generalizado de producción basados en una función CES, cuyas participaciones del capital y el trabajo pueden no permanecer constantes en el tiempo. Además, ofrecemos un análisis del teorema de Uzawa para determinar las condiciones bajo las cuales el progreso tecnológico será APT.

Así, para obtener un modelo suficientemente general de la función de producción para analizar nuestro modelo, suponemos que la producción en nuestra economía está caracterizada por una función de CES de la forma:

$$Y_t = D\left[(\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta} + (\gamma_K b_t)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

donde los parámetros cumplen $0 < \gamma_a \leq a$, $0 < \gamma_b \leq b$, $0 < \gamma_Y \leq Y$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $-1 \leq \theta < \infty$. Note que θ es el parámetro de sustitutabilidad entre el capital y el trabajo en la economía.

Recuerde que el modelo CES con innovación generaliza a los modelos de producción más usados en la literatura (véase Sánchez y Márquez, 2015), dado que pueden obtenerse cuando su parámetro de sustitutabilidad varia, es decir:

a) Cuando $\theta = -1$, entonces se convierte en el modelo de sustitutos perfectos con función de producción igual a $Y_t = D_{-1}[(\gamma_L a_t)^\alpha L_t + (\gamma_K b_t)^\beta K_t]$.

b) Cuando $\theta = 0$, el modelo se convierte en uno con función de producción Cobb-Douglas de la forma: $Y_t = D_0(\gamma_L a_t)^\alpha (\gamma_K b_t)^\beta L_t^\alpha K_t^\beta$.

c) Por último, cuando $\theta \to \infty$, el modelo se convierte en uno con función de producción Leontief de la forma: $Y_t = D_\infty \text{mín}\{(\gamma_L a_t)^\alpha L_t, (\gamma_K b_t)^\beta K_t\}$.

Ahora bien, el productor debe elegir la mejor técnica de producción a su alcance en un conjunto de posibles técnicas de producción cuya frontera está dada por:

$$H(b_t, a_t) = \left(\frac{a_t}{\gamma_a}\right)^{\alpha\theta} + \left(\frac{b_t}{\gamma_b}\right)^{\beta\theta} = N_t$$

donde la forma funcional de $H(b_t, a_t)$ es una forma estándar dada en Growiec (2006) y Sánchez y Márquez (2015), que refleja el efecto de compensación entre las innovaciones tecnológicas planteado anteriormente en Kortum (1997), Jones (2005) y Acemoglu (2003).

El problema del productor, en este caso, se puede expresar como:

$$\underset{a,b}{máx} \quad Y_t = D\left[(\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta} + (\gamma_K b_t)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$\text{sujeto a } H(b_t, a_t) = \left(\frac{a_t}{\gamma_a}\right)^{\alpha\theta} + \left(\frac{b_t}{\gamma_b}\right)^{\beta\theta} = N_t$$

Resolviendo este problema de elección de la tecnología, se obtienen los valores óptimos de las innovaciones dados por:

$$a_t^* = \left[\frac{N_t \gamma_a^{\alpha\theta} (\gamma_K \gamma_b)^{\beta\theta/2}}{(\gamma_L \gamma_a)^{\alpha\theta/2} + (\gamma_K \gamma_b)^{\beta\theta/2}}\right]^{\frac{1}{\alpha\theta}} \text{ y } b_t^* = \left[\frac{N_t \gamma_b^{\beta\theta} (\gamma_L \gamma_a)^{\alpha\theta/2}}{(\gamma_L \gamma_a)^{\alpha\theta/2} + (\gamma_K \gamma_b)^{\beta\theta/2}}\right]^{\frac{1}{\beta\theta}}$$

Por otra parte, podemos reescribir la producción efectiva per cápita como:

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = D\left[1 + \frac{(\gamma_t b_t)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}}{(\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}} = D[1 + k_t^{-\theta}]^{-\frac{1}{\theta}}$$

Así, su tasa de crecimiento está dada por:

$$\widehat{y_t} = \left[\frac{k_t^{-\theta}}{1 + k_t^{-\theta}}\right]\widehat{k_t} = \left[\frac{1}{1 + k_t^{\theta}}\right]\widehat{k_t}$$

Sustituyendo los valores del capital efectivo se tiene que:

$$\widehat{y_t} = \frac{(\gamma_L a_t)^{\alpha\theta} L_t^{\theta}}{(\gamma_K b_t)^{\beta\theta} K_t^{\theta} + (\gamma_L a_t)^{\alpha\theta} L_t^{\theta}} \left[\beta\widehat{b_t} + \widehat{K_t} - \alpha\widehat{a_t} - n \right]$$

Note que $\widehat{k_t} = \widehat{K_t} - \alpha\widehat{a_t} - n$ y dado que las participaciones del capital y del trabajo efectivo están definidas por:

$$V_K = \frac{(\gamma_t b_t)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}}{(\gamma_K b_t)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta} + (\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta}} \text{ y } V_L = \frac{(\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta}}{(\gamma_K b_t)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta} + (\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta}}$$

Por lo que podemos escribir el cociente de participaciones como:

$$\frac{V_K}{V_L} = \frac{(\gamma_L a_t)^{\alpha\theta} L_t^{\theta}}{(\gamma_t b_t)^{\beta\theta} K_t^{\theta}}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de la tasa de crecimiento de la producción per cápita efectiva se tiene que:

$$\widehat{y_t} = \frac{V_K}{V_L + V_K} [\widehat{k_t} + \beta\widehat{b_t}]$$

y en la SCB se tiene entonces que:

$$\widehat{y_t} = \frac{V_K}{V_L} \beta\widehat{b_t} = \frac{(\gamma_L a_t)^{\alpha\theta} L_t^{\theta}}{(\gamma_t b_t)^{\beta\theta} K_t^{\theta}} \frac{g}{\theta}$$

Note en este punto que, basado en evidencia empírica, Uzawa (1961) supuso que el cociente de las participaciones de los insumos:

$$\frac{V_K}{V_L} = \frac{(\gamma_L a_t)^{\alpha\theta} L_t^{\theta}}{(\gamma_t b_t)^{\beta\theta} K_t^{\theta}}$$

es constante en el tiempo. Pero, en general, esto no se cumple dado que los valores de a_t, b_t, L_t y K_t cambian con el tiempo. Así, las condiciones del teorema de Uzawa no se cumplirán a menos que asumamos que ambas participaciones son contantes asintóticamente.

Si asumimos que el cociente V_K/V_L no es constante en el tiempo, la función de producción local (FPL) resultante será una CES. Para obtener la función de producción global simplemente sustituimos los valores óptimos de las innovaciones en la función de producción, obteniendo la FPL dada por:

$$Y^* = D_{SCB} N^{\frac{1}{\theta}} \left[(\gamma_L \gamma_a)^{-\alpha\theta/2} L^{-\theta} + (\gamma_K \gamma_b)^{-\beta\theta/2} K^{-\theta} \right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

donde la constante D_{SCB} toma el valor $D_{SCB} = D\left[(\gamma_L \gamma_a)^{-\alpha\theta/2} + (\gamma_K \gamma_b)^{-\beta\theta/2} \right]^{-\frac{1}{\theta}}$. En este caso, las tasas de crecimiento de las innovaciones que ahorran capital y trabajo son ambas diferentes de cero y están dadas respectivamente por:

$$\widehat{a_t} = \frac{g}{\alpha\theta} \text{ y } \widehat{b_t} = \frac{g}{\beta\theta}$$

Así, las tasas de crecimiento de las innovaciones son ambas distintas de cero y dependen únicamente de la tasa de crecimiento de la frontera tecnológica, del parámetro de sustitutabilidad de la producción y de los parámetros de escasez de las innovaciones.

Por otra parte, si ahora asumimos que $V_K = V$ es constante en la SCB, siguiendo la versión del teorema de Uzawa en Jones (2003), se tiene que:

$$\widehat{y_t^*} = \frac{d}{dt}\mathrm{Ln}(y_t) = \frac{V}{1-V}\frac{g}{\theta} = \frac{V}{1-V}\beta\widehat{b_t} = \frac{V\beta}{1-V}\frac{d}{dt}\mathrm{Ln}(b_t) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ln}\left(b_t^{\frac{V\beta}{1-V}} \right)$$

Luego, integrando esta ecuación se tiene que:

$$\mathrm{Ln}(y_t^*) = \int \frac{d}{dt}\mathrm{Ln}(y_t^*)dt = \int \frac{d}{dt}\mathrm{Ln}\left(b_t^{\frac{V\beta}{1-V}} \right)dt = \mathrm{Ln}\left(b_t^{\frac{V\beta}{1-V}} \right) + C$$

Componiendo con la función exponencial, tenemos ahora:

$$y_t^* = \frac{Y_t^*}{A_t L_t} = \frac{Y_t^*}{(\gamma_L a_t)^{\alpha} L_t} = B_0 b_t^{\frac{V\beta}{1-V}}$$

Luego entonces, podemos concluir que el cociente:

$$\frac{Y_t^*}{(\gamma_L a_t)^{\alpha} L_t b_t^{\frac{V\beta}{1-V}}} = B_0$$

es constante. Además, suponiendo que la relación $\frac{Y_t^*}{K_t}$ es constante en la SCB, entonces $\frac{\partial Y_t^*}{\partial K_t} = C_0$, así $Y_t^* = C_0 K_t$, por lo tanto:

$$\frac{(\gamma_K b_t)^{\beta} K_t}{(\gamma_L a_t)^{\alpha} L_t} = [b_t^{\beta}]^{\frac{1}{1-V}} \frac{\gamma_K^{\beta} K_t}{[b_t^{\beta}]^{\frac{v}{1-V}} (\gamma_L a_t)^{\alpha} L_t} = [b_t^{\beta}]^{\frac{1}{1-V}} \frac{\gamma_K^{\beta}}{C_0} \frac{Y_t^*}{[b_t^{\beta}]^{\frac{v}{1-V}} (\gamma_L a_t)^{\alpha} L_t} = [b_t^{\beta}]^{\frac{1}{1-V}} \frac{\gamma_K^{\beta} B_0}{C_0}$$

Ahora, derivando la función de producción óptima en la SCB respecto a K_t, se tiene que:

$$\frac{\partial Y_t^*}{\partial K_t} = \frac{\partial}{\partial K_t} D[(\gamma_L a_t^*)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta} + (\gamma_K b_t^*)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}]^{-\frac{1}{\theta}} = D\left[\left(\frac{(\gamma_K b_t^*)^{\beta} K_t}{(\gamma_L a_t^*)^{\alpha} L_t}\right)^{\theta} + 1\right]^{-\frac{1+\theta}{\theta}} (\gamma_K b_t^*)^{\beta}$$

Reescribiendo en términos de la expresión anterior, tenemos que:

$$\frac{\partial Y_t^*}{\partial K_t} = D\gamma_K^{\beta}\left[\left(\frac{\gamma_K^{\beta} B_0}{C_0}[(b_t^*)^{\beta}]^{\frac{1}{1-V}}\right)^{\theta} + 1\right]^{-\frac{1+\theta}{\theta}} (b_t^*)^{\beta} = C_0$$

la cual es una identidad que tiene variable al término $(b_t^*)^{\beta}$, por lo que hay dos posibilidades para que esta condición se cumpla para todo *t*:

a) Una opción es que $(b_t^*)^{\beta}$ sea constante, es decir, para todo *t* se tiene que $b_t^* = b_0^*$, luego entonces en la SCB las innovaciones son ATP, por lo que el nuevo problema del productor de largo plazo es:

$$\underset{a}{máx} \quad Y_t = D\left[(\gamma_L a_t)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta} + (\gamma_K b_0^*)^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$\text{sujeto a } H(a_t) = \left(\frac{a_t}{\gamma_a}\right)^{\alpha\theta} = N_t$$

Así, la función de producción óptima está dada por:

$$Y_{SCB}^{*} = D\left[N_t^{-1}(\gamma_L \gamma_a)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta} + (\gamma_K b_0^{*})^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

Note, en este caso, que debido a que el valor de la frontera tecnológica N_t y de la cantidad de trabajo L_t están relacionados de manera positiva (pues en caso contrario el aumento de las innovaciones disminuiría la capacidad de producción del trabajo), se debe tener que $\theta > 0$. Además, la elasticidad de sustitución de la función CES está dada por $\sigma = (1 + \theta)^{-1}$, por lo que para valores positivos de θ se cumple que $0 < \sigma < \infty$.

b) Por otra parte, si $(b_t^{*})^{\beta}$ no es constante, entonces el producto marginal del trabajo se puede expresar como:

$$\frac{\partial Y_t^{*}}{\partial Z} = Z^{1-V} f'(Z) = C_0$$

donde Z está dada por $Z = [(b_t^{*})^{\beta}]^{\frac{1}{1+V}}$. Reescribiendo esto, tenemos $f'(Z) = C_0 Z^{V-1}$, por lo que, integrando de ambos lados, tenemos que:

$$f(Z) = \int f'(Z)dZ = C_0 \int Z^{V-1} dZ = C_3 Z^{V}$$

Es decir, bajo estas condiciones de largo plazo, la función que cumple todo esto es de la forma exponencial, por lo que tenemos que:

$$Y_{SBC}^{*} = D\left[N_t^{-1}(\gamma_L \gamma_a)^{-\alpha\theta} L_t^{-\theta} + (\gamma_K b_0^{*})^{-\beta\theta} K_t^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

por lo que la función de producción en la SCB es una función Cobb-Douglas de la forma:

$$Y_{SBC}^{*} = C_0[(\gamma_K b_t^{*})^{\beta} K_t]^{V} [(\gamma_L a_t^{*})^{\alpha} L_t]^{1-V}$$

Sustituyendo los valores óptimos se tiene la siguiente función de producción Cobb-Douglas:

$$Y_t^{*} = C_{SCB} N_t^{\frac{1}{\theta}} L_T^{1-V} K_t^{V}$$

donde la constante de la función será: $C_{SCB} = C_0 \dfrac{(\gamma_L \gamma_a)^{\alpha(1-V)/2} (\gamma_K \gamma_b)^{\beta(1+V)/2}}{[(\gamma_L \gamma_a)^{\alpha\theta/2} + (\gamma_K \gamma_b)^{\beta\theta/2}]^{\frac{1}{\theta}}}$.

Así, la tasa de crecimiento óptima en la SCB está dada por:

$$\widehat{y_t^*} = \frac{g}{\theta}\frac{V}{1-V}$$

Note, en este caso, que aunque la función de producción es del tipo Cobb-Douglas esta no es ATP, dado que no cumple las condiciones que pide el teorema de Uzawa para que ocurra lo contrario. Así, su tasa de crecimiento depende del crecimiento dado por las innovaciones ahorradoras de capital y de trabajo al mismo tiempo.

4. COMENTARIOS GENERALES

Se presentó un modelo general de crecimiento económico endógeno basado en una función de producción neoclásica del tipo CES y se analizó su comportamiento en la SCB con el fin de caracterizar a la función de producción en dicha senda y discutir el cumplimiento y las implicaciones del teorema de Uzawa en este tipo de modelos. Específicamente, se hizo una modificación del modelo clásico de crecimiento hacia una versión con crecimiento endógeno basado en una función de producción CES que permitió establecer bajo qué condiciones se cumple el teorema de Uzawa e interpretar el significado de estos resultados. Se encontró, por un lado, que si la participación del capital en el producto no es constante en la SCB, no se cumple el teorema de Uzawa, por lo que se tiene una función de producción CES en la SCB con tasas de crecimiento positivas de ambos tipos de innovaciones (capital y trabajo), las cuales dependen de la tasa de crecimiento de la frontera tecnológica y de los parámetros de sustitutabilidad y de escasez de las mismas.

Por otra parte, siguiendo las condiciones del teorema de Uzawa, si la participación del capital es constante, entonces las innovaciones tecnológicas son APT en la SCB sólo si las innovaciones ahorradoras de capital se mantienen constantes, en cuyo caso la función de producción global será CES. Además, en este caso, la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital debe ser menor o igual que la unidad. Por último, en caso de que las innovaciones ahorradoras de capital no sean constantes, la función de producción en la SCB será de la forma Cobb-Douglas, pero la tasa de crecimiento del producto dependerá del crecimiento dado por las innovaciones ahorradoras de capital y de trabajo al mismo tiempo.

REFERENCIAS

Acemoglu, D. (2003). Labor- and capital-augmenting technical change. *Journal of the European Economic Association*, 1(1), pp. 1-37.

Caselli, F. y Coleman, W.J. (2006). The world technology frontier. *American Economic Review*, 96(3), pp. 499-522.

Drandakis, E. y Phelps, E. (1966). A model of induced invention, growth and distribution. *Economic Journal*, 76(304), pp. 823-840.

Fellner, W. (1961). Distortion of subjective probabilities as a reaction of uncertainty. *The Quarterly Journal of Economics*, 75(4), pp. 670-689.

Growiec, J. (2006). A new class of production functions and an argument against purely labor-augmenting technical change. *International Journal of Economics Theory*, 4(4), pp. 483-502.

Jones, C. (2003). *Growth, capital shares, and a new perspective on production functions* [Working Paper]. University of California y National Bureau of Economic Research, Berkeley, CA y Washington, DC.

Jones, C. (2005). The shape of production functions and the direction of technical change. *Quarterly Journal of Economics*, 120(2), pp. 517-549.

Kennedy, C. (1964). Induced bias in innovation and the theory of distribution. *Economic Journal*, 74(295), pp. 541-547.

Kortum, S.S. (1997). Research, patenting, and technological change. *Econometrica*, 65, pp. 1389-1419.

Robinson, J. (1938). The classification of inventions. *Review of Economics Studies*, 5(2), pp. 139-142.

Samuelson, P. (1965). A theory of induced innovation along Kennedy-Weisäcker lines. *The Review of Economics and Statistics*, 47(4), pp. 343-56.

Sánchez, A. y Márquez, J.M. (2015). *What drives the shape of the production function and technical progress? A Copula approach* [Working Paper]. Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM, México.

Solow, R.M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economic*, 70(1), pp. 65-94.

Uzawa, H. (1961). Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *Review of Economic Studies*, 28(2), pp. 117-124.