investigación económica, vol. LXVIII, 268, abril-junio de 2009, pp. 69-114

Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal

FRANCISCO VENEGAS-MARTÍNEZ*

INTRODUCCIÓN

En la literatura económica y financiera, el supuesto de que los precios siguen una distribución lognormal, o que las tasas de crecimiento siguen una distribución normal, es muy común. En particular, es usual suponer que las variables financieras siguen un movimiento Browniano geométrico. Sin embargo, existe evidencia empírica contundente (véaseVenegas-Martínez, 2001) de que la mayoría de las variables financieras no se comportan de acuerdo a una distribución lognormal. Una de las características que distingue a las variables financieras es que ocasionalmente se presentan movimientos inesperados (auges o caídas). Estos movimientos ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría con una distribución lognormal, incluso si se supone una

Manuscrito recibido en agosto de 2007; aceptado en mayo de 2008.
* Profesor-Investigador de la Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, <fvenegas@ipn.mx>. El autor desea agradecer los valiosos cometarios y atinadas sugerencias de los dictaminadores anónimos.

volatilidad razonablemente moderada. Este hecho es sumamente importante para la teoría y la investigación empírica y no es simplemente una sofisticación más en el desarrollo teórico de modelos de equilibrio general. El modelo propuesto toma en cuenta y evalúa el desempeño de la economía como un todo cuando dichos cambios externos y repentinos se presentan.

En el análisis de datos, cuando se compara la distribución estandarizada empírica de una variable financiera con una distribución normal estándar, es común observar que la cresta de la distribución empírica es más alta que la de la normal estándar. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces las colas de la distribución empírica tienen que ser necesariamente más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos debe ser igual a uno. Esta diferencia es típica en muchas variables financieras, incluso en la tasa de inflación y en la tasa de expansión monetaria. En general, se observa que las distribuciones empíricas divergen notablemente de la distribución normal. Una cresta que es muy alta supone que existe una mayor probabilidad, de lo que se esperaría en una distribución normal, de que se presenten movimientos pequeños en las variables de interés. Además, debido a las colas gordas (o pesadas) de la distribución empírica, existe una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos en comparación con la distribución normal. La mezcla de procesos de difusión con procesos de saltos proporcionan una alternativa para el modelado de colas gordas y el sesgo de una distribución, además de que proporcionan un ambiente más rico para racionalizar dinámicas de precios que no pueden generarse con modelos que únicamente consideran movimientos Brownianos (véanse, por ejemplo, Turnovsky, 1993 y 1999; Giulano y Turnovsky, 2003; Turnovsky y Smith, 2006). Existe una tendencia creciente en la literatura económica que emplea el postulado de maximización de utilidad esperada con restricciones que incluyen procesos de difusión con saltos para estudiar condiciones de equilibrio parcial y general; algunos ejemplos se encuentran en Venegas-Martínez (2005), (2006a), (2006b), (2006c) y (2008).

En los últimos años, la economía en su proceso de globalización ha experimentado una serie de cambios y transformaciones profundas que han impactado tanto la forma de llevar a cabo el análisis económico, como el diseño mismo de la política económica. Estos cambios han abierto nuevos paradigmas que resaltan la exposición de la política económica a diferentes tipos de riesgos. Estos paradigmas, en general, han abierto otros horizontes a la teoría económica y, consecuentemente, al empleo de herramientas más sofisticadas que permitan una mayor comprensión de los fenómenos estocásticos (evidentemente todos los fenómenos económicos son fenómenos estocásticos). En el campo de la teoría económica, uno de los cambios más importantes es la superación del marco determinista; no sólo como resultado del riesgo inherente a la mayoría de los activos financieros, sino como una respuesta más completa a los procesos de decisión de los agentes económicos. La adecuada y oportuna administración de riesgos reduce la varianza de las variables de política, lo que permite crear dispositivos congruentes, eficaces y creíbles que minimicen el impacto esperado de los choques exógenos. Por otro lado, la discusión permanente sobre la estrategia de política económica, así como los instrumentos y mecanismos para desarrollarla, se ha ubicado en un marco de referencia más amplio en donde se incorporan diversos factores de riesgo que afectan el manejo de las políticas monetaria y fiscal. En este sentido, los instrumentos de política monetaria (tasa de expansión monetaria y tasa de interés) junto con los instrumentos de política fiscal (gasto público e impuestos) se pueden combinar para reducir la exposición a los distintos tipos de riesgos que pueden tener efectos negativos en la economía.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección se establece la dinámica estocástica que conduce el nivel general de precios y se plantea el problema de decisión de los consumidores. En el transcurso de la tercera sección se plantea el problema de decisión de las empresas. Con el propósito de cerrar el modelo, en la cuarta sección se especifica el comportamiento del gobierno. El equilibrio macroeconómico se determina en la quinta sección. Por último, en la sexta sección, se presentan las conclusiones de la investigación. Tres apéndices proporcionan detalles sobre diversos resultados analíticos.

PROBLEMA DE DECISIÓN DE LOS CONSUMIDORES

A continuación se establece la dinámica estocástica que conduce el nivel general de precios (el índice de precios al consumo) y se plantea el problema de decisión de un consumidor (racional) representativo.

Dinámica del nivel de precios

Se supone que la economía produce y consume un solo bien y está poblada por consumidores idénticos con vida infinita que maximizan su satisfacción por el bien en cuestión. El modelo supone que los individuos perciben que el precio del bien, P_t, es conducido por un proceso estocástico de difusión con saltos, de tal forma que:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}W_{P,t} + \nu_P P_t \mathrm{d}Q_{P,t} \qquad [1]$$

donde π es el parámetro de tendencia, el cual representa la tasa de inflación promedio esperada condicional a que ningún salto ocurra, σ_P es la volatilidad esperada de la tasa de inflación y $1+\nu_P$ es el tamaño promedio esperado de posibles saltos en el nivel general de precios. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{p,t}]=0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_{p,t}]=\mathrm{d}t$. Se supone que los saltos en el nivel general de precios siguen un proceso de Poisson, $Q_{P,t}$, con parámetro de intensidad λ_P, de tal manera que

$$\Pr\{\text{un salto unitario durante } \mathrm{d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q_{P,t} = 1\} = \lambda_P \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \qquad [2]$$

mientras que[1]

$$\Pr\{\text{ningún salto en } \mathrm{d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q_{P,t} = 0\} = 1 - \lambda_P \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \qquad [3]$$

---

[1] Como siempre $o(h)$ significa que $o(h)/h$ tiende a 0 cuando h tiende a 0.

Por tanto, $\mathrm{E}[\mathrm{d}Q_{P,t}] = \mathrm{Var}[\mathrm{d}Q_{P,t}] = \lambda_P \mathrm{d}t$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $Q_{P,0} = 0$. En todo lo que sigue, se supondrá también que $W_{P,t}$ y $Q_{P,t}$ no están correlacionados entre sí. La tendencia π, así como las componentes de difusión y salto $\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}$ y $v_P \mathrm{d}Q_{P,t}$ se determinarán endógenamente.

Activos de los consumidores

El consumidor representativo posee tres diferentes activos: dinero, M_t, títulos de deuda pública, B_t, y títulos de capital (acciones) K_t. En consecuencia, la riqueza real, a_t, del individuo está dada por:

$$a_t = m_t + b_t + k_t \qquad [4]$$

donde $m_t = M_t/P_t$ son los saldos monetarios reales y $b_t = B_t/P_t$ es la tenencia de bonos del sector público en términos reales. El consumidor obtiene satisfacción por el consumo del bien que produce la economía y por la tendencia de saldos reales debido a sus servicios de liquidez. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo $t = 0$, V_0, de un individuo representativo, competitivo y adverso al riesgo tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty \left[u(c_t) + v(m_t) \right] e^{-\delta t} \, \mathrm{d}t \right\} \qquad [5]$$

donde E_0 es la esperanza condicional al conjunto de información relevante disponible al tiempo $t = 0$. En particular, se eligen $u(c_t) = \theta \log(c_t)$ y $v(m_t) = \log(m_t)$ con el propósito de generar soluciones analíticas que faciliten la discusión subsiguiente. Por otra parte, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[N_{m,t}\,\mathrm{d}R_{m,t} + N_{b,t}\,\mathrm{d}R_{b,t} + N_{k,t}\,\mathrm{d}R_{k,t}\right] - c_t\left(1+\tau_c\right)\mathrm{d}t - \mathrm{d}\tau_t \quad [6]$$

donde

$N_{j,t} \equiv \dfrac{j_t}{a_t}$: proporción del portafolio en el activo j, $j = m,b,k$.

$\mathrm{d}R_{j,t}$: tasa de rendimiento real después de impuestos sobre el activo j, $j = m,b,k$.

$\mathrm{d}\tau_t$: impuestos sobre la riqueza.

τ_c: impuesto sobre el consumo.

Rendimiento de los activos

A continuación se especifica la dinámica del rendimiento de los activos. Se supone que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e i, respectivamente. El rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo t, $\mathrm{d}R_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando [1] como el proceso subyacente, conduce a

$$\mathrm{d}R_{m,t} = P_t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right) = r_m\,\mathrm{d}t - \sigma_P\,\mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t} \quad [7]$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. El rendimiento estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como

$$\mathrm{d}R_{b,t} = r_b\,\mathrm{d}t - \sigma_P\,\mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t} \quad [8]$$

donde

$$r_b = i\left(1-\tau_y\right) - \pi + \sigma_P^2$$

Aquí, τ_y es la tasa de impuesto sobre ingresos por intereses realizados. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad y posibles saltos en el nivel general de precios. La tasa de rendimiento de las acciones después de impuestos será denotada, por el momento, mediante

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k\,\mathrm{d}t + \sigma_k\,\mathrm{d}W_{k,t} + \nu_k \mathrm{d}Q_{k,t} \qquad [9]$$

donde los procesos $\mathrm{d}W_{k,t}$ y $\mathrm{d}Q_{k,t}$ tienen características similares a los procesos definidos en [1]. Además de los impuestos τ_y y τ_c que se pagan sobre el ingreso por intereses y por el consumo, respectivamente, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$\mathrm{d}\tau_t = a_t\overline{\tau}\,\mathrm{d}t + a_t\sigma_\tau\,\mathrm{d}W_{\tau,t} + a_t\nu_\tau\,\mathrm{d}Q_{\tau,t} \qquad [10]$$

donde $\overline{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $\mathrm{d}W_{\tau,t}$ y $\mathrm{d}Q_{\tau,t}$ comparten las mismas características que los procesos de Wiener y de Poisson definidos anteriormente en [1]. La tendencia $\overline{\tau}$, así como las componentes de difusión y salto $\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}$ y $\nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t}$ se determinarán endógenamente.

Decisiones óptimas de los consumidores

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen [5] sujeto a [6]. Note que después de sustituir las expresiones [7]-[10] en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, [6], ésta se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} &= \left[N_{m,t}\, r_m + N_{b,t}\, r_b + N_{k,t}\, r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau} \right] \mathrm{d}t \\ &\quad + \left[N_{k,t}\sigma_k\, \mathrm{d}W_{k,t} - \left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P\, \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau\, \mathrm{d}W_{\tau,t} \right] \\ &\quad + \left[\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\left(\frac{1}{1+\nu_P}-1\right)\mathrm{d}Q_{P,t} + N_{k,t}\nu_k\, \mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau\, \mathrm{d}Q_{\tau,t} \right]\end{aligned} \quad [11]$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a [11] y a la restricción de normalización

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1 \quad [12]$$

están dadas por (véanse los apéndices A y B):

$$c_t = \frac{\delta\theta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)} a_t \quad [13]$$

$$\begin{aligned}0 = \frac{1}{N_{m,t}} + \frac{\left(1+\theta\right)}{\delta}\Bigg[r_m - \left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\,\sigma_{Pk} \\ -\sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P} \Bigg] - \phi\end{aligned} \quad [14]$$

$$\begin{aligned}0 = \frac{\left(1+\theta\right)}{\delta}\Bigg[r_b - \left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\,\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} \\ - \frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_P} \Bigg] - \phi\end{aligned} \quad [15]$$

y

$$0=\frac{(1+\theta)}{\delta}\Big[r_k-N_{k,t}\,\sigma_k^2+\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{Pk}$$
$$+\sigma_{k\tau}+\frac{\lambda_P\,\nu_k}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)\nu_k}\Big]-\phi \qquad [16]$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción [12]. Después de restar [14] de [15], se encuentra la proporción óptima de la riqueza asignada a la tenencia de saldos reales:

$$\hat{N}_{m,t}=\frac{\delta}{i\left(1-\tau_y\right)\left(1+\theta\right)} \qquad [17]$$

Asimismo, después de restar [15] de [16], se tiene que

$$N_{k,t}B-A-\frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+N_{k,t}\,\nu_P}-\frac{\lambda_k\,\nu_k}{1+N_{k,t}\,\nu_k}=0 \qquad [18]$$

donde

$$B\equiv\ \sigma_P^2+2\sigma_{Pk}+\sigma_k^2\ >0 \qquad [19]$$

y

$$A\equiv r_k-r_b+\sigma_P^2+\sigma_{Pk}+\sigma_{P\tau}+\sigma_{k\tau} \qquad [20]$$

Claramente, la ecuación [18] es cúbica y, por tanto, tiene al menos una solución real, la cual denotaremos mediante $\hat{N}_{k,t}=\hat{N}_{k,t}(i)$. En particular, si se supone que ν_P y ν_k son cero, equivalentemente, $\lambda_P = \lambda_k = 0$, se tiene como única solución (*cf.* Turnovsky, 1993):

$$\hat{N}_{k,t} \Big|_{\nu_P=\nu_k=0} = \frac{A}{B} \quad [21]$$

Si los parámetros de intensidad λ_P y λ_k se ajustan de tal manera que ν_P y ν_k sean de la misma magnitud, entonces [18] se transforma en una ecuación cuadrática cuyas soluciones están dadas por

$$\hat{N}_{k,t} \Big|_{\nu_P=\nu_k} = \frac{A\nu_P - B \pm \sqrt{\left(A\nu_P + B\right)^2 + 4B\nu_P^2\left(\lambda_P + \lambda_k\right)}}{2B\nu_P} \quad [22]$$

Observe que el discriminante es positivo y, en consecuencia, ambas raíces son reales. Note también que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por tanto, las ventas en corto de activos son permitidas en todo momento. Finalmente, el portafolio óptimo queda entonces completamente determinado con $\hat{N}_{b,t}$, el cual se obtiene a partir de [12] como

$$\hat{N}_{b,t} = 1 - \frac{\delta}{i\left(1-\tau_y\right)\left(1+\theta\right)} - \hat{N}_{k,t} \quad [23]$$

Costo de oportunidad de saldos reales

En esta sección se discute la relación que existe entre la utilidad marginal del dinero y el costo marginal de la tenencia de saldos reales. Observe que las condiciones de primer orden se pueden escribir como

$$u'\left(c_t\right)=\frac{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)}{\delta a_t} \qquad [24]$$

$$\frac{u'\left(m_t\right)}{u'\left(c_t\right)}\left(1+\tau_c\right)=i\left(1-\tau_y\right)>0 \qquad [25]$$

$$\frac{u'\left(m_t\right)}{u'\left(c_t\right)}\left(1+\tau_c\right)=\pi-\widehat{N}_{k,t}\left(\sigma_P^2+\sigma_{P,k}\right)+\sigma_{P,\tau}+\frac{\lambda_P\,\nu_P}{1+\widehat{N}_{k,t}\nu_P}+\frac{\delta\phi}{1+\theta} \qquad [26]$$

Esta última ecuación iguala la utilidad marginal del dinero, estandarizada por la utilidad marginal del consumo, con el costo marginal de la tenencia de saldos monetarios reales (*cf.* Venegas-Martínez, 2001). Esta condición muestra explícitamente cómo el costo de oportunidad de mantener saldos reales es afectado por la incertidumbre, *i.e.*, por cambios difusos en la tasa de inflación, los cuales están siempre presentes y por movimientos extremos y repentinos en el nivel general de precios, que ocasionalmente se presentan. Observe que el costo de oportunidad de mantener saldos monetarios reales es positivo. En este caso, cabe destacar que dado que el dinero entra directamente en la función de utilidad, el signo en el costo de oportunidad de mantener saldos monetarios reales es irrelevante, contrario a lo que se tendría en el caso de una economía con una restricción *cash-in-advance*, en donde un costo de oportunidad positivo obliga a los consumidores a mantener el mínimo posible de saldos reales para financiar su consumo. Por último, es importante destacar que la función de utilidad logarítmica implica que los valores óptimos de $N_{j,t}$, $j = m,b,k$, dependen únicamente de los parámetros que determinan las preferencias y las características estocásticas de la economía y, por tanto, las decisiones $N_{j,t}$, $j = m,b,k$ se mantendrán constantes a través del tiempo. En otras palabras, la actitud del consumidor hacia el riesgo en los instrumentos de inversión es independiente del nivel de su riqueza, *i.e.*, el nivel resultante de riqueza en cualquier instante no tiene efecto alguno sobre las decisiones en la integración del portafolio.

PROBLEMA DE DECISIÓN DE LAS EMPRESAS

En el modelo propuesto, la empresa representativa produce el único bien que hay en el mercado y el rendimiento que se paga a las acciones emitidas está en función de la producción y de la política de dividendos.

Especificación de la tecnología

Se supone que en esta economía la producción sigue una trayectoria estocástica definida por

$$\mathrm{d}y_t = \gamma k_t \mathrm{d}t + \gamma k_t \sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} + \gamma k_t \nu_y \mathrm{d}Q_{y,t} \qquad [27]$$

donde γ representa el producto marginal promedio esperado del capital. Aquí como en el caso del consumidor, $\mathrm{d}W_{y,t}$ es un proceso de Wiener y $\mathrm{d}Q_{y,t}$ es un proceso de Poisson.

Rendimiento de las acciones

En términos generales, el rendimiento que paga la empresa sobre las acciones emitidas se puede definir como

$$\mathrm{d}R_{k,t} = \left(1-\tau_y\right)\frac{\mathrm{d}v_t}{k_t} + \frac{\mathrm{d}u_t}{u_t} \qquad [28]$$

donde $\mathrm{d}v_t$ son los dividendos y u_t es el precio de las acciones, en términos del producto. Se supone que no hay impuestos sobre ganancias de capital.[2] De esta forma, el rendimiento de las acciones tiene dos componentes:

---

[2] En el caso mexicano, no hay impuestos sobre ganancia de capital cuando las operaciones se llevan a cabo en mercados reconocidos por las autoridades financieras, como es el caso de la Bolsa Mexicana de Valores.

los dividendos que se pagan por acción y las ganancias (o pérdidas) de capital que resultan de diferencias en el precio de los títulos de capital. A continuación se examina cada componente por separado. Primero, para conocer la trayectoria que sigue $\mathrm{d}u_t/u_t$ es necesario analizar el comportamiento de la producción, el stock de acciones, el capital disponible y la política de inversión de la empresa. Todas estas variables determinan la posible existencia de ganancias de capital. Ahora bien, si se supone que el stock de acciones en cualquier tiempo, t, permanece constante, digamos igual a N, entonces se cumple que $Nu_t = k_t$. Por tanto,

$$\mathrm{d}k_t = N\mathrm{d}u_t \quad [29]$$

Por otra parte, la producción después de impuestos puede tener dos usos: el pago de dividendos, $\mathrm{d}v_t$, o el financiamiento de nueva inversión, $\mathrm{d}k_t$, entendida como la adquisición de capital nuevo. De esta forma, la trayectoria que sigue la producción después de impuestos está dada por:

$$(1-\tau_P)\mathrm{d}y_t = \mathrm{d}v_t + \mathrm{d}k_t \quad [30]$$

donde τ_P es el impuesto sobre ingresos corporativos y v_t representa el pago de dividendos. Después de combinar las ecuaciones [29] y [30], se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{u_t} = \frac{(1-\tau_P)\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}v_t}{k_t} \quad [31]$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación de rendimiento de las acciones, dada en [28], se sigue que

$$\mathrm{d}R_{k,t} = -\tau_y \frac{\mathrm{d}v_t}{k_t} + (1-\tau_P)\frac{\mathrm{d}y_t}{k_t} \quad [32]$$

Política de dividendos

En el modelo se supondrá que los dividendos que pagan que las empresas son una fracción constante α del ingreso corporativo después de impuestos. Es decir, los dividendos tienen la forma

$$\mathrm{d}v_t = \alpha\left(1-\tau_P\right)\mathrm{d}y_t, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad [33]$$

Después de sustituir la expresión anterior en la ecuación [32], se obtiene la trayectoria estocástica del rendimiento de las acciones en términos del proceso que sigue la producción de bienes:

$$\mathrm{d}R_{k,t} = \left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\frac{\mathrm{d}y_t}{k_t} \qquad [34]$$

Es importante observar en esta ecuación que el componente estocástico está determinado por $\mathrm{d}y_t$, ya que el resto de las variables son deterministas. Finalmente, de la ecuación [9], se sigue que

$$r_k = \left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma \qquad [35]$$

$$\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} = \left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} \qquad [36]$$

y

$$v_k \mathrm{d}Q_{k,t} = \left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma v_y \mathrm{d}Q_{y,t} \qquad [37]$$

De esta forma, la tasa de rendimiento de las acciones está en función de la tasa del producto marginal del capital. Similarmente, el componente estocástico $\mathrm{d}R_{k,t}$ depende de los shocks de productividad derivados de cambios en γ y el comportamiento exógeno de $dW_{y,t}$, además de los posibles saltos $dQ_{v,t}$.

COMPORTAMIENTO DEL GOBIERNO

A fin de cerrar el modelo se describen las acciones del gobierno. En este modelo, el sector público no genera utilidad para los consumidores. El gobierno tiene el monopolio de la emisión de dinero y, a la vez, emite deuda para financiar su gasto. En esta sección se analizan los tres principales instrumentos de política económica que emplea el gobierno, a saber: gasto público, oferta monetaria y emisión de deuda. La restricción presupuestal que enfrenta el gobierno en términos reales, tiene la forma

$$dg_t - d\tau_{1,t} - d\tau_{2,t} + m_t dR_{m,t} + b_t dR_{b,t} = dm_t + db_t \qquad [38]$$

donde dg_t es el cambio en gasto público del gobierno en términos reales; $d\tau_{1,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de los consumidores, en términos reales; $d\tau_{2,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de las empresas, también en términos reales.

Gasto público

En este modelo se supone que el gasto que realiza el gobierno sigue un proceso estocástico definido por

$$dg_t = \bar{g}\gamma k_t dt + \gamma k_t \sigma_g dW_{g,t} + \gamma k_t v_g dQ_{g,t} \qquad [39]$$

Al igual que en los casos anteriores, $dW_{g,t}$ es un proceso estocástico con una distribución normal con media cero y varianza dt y $dQ_{g,t}$ es un proceso de saltos de Poisson. De esta forma, el gasto de gobierno está definido como una fracción dg_t del producto real. Note que, en este caso, el factor estocástico del gasto es proporcional al producto.

Oferta monetaria

La oferta monetaria en esta economía tiene asociada una regla de expansión que es conducida por un proceso estocástico de difusión con saltos de la forma:

$$\mathrm{d}M_t = \mu M_t \mathrm{d}t + \sigma_{\mathrm{M}} M_{\mathrm{t}} \mathrm{d}W_{M,t} + \nu_M M_{\mathrm{t}} \mathrm{d}Q_{M,t} \qquad [40]$$

donde μ es la tasa de expansión monetaria media esperada, $\mathrm{d}W_{M,t}$ es el componente de difusión y $\mathrm{d}Q_{M,t}$ es el componente de saltos en la tasa de expansión monetaria.

Deuda pública

La política de deuda que sigue el gobierno se hace vía emisión de bonos. En este caso, la política de endeudamiento se fija de forma tal que la razón entre la cantidad de bonos y la cantidad monetaria se mantenga constante, es decir, se supone que

$$\frac{B_t}{M_t} = f = \text{constante} \qquad [41]$$

De esta forma, se obtiene la expresión

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} \qquad [42]$$

Lo anterior significa que en operaciones de mercado abierto, el cambio porcentual de deuda emitida es igual al cambio porcentual de los cortos en la economía; o equivalentemente, el cambio porcentual en la cantidad que crece la oferta monetaria es igual al cambio porcentual de la deuda gubernamental que se salda.

Impuestos directos e indirectos

Los cambios en las cantidades reales de tributación, $\mathrm{d}\tau_{1,t}$ y $\mathrm{d}\tau_{2,t}$, que provienen de los consumidores y de las empresas, respectivamente, se describen a continuación. Todas las tasas τ_y, τ_P y τ_c, son exógenas en nuestro modelo. En el caso de los consumidores, el impuesto total gravado tiene cuatro componentes: intereses, ganancias de capital, nivel de riqueza y consumo. De esta forma, las cantidades respectivas se agregan como sigue:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau_{1,t} &= i\tau_y \hat{N}_{b,t} a_t \mathrm{d}t + \alpha\tau_y \left(1-\tau_P\right)\gamma k_t \left(\mathrm{d}t + \sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} + v_y \mathrm{d}Q_{y,t}\right) \\ &\quad + a_t \bar{\tau}\mathrm{d}t + a_t \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} + a_t v_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} + \tau_c c_\tau \mathrm{d}t\end{aligned} \qquad [43]$$

Para las empresas, los impuestos se gravan sobre los ingresos corporativos, es decir,

$$\mathrm{d}\tau_{2,t} = \tau_P \gamma k_t \left[\mathrm{d}t + \sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} + v_y \mathrm{d}Q_{y,t}\right] \qquad [44]$$

EQUILIBRIO MACROECONÓMICO

En esta sección se determinan endógenamente, en el equilibrio, la tasa de inflación, la tasa de acumulación de capital, la tasa impositiva a la riqueza y los rendimientos de los activos disponibles en la economía.

Equilibrio en el sector real

Para encontrar la trayectoria que sigue la acumulación de capital en esta economía, dada por $\mathrm{d}k_t/k_t$, se parte de la identidad de la renta (o ingreso) nacional:

$$\mathrm{d}y_t = c_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}k_t + \mathrm{d}g_t \qquad [45]$$

Al sustituir en [45], las ecuaciones [13], [27] y [39], que corresponden a la trayectoria óptima del consumo, a la dinámica de producción y a la política de gasto del sector público, respectivamente, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} = \left[\gamma\left(1-\overline{g}\right) - \frac{\delta\theta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)\widehat{N}_{k,t}} \right] \mathrm{d}t + \gamma\left(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}\right) + \gamma\left(\nu_y \mathrm{d}Q_{y,t} - \nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right) \qquad [46]$$

De esta forma, la acumulación de capital sigue una trayectoria estocástica obtenida de la diferencia entre la producción menos el consumo y el gasto del gobierno. Consecuentemente, el componente no estocástico de esta ecuación, está determinado por

$$\Psi \equiv \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} \right] = \gamma\left(1-\overline{g}\right) - \frac{\delta\theta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)\widehat{N}_{k,t}} \qquad [47]$$

lo que define la tasa esperada de acumulación de capital. Por último, se puede concluir que

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} \right)^2 \right] = \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) + \gamma^2\left(\nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g\right) \qquad [48]$$

Este resultado será utilizado en la determinación del equilibrio general.

Determinación de la tasa de inflación de equilibrio

Una vez determinadas las decisiones óptimas de los agentes, el comportamiento de las empresas y las acciones del gobierno, así como el establecimiento de las variables exógenas, lo que resta es obtener el equilibrio macroeconómico general. Dado que en esta economía los saldos monetarios reales y los bonos en términos reales están ligados a los movimientos en el nivel general de precios, es necesario, en primera instancia, especificar el comportamiento que sigue la inflación y cómo ésta es generada endógenamente por el modelo mismo.

Las cantidades $\hat{N}_{j,t}$, $j = m, b, k$, así como la tasa de interés nominal son variables endógenas. Note que el nivel de precios se puede expresar en la forma

$$P_t = \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \frac{M_t}{k_t} \qquad [49]$$

Dado que los valores óptimos de $\hat{N}_{j,t}$, $j = m, b, k$, son constantes, al diferenciar estocásticamente la razón entre dinero y capital $f\left(M_t, k_t\right) = M_t / k_t$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2 \qquad [50]$$

La condición de primer orden del consumo conduce a

$$\frac{c_t}{k_t} = \frac{\theta\delta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)\hat{N}_{k,t}\left(i^*\right)} \qquad [51]$$

donde la variable i^* (tasa de interés nominal de equilibrio) se determinará posteriormente. Después de sustituir [1], [40], [46], [48] y [51] en la expresión [50], se tiene que

$$\begin{aligned} \pi \mathrm{d}t + \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + v_P \mathrm{d}Q_{P,t} = {} & \mu \mathrm{d}t + \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} + v_M \mathrm{d}Q_{M,t} - \left[\gamma\left(1-\bar{g}\right) - \frac{c_t}{k_t}\right]\mathrm{d}t \\ & - \gamma\left(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}\right) - \gamma\left(v_y \mathrm{d}Q_{y,t} - v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right) \\ & - \gamma\sigma_{My}\mathrm{d}t + \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right)\mathrm{d}t + \gamma^2\left(v_y^2\lambda_y + v_g^2\lambda_g\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \qquad [52]$$

Por tanto, la tasa esperada de inflación en el equilibrio satisface

$$\pi^* = \mu - \left[\gamma\left(1-\overline{g}\right) - \frac{\theta\delta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)\hat{N}_{k,t}\left(i^*\right)} \right] + \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2 + v_y^2\lambda_y + v_g^2\lambda_g\right) - \gamma\,\sigma_{My} \quad [53]$$

Las componentes estocásticas de difusión y saltos satisfacen, respectivamente, las siguientes condiciones:

$$\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} = \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} - \gamma\left(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}\right) \quad [54]$$

y

$$v_P \mathrm{d}Q_{P,t} = v_M \mathrm{d}Q_{M,t} - \gamma\left(v_y \mathrm{d}Q_{y,t} - v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right) \quad [55]$$

Las ecuaciones anteriores, [53]-[55], determinan endógenamente la tasa de inflación esperada consistente con un portafolio cuyas proporciones son constantes en el tiempo. Se puede observar en [53] que la inflación media esperada de equilibrio depende positivamente de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria y negativamente de la tasa de acumulación de capital, así como positivamente de las varianzas de los choques fiscales y productivos. Por otra parte, las ecuaciones [54] y [55] determinan endógenamente los componentes estocásticos de difusión y saltos, respectivamente, en la tasa de inflación. Es importante destacar que la componente de saltos en la tasa de inflación está en función de las componentes estocásticas de los saltos de las tasas de expansión monetaria, la producción y el gasto de gobierno.

Determinación del nivel de impuestos de equilibrio

Para determinar los ajustes endógenos en los impuestos que recauda el gobierno, que son necesarios para satisfacer la restricción presupuestal, primero, se sustituyen en la restricción presupuestal del gobierno, [38], las ecuaciones respectivas a la política de gasto [39], la regla de crecimiento de la oferta monetaria [40] y la política de deuda [41], de donde se obtiene

$$\hat{N}_{m,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}}+\hat{N}_{b,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{B_t}{P_t}\right)}{\frac{B_t}{P_t}}=\frac{\gamma k_t}{a_t}\left[\bar{g}\mathrm{d}t+\sigma_g\mathrm{d}W_{g,t}+v_g\mathrm{d}Q_{g,t}\right]-\frac{\left(\mathrm{d}\tau_{1,t}+\mathrm{d}\tau_{2,t}\right)}{a_t}$$
$$+\hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} \qquad [56]$$

o bien, esta ecuación se puede reescribir como

$$\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}}=\frac{\gamma k_t}{a_t}\left[\bar{g}\mathrm{d}t+\sigma_g\mathrm{d}W_{g,t}+v_g\mathrm{d}Q_{g,t}\right] \qquad [57]$$
$$-\frac{\left(\mathrm{d}\tau_{1,t}+\mathrm{d}\tau_{2,t}\right)}{a_t}+\hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t}$$

Después de emplear el lema de Itô para obtener la diferencial $\mathrm{d}f\left(M_t,P_t\right)=\mathrm{d}\left(M_t/P_t\right)$ y sustituir las funciones de impuestos $\mathrm{d}\tau_{1,t}$ y $\mathrm{d}\tau_{2,t}$, en [57], se tiene que las componentes determinista y estocástica del nivel de impuestos de equilibrio están dadas por

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^{*} = {} & \gamma\hat{N}_{k,t}\overline{g} - \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\mu + \hat{N}_{b,t}\, i\left(1-2\tau_y\right) - \left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\gamma\hat{N}_{k,t} \\ & + \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\sigma_{MP} - \tau_c \frac{\theta\delta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)}\end{aligned} \quad [58]$$

$$\begin{aligned}\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} = {} & -\left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\sigma_M\, \mathrm{d}W_{M,t} + \gamma\hat{N}_{k,t}\,\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} \\ & -\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_y\, \mathrm{d}W_{y,t}\end{aligned} \quad [59]$$

y

$$\begin{aligned}\nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} = {} & -\left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\nu_M\, \mathrm{d}Q_{M,t} + \gamma\hat{N}_{k,t}\,\nu_g \mathrm{d}Q_{g,t} \\ & -\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\gamma\hat{N}_{k,t}\nu_y\, \mathrm{d}Q_{y,t}\end{aligned} \quad [60]$$

De esta forma, la ecuación [58] describe el ajuste endógeno en el componente determinista, mientras que la ecuación [59] lo hace en la parte estocástica en función de las fluctuaciones del crecimiento de la oferta monetaria, $\sigma_M\, \mathrm{d}W_{M,t}$, del gasto de gobierno, $\sigma_g\, \mathrm{d}W_{g,t}$, y del sector real, $\sigma_y\, \mathrm{d}W_{y,t}$. La componente de saltos que corresponde a la ecuación [60] está en función del componente estocástico de saltos en las tasas de expansión monetaria, la producción y el gasto de gobierno.

Otras relaciones de equilibrio

Para presentar en forma reducida el equilibrio macroeconómico, las varianzas y covarianzas relevantes se expresan en términos de los choques estocásticos exógenos, $\mathrm{d}W_{M,t}$, $\mathrm{d}W_{y,t}$ y $\mathrm{d}W_{g,t}$. En este caso, se supone que $\mathrm{d}W_{M,t}$ y $\mathrm{d}W_{y,t}$ están correlacionados entre sí. A partir de las ecuaciones [46], [54], [36] y [60], se obtienen las expresiones de las perturbaciones estocásticas $\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}, \sigma_k \mathrm{d}W_{k,t}$ y $\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}$ en términos de los choques estocásticos exógenos $\mathrm{d}W_{M,t}$, $\mathrm{d}W_{y,t}$ y $\mathrm{d}W_{g,t}$. Como en este modelo se supone que las perturbaciones exógenas no están correlacionadas, las varianzas y covarianzas relevantes se pueden reescribir en términos de parámetros exógenos como:

$$\begin{cases} \sigma_P^2 = \sigma_M^2 + \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) - 2\gamma\sigma_{My} \\ \\ \sigma_k^2 = \left(1-\tau_P\right)^2\left(1-\alpha\tau_y\right)^2\sigma_y^2 \\ \\ \sigma_\tau^2 = \left(1-\hat{N}_{k,t}\right)^2\sigma_M^2 + \gamma^2\hat{N}_{k,t}^2\sigma_g^2 + \left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]^2\gamma^2\hat{N}_{k,t}^2\sigma_y^2 \\ \qquad + 2\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_{My} \\ \\ \sigma_{Pk} = \left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma\left(\sigma_{My} - \gamma\sigma_y^2\right) \\ \\ \sigma_{P\tau} = -\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_M^2 - \left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_{My} \\ \qquad + \left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\gamma\sigma_{My} + \left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_y^2 + \gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_g^2 \\ \\ \sigma_{P\tau} = -\left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\gamma\sigma_{My} \\ \qquad - \left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_P\right)+\tau_P\right]\left(1-\tau_P\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_y^2 \end{cases} \qquad [61]$$

donde $\sigma_{My} = \mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{M,t}, \mathrm{d}W_{y,t}\right)$. Así, por ejemplo, la tercera igualdad indica que la varianza de la tasa de rendimiento de las acciones, σ_k^2, depende de la política de dividendos y los impuestos sobre ingresos corporativos y sobre rendimientos por la tenencia de bonos. Para encontrar las tasas de rendimiento de equilibrio de los saldos monetarios y bonos en términos reales, es necesario sustituir las expresiones anteriores en los rendimientos dados en [7] y [8], respectivamente, de tal forma que el rendimiento de los saldos reales está dado por

$$r_m^* = -\pi + \sigma_M^2 + \gamma^2 \left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) - 2\gamma\sigma_{My} \qquad [62]$$

Observe también que la siguiente identidad es válida en todo tiempo t,

$$N_{k,t} = 1 - \frac{(1+k)\delta}{i\left(1-\tau_y\right)(1+\theta)}$$

Después de sustituir el valor óptimo de la proporción de la riqueza asignada a la tenencia de títulos de capital, se obtiene la tasa de interés de equilibrio, es decir,

$$i^* = \frac{(1+k)\delta}{\left(1-\tau_y\right)(1+\theta)\left(1-\hat{N}_{k,t}\left(i^*\right)\right)} \qquad [63]$$

De esta forma, la ecuación anterior determina el valor de equilibrio de la tasa de interés nominal implícitamente. Por tanto, el rendimiento de los bonos está dado por

$$r_b^* = i^*\left(1-\tau_y\right) - \pi + \sigma_M^2 + \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) - 2\gamma\sigma_{My} \qquad [64]$$

En este caso, la tasa r_k está dada por la ecuación [35]. Finalmente, de la ecuación [51], se sigue que

$$\frac{c_t}{k_t} = \frac{\theta\delta}{(1+\tau_c)(1+\theta)\left[1 - \frac{(1+k)\delta}{i^*(1-\tau_y)(1+\theta)}\right]} \qquad [65]$$

lo que conjuntamente con la ecuación [47], conduce a la tasa esperada de crecimiento del capital

$$\psi = \gamma\left[1 - \frac{\theta\delta}{\gamma(1+\tau_c)(1+\theta)\left[1 - \frac{(1+k)\delta}{i^*(1-\tau_y)(1+\theta)}\right]} - \bar{g}\right]$$

CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un modelo de equilibrio macroeconómico en un ambiente estocástico. Las variables exógenas incluyen los parámetros de política económica (crecimiento monetario, μ; gasto público, $\bar{g}$; política de deuda, f; y las tasas de impuesto τ_y, τ_c y τ_P). De igual forma, los procesos estocásticos exógenos son los respectivos al crecimiento monetario, $\mathrm{d}W_{M,t}$, el gasto público, $\mathrm{d}W_{g,t}$, y la producción, $\mathrm{d}W_{y,t}$. El resto de los procesos estocásticos son endógenos y pueden ser expresados como funciones simples de los choques exógenos. Asimismo, se determinó el equilibrio macroeconómico en donde las varianzas de los choques exógenos, tanto para difusiones como para saltos, desempeñan un papel importante en la administración de riesgos.

El modelo presentado puede ser extendido al caso de una economía abierta y pequeña con ajustes menores suponiendo que el precio de la economía nacional, P_t, satisface la condición de poder de paridad de compra $P_t = P_t^* E_t$, en donde P_t^* es el precio (en dólares) de los bienes en el resto del mundo y E_t es el tipo de cambio. Por simplicidad, se supone que $P_t^* \equiv 1$, entonces el nivel general de precios, P_t, es igual al tipo de cambio, E_t. De esta manera $\mathrm{d}P_t/P_t = \mathrm{d}E_t/E_t$ y la tasa de depreciación del tipo de cambio tendría el comportamiento estocástico definido en [1]. Por otro lado, si se incluyen bonos internacionalmente comerciables denominados en moneda extranjera B_t^* o en términos reales, $b_t^* = E_t B_t^*/P_t$, la riqueza del individuo estaría dada por $a_t = m_t + b_t + b_t^* + k_t$ y el portafolio de inversión contemplaría la tenencia de bonos internacionales, los cuales estarían en poder tanto de los particulares como del sector público. Lo anterior requiere modificaciones en las restricciones presupuestales tanto de los consumidores como del gobierno, así como consideraciones sustanciales en la balanza de pagos de las cuentas nacionales. En este caso, las complicaciones técnicas serían mayores.

Por último, es importante mencionar que el trabajo se puede extender para analizar el impacto de choques externos en el bienestar económico, o función de utilidad indirecta, de los consumidores.

APÉNDICE A

Para resolver un problema de control estocástico del tipo:

$$\max_{\bar{u}} \mathrm{E}\left\{ \int_0^\infty F(x, \bar{u}) e^{-\delta t} \mathrm{d}t \right\} \qquad [A.1]$$

donde $\bar{u}$ es un vector de controles y x es una variable de estado, sujeto a

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W + \nu \mathrm{d}Q \qquad [A.2]$$

donde $\mathrm{d}W$ y $\mathrm{d}Q$ son procesos de Wiener y de Poisson, respectivamente, se utiliza la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) de la programación dinámica continua:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\bar{u}} \Big\{ & F(x,\bar{u}) - \delta V(x) + xV'(x)\mu \\ & + \frac{1}{2} x^2 \sigma V''(x) + \lambda \Big[V\big(x(1+v)\big) - V(x) \Big] \Big\} \end{aligned} \quad \text{[A.3]}$$

donde

$$V(x)e^{-\delta t} = \sup_{\bar{u}} \left\{ \int_t^{\infty} F(x,\bar{u}) e^{-\delta s} \mathrm{d}s \right\}$$

En el modelo planteado se desea resolver

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} V_0 = \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^{\infty} \Big[\theta \log(c_t) + \log\big(N_{m,t} a_t\big) \Big] e^{-\delta t} \mathrm{d}t \right\} \quad \text{[A.4]}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = & \left[N_{m,t}\, r_m + N_{b,t}\, r_b + N_{k,t}\, r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ & + \Big[N_{k,t}\, \sigma_k \mathrm{d}W_t - \big(N_{m,t} + N_{b,t} \big) \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} \Big] \end{aligned} \quad \text{[A.5]}$$

y

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1 \quad \text{[A.6]}$$

donde i, π, τ_c, τ_y y $\overline{\tau}$, junto con las varianzas y covarianzas correspondientes, se toman como dadas. En este caso, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B), [A.3], conduce a

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H\left(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t\right) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Big\{\theta \log\left(c_t\right) + \log\left(N_{m,t}\, a_t\right) - \delta V\left(a_t\right) \\
&+ a_t V'\left(a_t\right)\left[N_{m,t}\, r_m + N_{b,t}\, r_b + N_{k,t}\, r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau}\right] \\
&+ \tfrac{1}{2} a_t^2 V''\left(a_t\right)\Big[\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&-2\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right) N_{k,t}\sigma_{Pk} + 2\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\sigma_{Pt} - 2N_{k,t}\sigma_{kt}\Big]\Big\} \\
&+\lambda_P\left(V\left(a_t\left[1-\left(N_{m,t} + N_{b,t}\right)\frac{V_P}{1+V_P}\right]\right) - V\left(a_t\right)\right) \\
&+\lambda_k\left[V\left(a_t\left(1+N_{k,t} v_k\right)\right) - V\left(a_t\right)\right]\lambda_\tau\left[V\left(a_t\left(1+v_\tau\right)\right) - V\left(a_t\right)\right] \\
&+\phi\left(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}\right) = 0
\end{aligned}
\qquad [A.7]
$$

Esta condición evaluada en el máximo es una ecuación diferencial (determinista) de segundo orden en $V(a_t)$. Para resolver esta ecuación diferencial, se postula $V(a_t)$ de la forma $V(a_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(a_t)$. Consecuentemente, las dos primeras derivadas son:

$$
V'\left(a_t\right) = \frac{\beta_1}{a_t} \quad \text{y} \quad V''\left(a_t\right) = -\frac{\beta_1}{a_t^2} \qquad [A.8]
$$

Después de sustituir estas expresiones en la condición H-J-B, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H\left(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t\right) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \left\{\theta \log\left(c_t\right) + \log\left(N_{m,t}\, a_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1 \log\left(a_t\right)\right]\right. \\
&+\beta_1\left[N_{m,t}\left(-\pi+\sigma_P^2\right) + N_{b,t}\left(i\left(1-\tau_y\right) - \pi + \sigma_P^2\right) + N_{k,t} r_k - \frac{c_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t} - \overline{\tau}\right] \\
&-\tfrac{1}{2}\beta_1\Big[\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)^2 \sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&\left.-2\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{Pt} - 2N_{k,t}\sigma_{kt}\Big]\right\} \qquad \text{[A.9]} \\
&+\beta_1\left[\lambda_P\left[\log\left(1-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\frac{V_P}{1+V_P}\right)\right] + \lambda_k\left[\log\left(1+N_{k,t} v_k\right)\right]\right. \\
&\left.+\lambda_\tau\left[\log\left(1+v_\tau\right)\right]\right] + \phi\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}-N_{k,t}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Las condiciones de primer orden (necesarias) para una solución interior son:

$$
\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_{m,t}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_{b,t}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_{k,t}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \qquad \text{[A.10]}
$$

Estas condiciones conducen en forma inmediata a las ecuaciones:

$$
0 = \frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{\theta}{c_t} - \frac{\beta_1\left(1+\tau_c\right)}{a_t} \qquad \text{[A.11]}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial H}{\partial N_{m,t}} = \frac{1}{N_{m,t}} + \beta_1\Bigg[& r_{m,t} - \left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} \\
& -\sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P V_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right) v_P}\Bigg] - \phi
\end{aligned} \qquad \text{[A.12]}
$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial N_{b,t}}=\beta_1\Big[r_b-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_P^2+N_{k,t}\sigma_{Pk} \qquad [A.13]$$

$$-\sigma_{P\tau}-\frac{\lambda_P V_P}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)v_P}\Big]-\phi$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial N_{k,t}}=\beta_1\Big[r_k-N_{k,t}\sigma_k^2+\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{Pk}$$

$$+\sigma_{k\tau}+\frac{\lambda_k V_k}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)v_k}\Big]-\phi \qquad [A.14]$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial \phi}=1-\left(N_{m,t}+N_{b,t}+N_{k,t}\right) \qquad [A.15]$$

Las cuales coinciden con [13]-[16].

APÉNDICE B

Si se sustituyen los valores óptimos de $\hat{c}_t$, $\hat{N}_{m,t}$, $\hat{N}_b$ y $\hat{N}_{k,t}$ en la condición H-J-B, se obtiene

$$\Bigg\{\theta\log\left(\frac{\theta}{\beta_1\left(1+\tau_c\right)}a_t\right)+\log\left(\frac{a_t}{\bar{i}\left(1-\tau_y\right)\beta_1}\right)-\delta\left[\beta_1\log\left(a_t\right)+\beta_o\right]$$

$$+\beta_1\left[\hat{N}_{m,t}\left(-\pi+\sigma_P^2\right)+\hat{N}_{b,\,t}\left(\bar{i}\left(1-\tau_y\right)-\pi+\sigma_P^2\right)+\hat{N}_{k,t}r_k-\frac{\hat{c}_t\left(1-\tau_c\right)}{a_t}-\bar{\tau}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\beta_1\Big[\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)^2\sigma_P^2+\hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2 \qquad [B.1]$$

$$-2\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk}+2\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\sigma_{Pt}-2\hat{N}_{k,t}\sigma_{kt}\Big]\Bigg\}$$

$$+\beta_1\left[\lambda_P\left[\log\left(1-\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\frac{V_P}{1+V_P}\right)\right]+\lambda_k\left[\log\left(1+\hat{N}_{k,t}v_k\right)\right]\right.$$
$$\left.+\lambda_\tau\left[\log\left(1+v_\tau\right)\right]\right]+\phi\left(1-\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{b,t}-\hat{N}_{k,t}\right)=0$$

Lo anterior toma la forma:

$$\begin{aligned}0=&\Big\{\left(1+\theta-\delta\beta_1\right)\log\left(a_t\right)+\theta\Big(\log\left(\theta\right)-\log\left(\beta_1\left(1+\tau_c\right)\right)\\&-\log\left(\beta_1\bar{i}\left[1-\tau_y\right]\right)\Big)-\delta\beta_0+\beta_1\Big[\hat{N}_{m,t}\left(-\pi+\sigma_P^2\right)+\hat{N}_{b,t}\left(\bar{i}\left(1-\tau_y\right)-\pi+\sigma_P^2\right)\\&+\hat{N}_{k,t}r_k-\frac{\hat{c}_t\left(1+\tau_c\right)}{a_t}-\bar{\tau}\Big]-\tfrac{1}{2}\beta_1\Big[\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)^2\sigma_P^2+\hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2\\&-2\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\hat{N}_{k,t}\sigma_{pk}+2\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\sigma_{P\tau}-2\hat{N}_{k,t}\sigma_{kt}\Big]\Big\}\\&+\beta_1\left[\lambda_P\left[\log\left(1-\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\frac{v_P}{1+v_P}\right)\right]+\lambda_k\left[\log\left(1+\hat{N}_{k,t}v_k\right)\right]\right.\\&\left.+\lambda_\tau\left[\log\left(1+v_\tau\right)\right]\right]+\phi\left(1-\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{b,t}-\hat{N}_{k,t}\right)\end{aligned} \qquad [B.3]$$

lo cual implica que

$$1+\theta-\beta_1\delta=0$$

Por tanto,

$$\beta_1=\frac{\left(1+\theta\right)}{\delta} \qquad [B.4]$$

y

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{\theta}{\delta}\log(\theta) - \frac{1}{\delta}\log\left[i\left(1-\tau_y\right)(1+\theta)\right] - \frac{\theta}{\delta}\log\left[(1+\theta)(1+\tau_c)\right] \\
&+ \frac{(1+\theta)}{\delta}\log(\delta) - \frac{\theta}{\delta} + \frac{(1-\theta)}{\delta^2}\Big[\hat{N}_{m,t}\left(-\pi+\sigma_P^2\right) + \hat{N}_{b,t}\left(\overline{i}\left(1-\tau_y\right)-\pi+\sigma_P^2\right) \\
&+ \hat{N}_{k,t} r_k - \overline{\tau}\Big] - \tfrac{1}{2}\frac{(1+\theta)}{\delta^2}\Big[\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)^2\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} + 2\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{K\tau}\Big] \\
&+ \frac{(1+\theta)}{\delta^2}\left[\lambda_P\left[\log\left(1-\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\frac{v_P}{1+v_P}\right)\right] + \lambda_k\left[\log\left(1+\hat{N}_{k,t}v_k\right)\right]\right. \\
&\left. + \lambda_\tau\left[\log\left(1+v_\tau\right)\right]\right]
\end{aligned}
\qquad [B.5]
$$

APÉNDICE C

Derivaciones y demostraciones de los resultados analíticos

Derivación de la ecuación [7]

El lema de Itô extiende la diferencial de una función del proceso subyacente hasta el segundo orden a fin de conservar términos en $\mathrm{d}t$. En el caso del proceso de Poisson, la diferencial incluye el salto en $f(P_t)$ inducido por el salto en P_t.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(P_t) &= \left(\frac{\partial f(P_t)}{\partial P_t}\mu_P P_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(P_t)}{\partial P_t^2}\sigma_P^2 P_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f(P_t)}{\partial P_t}\sigma_P P\,\mathrm{d}W_{P,t} \\
&\quad + \left[f\left(P_t(1+v_p)\right) - f(P_t)\right]\mathrm{d}Q_{P,t}
\end{aligned}
\qquad [C.1]
$$

Si se denota $f(P_t) = 1/P_t$, entonces

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right)=\frac{1}{P_t}\left[\left(-\pi+\sigma_P^2\right)\mathrm{d}t-\sigma_P\mathrm{d}W_{P,t}+\left(\frac{1}{1+\nu_P}-1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}\right] \quad \text{[C.2]}$$

Si se divide [C.2] entre $1/P_t$, el resultado coincide con la ecuación [7].

Derivación de la ecuación [18]

Para obtener la ecuación [18] basta restar la ecuación [15] de la [16], de tal manera que

$$\begin{aligned}0=\frac{(1+\theta)}{\delta}\Bigg[& r_b-\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\sigma_P^2+\hat{N}_{k,t}\,\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}-\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\left(1-\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\nu_P}\\ & -r_k+\hat{N}_{k,t}\sigma_k^2-\left(\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_{Pk}-\sigma_{k\tau}-\frac{\lambda_k\nu_k}{1+\left(1-\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{b,t}\right)\nu_k}\Bigg]\end{aligned} \quad \text{[C.3]}$$

Si se utiliza la ecuación [12] dada por

$$N_{m,t}+N_{b,t}+N_{k,t}=1$$

entonces la ecuación [C.3] toma la forma

$$\begin{aligned}0=\frac{(1+\theta)}{\delta}\Bigg[& r_b-\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_P^2+\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}-\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_P}\\ & -r_k+\hat{N}_{k,t}\sigma_k^2-\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_{Pk}-\sigma_{k\tau}-\frac{\lambda_k\nu_k}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_k}\Bigg]\end{aligned} \quad \text{[C.4]}$$

A partir de la cual se obtiene

$$0=-\frac{(1+\theta)}{\delta}\left[r_k-r_b+\sigma_P^2+\sigma_{Pk}+\sigma_{P\tau}+\sigma_{k\tau}\right]+\beta_1\hat{N}_{k,t}\left[\sigma_P^2+2\sigma_{Pk}+\sigma_k^2\right]$$
$$-\frac{(1+\theta)}{\delta}\left[\frac{\lambda_P v_P}{1+\hat{N}_{k,t}v_P}+\frac{\lambda_k v_k}{1+\hat{N}_{k,t}v_k}\right] \qquad \text{[C.5]}$$

Si ahora se denotan

$$B\equiv\sigma_p^2+2\sigma_{Pk}+\sigma_k^2>0 \qquad \text{[22]}$$

y

$$A\equiv r_k-r_b+\sigma_P^2+\sigma_{Pk}+\sigma_{P\tau}+\sigma_{k\tau} \qquad \text{[23]}$$

la ecuación [C.5] se transforma en

$$\frac{(1+\theta)}{\delta}\left[\hat{N}_{k,t}B-A-\frac{\lambda_P v_P}{1+\hat{N}_{k,t}v_P}-\frac{\lambda_k v_k}{1+\hat{N}_{k,t}v_k}\right]=0 \qquad \text{[18]}$$

Derivación de la ecuación [25]

Observe que la condición de primer orden [13] se puede escribir como

$$u'(c_t)=\frac{(1+\theta)(1+\tau_c)}{\delta a_t} \qquad \text{[C.6]}$$

Por otro lado, se tiene que

$$v\left(m_t\right)=\log\left(\hat{N}_{m,t}a_t\right) \qquad \text{[C.7]}$$

Dado que $m_t = M_t / P_t$ y $N_{m,t} = m_t / a_t$, si se deriva [C.7], se obtiene

$$a_t v'\left(m_t\right)=\frac{1}{\hat{N}_{m,t}} \qquad \text{[C.8]}$$

entonces

$$\frac{v'\left(m_t\right)}{u'\left(c_t\right)}=\frac{\delta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)\hat{N}_{m,t}} \qquad \text{[C.9]}$$

Por último, la ecuación [25] se obtiene de manera inmediata al sustituir el valor óptimo de $N_{m,t}$;

$$\frac{v'\left(m_t\right)}{u'\left(c_t\right)}=\frac{i\left(1-\tau_y\right)}{\left(1+\tau_c\right)}>0 \qquad \text{[25]}$$

Derivación de la ecuación [26]

La ecuación [26] se deriva de manera automática de la ecuación [14] que se reescribe de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{N}_{m,t}}=-\frac{\left(1+\theta\right)}{\delta}\Bigg[& r_m-\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\sigma_P^2+N_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau} \\ & -\frac{\lambda_P v_P}{1+\left(1-\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{b,t}\right)v_P}-\frac{\phi\delta}{1+\theta}\Bigg]\end{aligned} \qquad \text{[C.10]}$$

Si se sustituye el valor de β_1 en la ecuación [C.10], se sigue que

$$\frac{1}{\hat{N}_{m,t}} = \frac{(1+\theta)}{\delta}\left[-r_m + \left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_P^2 - \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \frac{\lambda_P v_P}{1+\hat{N}_{k,t}v_P} + \frac{\phi\delta}{(1+\theta)}\right] \quad \text{[C.11]}$$

y

$$\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} = \frac{\delta}{(1+\theta)(1+\tau_c)\hat{N}_{m,t}} = \frac{1}{(1+\tau_c)}\left[-r_m + \left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_P^2 - \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \frac{\lambda_P v_P}{1+\hat{N}_{k,t}v_p} + \frac{\phi\delta}{(1+\theta)}\right] \quad \text{[C.12]}$$

Si se sustituye ahora el valor de r_m, se llega a la expresión

$$\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)}(1+\tau_c) = \pi - N_{k,t}\left(\sigma_P^2 + \sigma_{Pk}\right) + \sigma_{P\tau} + \frac{\lambda_P v_P}{1+\hat{N}_{k,t}v_P} + \frac{\delta\phi}{1+\theta} \quad \text{[26]}$$

Derivación de la ecuación [31]

Para la derivación de la ecuación [31], se necesitan las ecuaciones

$$\mathrm{d}k_t = N\mathrm{d}u_t \quad \text{[29]}$$

y

$$\left(1-\tau_P\right)\mathrm{d}y_t = \mathrm{d}v_t + \mathrm{d}k_t \qquad [30]$$

Después de sustituir la ecuación [29] en [30], se tiene que

$$N\mathrm{d}u_t = \left(1-\tau_p\right)\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}v_t \qquad [C.13]$$

esto es

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{u_t} = \frac{\left(1-\tau_p\right)\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}v_t}{Nu_t} \qquad [C.14]$$

pero $Nu_t = k_t$ entonces

$$\frac{du_t}{u_t} = \frac{\left(1-\tau_p\right)\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}v_t}{k_t} \qquad [31]$$

Derivación de la ecuación [42]

Para la obtención de dicha ecuación se aplica la función logaritmo en ambas partes,

$$\log B_t - \log M_t = \log k \qquad [C.15]$$

Si se deriva la ecuación [C.15], se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} \qquad [41]$$

Derivación de la ecuación [50]

Si se utiliza el lema de Itô en la obtención de la ecuación [50], se tiene que si

$$P_t = \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \frac{M_t}{k_t} \qquad [49]$$

entonces la diferencial $\mathrm{d}P_t$ satisface

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P_t = \Bigg[& \frac{\partial f\left(M_t, k_t\right)}{\partial M_t} \mathrm{d}M_t + \frac{\partial f\left(M_t, k_t\right)}{\partial k_t} \mathrm{d}k_t + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 f\left(M_t, k_t\right)}{\partial M_t^2} \left(\mathrm{d}M_t\right)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f\left(M_t, k_t\right)}{\partial M_t \partial k_t} \mathrm{d}M_t \mathrm{d}k_t + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 f\left(M_t, k_t\right)}{\partial k_t^2} \left(\mathrm{d}k_t\right)^2 \Bigg] \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}}\end{aligned} \qquad [C.16]$$

donde $f\left(M_t, k_t\right) = M_t / k_t$ y se sigue que

$$\mathrm{d}P_t = \left[\frac{1}{k_t} \mathrm{d}M_t - \frac{M_t}{k_t^2} \mathrm{d}k_t - \frac{1}{k_t^2} \mathrm{d}M_t \mathrm{d}k_t + \frac{M_t}{k_t^3} \mathrm{d}k_t^2 \right] \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \qquad [C.17]$$

Al factorizar $1/k_t$, resulta

$$\mathrm{d}P_t = \left[\frac{1}{k_t} \left(\mathrm{d}M_t - M_t \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \mathrm{d}M_t \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} + M_t \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} \right)^2 \right) \right] \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \qquad [C.18]$$

entonces

$$\mathrm{d}P_t = \left[\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} \right) \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} \right) + \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} \right)^2 \right] \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \frac{M_t}{k_t} \qquad [C.19]$$

así, de manera inmediata, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2 \qquad [50]$$

Derivación de la ecuación [52]

Si se sustituyen las siguientes ecuaciones

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}W_{P,t} + v_P P_t \mathrm{d}Q_{P,t} \qquad [1]$$

$$\mathrm{d}M_t = \mu M_t \mathrm{d}t + \sigma_M M_t \mathrm{d}W_{M,t} + v_M M_t \mathrm{d}Q_{M,t} \qquad [40]$$

$$\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} = \left[\gamma(1-\overline{g}) - \frac{\delta\theta}{(1+\theta)(1+\tau_c)N_{k,t}}\right]\mathrm{d}t + \gamma\left(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}\right)$$
$$+\gamma\left(v_y \mathrm{d}Q_{y,t} - v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right) \qquad [46]$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2\right] = \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) + \gamma^2\left(v_y^2\lambda_y + v_g^2\lambda_g\right) \qquad [48]$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right) = \gamma\sigma_{My}\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{C}.20]$$

en la ecuación [50], resulta

$$\begin{aligned}\pi \mathrm{d}t+\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}+v_P \mathrm{d}Q_{P,t} &= \mu \mathrm{d}t+\sigma_M \mathrm{d}W_{M,t}+v_M \mathrm{d}Q_{M,t}\\ &-\left[\gamma\left(1-\bar{g}\right)-\frac{\delta\theta}{\left(1+\theta\right)\left(1+\tau_c\right)N_{k,t}}\right]\mathrm{d}t\\ &-\gamma\left(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}-\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}\right)-\gamma\left(v_y \mathrm{d}Q_{y,t}-v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right)\\ &-\gamma\sigma_{My}\mathrm{d}t+\gamma^2\left(\sigma_y^2+\sigma_g^2\right)\mathrm{d}t+\gamma^2\left(v_y^2\lambda_y+v_g^2\lambda_g\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad [C.21]$$

Al sustituir

$$\frac{\delta\theta}{\left(1-\theta\right)\left(1+\tau_c\right)N_{k,t}}=\frac{c_t}{k_t} \qquad [51]$$

en la expresión anterior, se llega a la ecuación [52].

Derivación de la ecuación [57]

Si se sustituyen las ecuaciones [39], [40], [41] en [38], se tiene que

$$\begin{aligned}&\bar{g}\gamma k_t \mathrm{d}t+\gamma k_t\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}+\gamma k_t v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\\ &-\left(\mathrm{d}\tau_{1,t}+\mathrm{d}\tau_{2,t}\right)+m_t \mathrm{d}R_{m,t}+b_t \mathrm{d}R_{b,t}=\mathrm{d}m_t+\mathrm{d}b_t\end{aligned} \qquad [C.22]$$

Al factorizar $1/a_t$, se obtiene que

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma k_t}{a_t}\left(\bar{g}\mathrm{d}t+\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}+v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right)\\ &-\frac{\left(\mathrm{d}\tau_{1,t}+\mathrm{d}\tau_{2,t}\right)}{a_t}+\frac{m_t}{a_t}\mathrm{d}R_{m,t}+\frac{b_t}{a_t}\mathrm{d}R_{b,t}=\frac{\mathrm{d}m_t}{a_t}+\frac{\mathrm{d}b_t}{a_t}\end{aligned} \qquad [C.23]$$

Al recordar la definición $N_{j,t} = m_t / a_t$ para $j = m, b, k$, la ecuación [C.23] toma la forma

$$\frac{\gamma k_t}{a_t}\left(\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} + v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right) - \frac{\left(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t}\right)}{a_t}$$

$$+\hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\frac{M_t}{P_t}}{\frac{M_t}{P_t}a_t} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{B_t}{P_t}\right)\frac{B_t}{P_t}}{\frac{B_t}{P_t}a_t} \qquad [C.24]$$

lo cual resulta en la ecuación

$$\hat{N}_{m,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}} + \hat{N}_{b,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{B_t}{P_t}\right)}{\frac{B_t}{P_t}} = \frac{\gamma k_t}{a_t}\left[\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} + v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right]$$

$$-\frac{\left(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t}\right)}{a_t} + \hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} \qquad [56]$$

Si se utiliza la ecuación [41] para expresar todo en términos de M_t, se produce

$$\left(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}} = \frac{\gamma k_t}{a_t}\left[\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g \mathrm{d}w_{g,t} + v_g \mathrm{d}Q_{g,t}\right]$$

$$-\frac{\left(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t}\right)}{a_t} + \hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} \qquad [57]$$

Derivación de las ecuaciones [58], [59] y [60]

Para obtener la diferencial $\mathrm{d}f\left(M_t,P_t\right)=\mathrm{d}\left(\dfrac{M_t}{P_t}\right)$ se utiliza el lema de Itô

$$\mathrm{d}f\left(M_t,P_t\right)=\left[\frac{\partial f\left(M_t,P_t\right)}{\partial M_t}\mathrm{d}M_\mathrm{t}+\frac{\partial f\left(M_t,P_t\right)}{\partial P_t}\mathrm{dP}_\mathrm{t}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f\left(M_t,P_t\right)}{\partial M_t^2}\left(\mathrm{d}M_\mathrm{t}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f\left(M_t,P_t\right)}{\partial M_t\partial P_t}\mathrm{d}M_\mathrm{t}\mathrm{d}P_t+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f\left(M_t,P_t\right)}{\partial P_t^2}\left(\mathrm{dP}_\mathrm{t}\right)^2\right] \qquad \text{[C.25]}$$

de tal suerte que

$$\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)=\left[\frac{1}{P_t}\mathrm{d}M_t-\frac{M_t}{P_t^2}\mathrm{d}P_t-\frac{1}{P_t^2}\mathrm{d}M_t\mathrm{d}P_t+\frac{M_t}{P_t^3}\mathrm{d}P_t^2\right] \qquad \text{[C.26]}$$

Si en la expresión anterior se factoriza M_t/P_t, se obtiene

$$\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)=\left[\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}-\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}-\left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right)^2\right]\frac{M_t}{P_t} \qquad \text{[C.27]}$$

Si se sustituyen las ecuaciones [1] y [40] en la expresión anterior, se sigue que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{M_t}{P_t}\right)}{\dfrac{M_t}{P_t}}=\left(\mu-\pi-\sigma_{MP}+\sigma_P^2\right)\mathrm{d}t+\sigma_M\mathrm{d}W_{M,t}-\sigma_P\mathrm{d}W_{P,t} \qquad \text{[C.28]}$$
$$+v_M\mathrm{d}Q_{M,t}-\frac{v_P}{\left(1+v_P\right)}\mathrm{d}Q_{P,t}$$

Por último, se sustituyen en la ecuación [57] las funciones de impuestos $\mathrm{d}\tau_{1,t}$, dada en [43], $\mathrm{d}\tau_{2,t}$, definida en [44], y la ecuación [C.28] para obtener las ecuaciones [58], [59] y [60].

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^* &= \gamma\hat{N}_{k,t}\overline{g} - \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\mu + \hat{N}_{b,t}i\left(1 - 2\tau_y\right) \\ &-\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_p\right) + \tau_p\right]\gamma\hat{N}_{k,t} + \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\left(\sigma_{MP} - v^2\lambda_P\right) - \tau_c\frac{c_t}{a_t}\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} &= -\left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} + \gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} \\ &-\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_p\right) + \tau_p\right]\gamma N_{k,t}\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}\end{aligned} \tag{59}$$

y

$$\begin{aligned}v_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} &= -\left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]v_M dQ_{M,t} + \gamma\hat{N}_{k,t}v_g dQ_{g,t} \\ &-\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_p\right) + \tau_p\right]\hat{N}_{k,t}v_y dQ_{y,t}\end{aligned} \tag{60}$$

Derivación de la ecuación [61]

Para la derivación de las varianzas se necesitan las ecuaciones [54], [36] y [59],

$$\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} = \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} - \gamma\left(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}\right) \tag{54}$$

$$\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} = \left(1-\tau_p\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} &= \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} + \gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} \\ &-\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_p\right) + \tau_p\right]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}\end{aligned} \tag{59}$$

Si se eleva al cuadrado la ecuación [54], se sigue que

$$\sigma_P^2 = \sigma_M^2 + \gamma^2 \left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2 \right) - 2\gamma\sigma_{My}$$

Para la varianza σ_k^2 se requiere elevar al cuadrado la ecuación [36],

$$\sigma_k^2 = \left(1 - \tau_p\right)^2 \left(1 - \alpha\tau_y\right)^2 \gamma^2 \sigma_y^2$$

Para la varianza σ_p^2, ésta es obtenida al elevar al cuadrado la ecuación [59],

$$\begin{aligned}\sigma_\tau^2 = {} & \left(1 - \hat{N}_{k,t}\right)^2 \sigma_M^2 + \gamma^2 \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_g^2 + \left[\alpha\tau_y \left(1 - \tau_p\right) + \tau_p\right]^2 \gamma^2 \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_y^2 \\ & + 2\left(1 - \hat{N}_{k,t}\right)\left[\alpha\tau_y \left(1 - \tau_p\right) + \tau_p\right] \gamma \hat{N}_{k,t} \sigma_{My}\end{aligned}$$

Ahora para las covarianzas es necesario multiplicar las ecuaciones [54], [36] y [59], así de manera inmediata la covarianza σ_{Pk} se obtiene del producto de las ecuaciones [54] y [36]

$$\sigma_{Pk} = \left(1 - \tau_p\right)\left(1 - \alpha\tau_y\right)\gamma\left(\sigma_{My} - \gamma\sigma_y^2\right)$$

luego al igual que la covarianza anterior, $\sigma_{P\tau}$ se obtiene del producto de la ecuaciones[54] y [59]

$$\begin{aligned}\sigma_{P\tau} = {} & -\left(1 - \hat{N}_{k,t}\right)\sigma_M^2 - \left[\alpha\tau_y \left(1 - \tau_p\right) + \tau_p\right] \gamma \hat{N}_{k,t} \sigma_{My} \\ & + \left(1 - \hat{N}_{k,t}\right)\gamma\sigma_{My} + \left[\alpha\tau_y \left(1 - \tau_p\right) + \tau_p\right] \gamma^2 \hat{N}_{k,t} \sigma_y^2 + \gamma^2 \hat{N}_{k,t} \sigma_g^2\end{aligned}$$

Por último, la última covarianza, $\sigma_{k\tau}$, es obtenida de las ecuaciones [36] y [59]

$$\sigma_{k,t} = -\left(1-\tau_p\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\gamma\sigma_{My}$$
$$-\left[\alpha\tau_y\left(1-\tau_p\right)+\tau_p\right]\left(1-\tau_p\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_y^2$$

Derivación de la ecuación [63]

Recuerde que

$$N_{k,t} = 1-\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right) \qquad [C.29]$$

Al sustituir las definiciones $N_{j,t}$, $j = m, b, k,$ en la expresión anterior, se sigue que

$$N_{k,t} = 1-\left(\frac{M_t/P_t}{a_t}+\frac{B_t/P_t}{a_t}\right) = 1-\frac{M_t/P_t}{a_t}\left(1+k\right) = 1-N_{m,t}\left(1+k\right) \qquad [C.30]$$

Al sustituir el valor de $\hat{N}_{m,t}$ en [C.32], se obtiene

$$\hat{N}_{k,t} = 1-\frac{\left(1+k\right)\delta}{i\left(1-\tau_y\right)\left(1-\theta\right)} \qquad [C.31]$$

Después de despejar i de la expresión anterior, se produce finalmente la ecuación [63].

BIBLIOGRAFÍA

Giulano, P. y S.J. Turnovsky, "Intertemporal substitution risk aversion and economic performance in a stochastically growing economy", *Journal of International Money and Finance*, vol. 22, núm. 4, 2003, pp. 529-556.

Turnovsky, S. J., "Macroeconomic policies, growth, and welfare in a stochastic economy", *International Economic Review*, vol. 34 , núm. 4 , 1993, pp. 953-981.

———, "On the role of government in a stochastically growing economy", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 23, núm. 5-6, 1999, pp. 873-908.

Turnovsky, S.J. y W.T. Smith, "Equilibrium consumption and precautionary savings in a stochastically growing economy", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 30, núm. 2, 2006, pp. 243-278.

Venegas-Martínez, F., "Temporary stabilization: a stochastic analysis", *Journal of Economics Dynamics and Control*, vol. 25, núm. 9, 2001, pp. 1429-1449.

———, "Bayesian inference, prior information on volatility, and option pricing: a maximum entropy approach", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 8, núm.1, 2005, pp. 1-12.

———, "Stochastic temporary stabilization: undiversifiable devaluationand income risks", *Economic Modelling*, vol. 23, núm. 1, 2006a, pp. 157-173.

———, "Fiscal policy in a stochastic temporary stabilization model: undiversifiable devaluation risk", *Journal of World Economic Review*, vol. 1, núm. 1, 2006b, pp. 87-106.

———, *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Estados Unidos, International Thomson Editors, 2006c.

———, "Temporary stabilization in developing countries and the real option of waiting, when consumption can be delayed", *International Journal of Economic Research*, vol. 7, 2008, forthcoming.