investigación económica, vol. LXIX, 271, enero-marzo de 2010, pp. 43-80

Valuación de opciones sobre índices bursátiles y determinación de la estructura de plazos de la tasa de interés en un modelo de equilibrio general

Gerardo Ángeles Castro
Francisco Venegas-Martínez*

Introducción

Mucho se ha aprendido en los últimos años sobre el uso (para cobertura) y el abuso (para especulación) de los productos derivados financieros, sobre todo de los que tienen como subyacentes índices bursátiles, pero mucho queda todavía por aprender sobre sus efectos en las economías en los ámbitos local y global. Evidentemente, los mercados de derivados no originaron la crisis de 2008, sólo la exacerbaron al generar una burbuja especulativa. El origen de la crisis se debe ubicar en la recesión estadounidense y el impacto de ésta, en un entorno de globalización, sobre el resto de la economía mundial. De la misma manera, la reacción que tuvieron los mercados de instrumentos de deuda ante la crisis financiera de finales de 2008 y principios de 2009 poco tuvo que ver con la predicción, de muchos modelos económicos disponibles, sobre su comportamiento. Por todo esto es necesario contar con un modelo de equilibrio general que permita valuar derivados sobre índices

Manuscrito recibido en agosto de 2009; aceptado en noviembre de 2009.

* Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional (IPN), <gangeles@ipn.mx> y <fvenegas1111@yahoo.com.mx>, respectivamente. Los autores agradecen los valiosos cometarios de dos dictaminadores anónimos.

bursátiles y determinar de manera conjunta la estructura de plazos de la tasa de interés.

Existen en la literatura especializada varios modelos de equilibrio general que tienen como objetivo determinar los precios de los diferentes activos disponibles en la economía, por ejemplo: Cox *et al.* (1985a), Grinols y Turnovsky (1993), Schmedders (1998) y Venegas-Martínez (2001), (2006), (2008) y (2009), entre otros. Asimismo, se encuentran en la literatura diversas aproximaciones para modelar la dinámica de la tasa de interés corta (la tasa de interés instantánea), como por ejemplo: Cox *et al.* (1985b), Longstaff (1989), Venegas-Martínez y González-Aréchiga (2002) y Lee y Li (2005).

En el presente trabajo se desarrolla un modelo estocástico de equilibrio general en una economía poblada por consumidores-productores idénticos y competitivos que toman decisiones de producción, consumo y portafolio. Suponiendo que: 1) existe un índice bursátil que contiene al título de capital que emite la empresa representativa, 2) dicho índice es conducido por un movimiento geométrico browniano y 3) la tecnología es guiada por un proceso markoviano de difusión, entonces se determinan, en el equilibrio, el valor de una opción de compra sobre dicho índice y la estructura de plazos de la tasa de interés. Una de las características distintivas del modelo propuesto es que produce tasas cortas con dinámicas alternativas a las encontradas en Cox *et al.* (1985b). Asimismo, esta investigación generaliza el modelo de Longstaff (1989) sobre la dinámica de la tasa corta al considerar el comportamiento racional de los agentes. También se discute sobre las ventajas en la estimación de los parámetros de la curva de rendimiento obtenida. En particular, se muestra que los estimadores obtenidos de los parámetros son más simples de calcular que los propuestos en el caso de Cox *et al.* (1985b). Por último, se lleva a cabo una estimación de la estructura de plazos cuando la tasa corta es la tasa de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

En conclusión, el presente artículo persigue cuatro objetivos, el primero de ellos consiste en valuar una opción de compra sobre un índice bursátil que contiene al título de capital que emite la empresa representativa. El segundo es proporcionar dinámicas de la tasa corta alternativas a las obtenidas en Cox *et al.* (1985b). El tercer objetivo es generalizar el modelo de Longstaff

(1989) con la inclusión de consumidores-inversionistas maximizadores de utilidad. Por último, el cuarto consiste en determinar de manera endógena, en el equilibrio, una estructura de plazos de la tasa de interés asociada a un mercado de bonos cupón cero que se emiten a diferentes vencimientos y que se negocian a descuento.

Esta investigación se ha organizado de la siguiente manera. En la próxima sección se presentan los supuestos básicos que rigen a la economía en cuestión. En la sección 3 se describen los activos y sus precios. A través de la sección 4 se establece la restricción presupuestal del consumidor racional representativo. En la sección 5 se caracterizan las posibilidades de producción en la economía. En el transcurso de la sección 6 se plantea el problema de decisión del agente representativo. En la sección 7 se obtienen las condiciones de primer orden del problema del consumidor. En la sección 8 se caracteriza el precio de una opción de compra sobre un índice bursátil a través de la solución de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. En la sección 9 se deriva un proceso alternativo para la tasa corta de interés en el equilibrio y en la sección 10 se examina su dinámica. En el transcurso de la sección 11 se plantea el problema de valuación de un bono cupón cero. En la sección 12 se discute sobre la estimación de la curva de ceros. En la sección 13 se caracteriza el precio de un bono cupón cero, negociado a descuento, como la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica y de segundo orden con condiciones de frontera. En la sección 14 se define el tipo de expectativas que determinan la estructura de plazos de la tasa de interés. En el transcurso de la sección 15 se obtienen los estimadores de los parámetros asociados a la estructura de plazos. En la sección 16 se realiza una aplicación del modelo obtenido de tasa corta. Por último, en la sección 17 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

Supuestos básicos de la economía

Con el propósito de obtener soluciones analíticamente tratables, los supuestos de la economía se mantendrán lo más simples posible. Considere una economía poblada por individuos con gustos idénticos con vida infinita y que son maximizadores de utilidad. Los consumidores son a su vez productores. La economía produce y consume un solo bien genérico de carácter perecedero. Los consumidores tienen acceso a: 1) un activo subyacente (un índice bursátil que contiene al título de capital que emite la empresa representativa), 2) una opción europea de compra sobre dicho subyacente y 3) la participación con capital en el proceso productivo. Todos los precios de los activos están expresados en términos reales, es decir, en términos de unidades del bien de consumo. El valor del índice bursátil se determina asociando a cada punto de dicho índice un valor en términos de bienes. Por último, se supone que existe un mercado de bonos cupón cero a distintos vencimientos que se negocian a descuento y que tienen asociada una estructura de plazos de la tasa de interés, la cual se determinará de manera endógena en el equilibrio.

Activos y sus precios

Suponga que el valor en términos reales, S_t, de un índice bursátil que contiene al título de capital que emite la empresa representativa tiene una dinámica estocástica conducida por el movimiento geométrico browniano, de tal forma que

$$\mathrm{d}S_t = \mu_s S_t \mathrm{d}t + \sigma_s S_t \mathrm{d}U_t \qquad [1]$$

donde el parámetro de tendencia, μ_s, representa el rendimiento medio esperado, el parámetro de volatilidad, σ_s, es la variación instantánea del rendimiento del activo subyacente y el proceso $\{U_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega^U, \mathfrak{F}^U, \mathbb{P}^U)$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F}^U = \{\mathfrak{F}_t^U\}_{t\geq 0}$. Se supone que las funciones μ_s y σ_s dependen del tiempo, es decir, $\mu_s = \mu_s(t)$ y $\sigma_s = \sigma_s(t)$, y se determinarán, posteriormente, de manera endógena.

Restricción presupuestal del consumidor

En lo que sigue se supone que el individuo representativo emite una opción (europea) de compra y mantiene el subyacente (el valor del índice bursátil en términos reales) para cubrirse del posible ejercicio de la opción. En este caso, la riqueza real, x_t, del individuo, en cada instante, está determinada mediante:

$$x_t = S_t + \nu_t + k_t \qquad [2]$$

donde $\nu_t = \nu_t(S_t, t)$ es la prima que recibe el agente por la emisión (venta) de la opción de compra sobre el índice bursátil y k_t es el capital (bienes que se destinan a la producción, y_t). Sean $w_{1t} = S_t/x_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia del índice bursatil para cubrir el eventual ejercicio de la opción, $w_{2t} = \nu_t/x_t$ la proporción de la riqueza que asigna a la opción sobre el índice de precio $\nu_t(S_t, t)$, y $1 - w_{1t} - w_{2t}$ la proporción complementaria de capital, k_t, que destina a la producción, y_t. En consecuencia, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}x_t = x_t w_{1t}\mathrm{d}R_s + x_t w_{2t}\mathrm{d}R_\nu + x_t(1 - w_{1t} - w_{2t})r\mathrm{d}t - c_t\mathrm{d}t$$

donde r es el costo de reposición el capital (la tasa de interés que paga un bono cupón cero emitido por el gobierno para financiar su gasto). El rendimiento del activo con riesgo (el índice bursátil) satisface

$$\mathrm{d}R_s = \frac{\mathrm{d}\nu_t}{S_t} = \mu_s\mathrm{d}t + \sigma_S\mathrm{d}U_t \qquad [3]$$

y el rendimiento de una opción sobre dicho índice está dado por:

$$\mathrm{d}R_\nu = \frac{\mathrm{d}\nu_t}{\nu_t} \qquad [4]$$

En este caso, el rendimiento de la opción se obtiene mediante la aplicación del lema de Itô a $\nu_t(S_t,t)$, lo cual conduce a

$$\mathrm{d}\nu_t = \frac{\partial \nu_t}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t}\mathrm{d}t$$

o

$$\mathrm{d}\nu_t = \mu_\nu \nu_t \,\mathrm{dt} + \sigma_\nu \nu_t \,\mathrm{d}U_t \tag{5}$$

con

$$\mu_\nu \equiv \left(\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t}\mu_S S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \nu_t}{\partial S_t^{\,2}}\sigma_S^2 S_t^2 \right)\frac{1}{\nu_t}$$

y

$$\sigma_\nu \equiv \frac{1}{\nu_t}\frac{\partial \nu_t}{\partial t}\sigma_S S_t$$

En virtud de [3] y [4], la restricción presupuestal se puede escribir como:

$$\mathrm{d}x_t = x_t \left[\begin{array}{l} \left(r + (\mu_S - r) w_{1t} + (\mu_\nu - r) w_{2t} - \dfrac{c_t}{x_t} \right)\mathrm{d}t \\ + (w_{1t}\sigma_S + w_{2t}\sigma_\nu)\,\mathrm{d}U_t \end{array} \right] \tag{6}$$

Se requiere especificar un pago al vencimiento del contrato de opción, es decir, $\nu_t(S_t,T) = \max\,(S_t - K,0)$.

Posibilidades de producción

En esta sección se define el proceso de producción en la economía. Suponga que los consumidores son, a su vez, productores y que el proceso de producción y_t tiene la forma:

$$\mathrm{d}y_t = M(y_t)\mathrm{d}t + N(y_t)\mathrm{d}W_t \quad [7]$$

donde

$$M(y_t) = \kappa\left(\theta - \sqrt{y_t}\right) \quad [8]$$

y

$$N(y_t) = \nu\sqrt{y_t} \quad [9]$$

Las cantidades κ, θ y ν son constantes positivas y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega^W, \mathfrak{F}^W, \mathbb{P}^W)$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F}^W = \{\mathfrak{F}_t^W\}_{t\geq 0}$. Suponga también, por simplicidad, que $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_t, \mathrm{d}W_t) = 0$. El parámetro θ representa el valor de largo plazo de la producción, es decir, el proceso y_t presenta reversión a la media, el parámetro κ es la velocidad de ajuste hacia el valor de largo plazo, θ y ν es el parámetro de volatilidad de la producción. En este caso, $\mathrm{d}W_t$ representa las fluctuaciones propias del producto debidas a cambios tecnológicos o cambios en el precio de reposición de los bienes de capital. En lo que sigue se supone una función de producción del tipo $y_t = Ak_t$; véanse, al respecto, Rebelo (1991), Harrod (1939), y Rivas-Aceves y Venegas-Martínez (2010). Por simplicidad se supondrá, en lo que sigue, que $A = 1$, de tal forma que y_t y k_t son indistintos.

Problema de decisión del consumidor

Se supone que el consumidor representativo obtiene satisfacción por el consumo de un bien de carácter perecedero. La utilidad esperada del tipo von Neumann-Morgenstern, V_t, al tiempo t de un individuo representativo, adverso al riesgo y competitivo (tomador de precios) tiene la siguiente forma:

$$V_t \equiv E\left[\int_t^T u(c_s, y_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s \mid \mathfrak{F}_t\right] \quad [10]$$

donde c_s es el consumo al tiempo t, δ es la tasa subjetiva de descuento y $\mathfrak{F}_t$ es la información relevante disponible hasta el tiempo t. En este caso, $\mathfrak{F}_t \equiv \mathfrak{F}_t^{\,W} \times \mathfrak{F}_t^{\,U}$. Así pues, el consumidor toma decisiones de consumo y portafolio de tal manera que se maximice su satisfacción. Es decir, el consumidor desea determinar la trayectoria de consumo y las proporciones de su riqueza que va a asignar, en cada instante, a los diferentes activos disponibles en la economía de tal forma que su satisfacción por el bien de consumo sea máxima.

Condiciones de primer orden del problema del consumidor

La maximización de [10] sujeta a [6] y [7] conduce a la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman de un problema de control óptimo estocástico. Dicha condición está dada por

$$\begin{aligned} 0 \equiv \max_{c_t,\, w_{1t},\, w_{2t}} \Big\{ & u(c_s, y_s)e^{-\delta s} + J_t \\ & + J_x x_t \left(r + (\mu_S - r)\, w_{1t} + (\mu_\nu - r)\, w_{2t} - \frac{c_t}{x_t} \right) \\ & + \frac{1}{2} J_{xx} x_t^2 \left(w_{1t}\sigma_s + w_{2t}\sigma_\nu \right)^2 + J_y M(y_t) + \frac{1}{2} J_{yy} N^2(y_t) \Big\} \end{aligned}$$

donde

$$J(x_t, y_t, t) \equiv \max_{c_t,\, w_{1t},\, w_{2t}} E\left[\int_t^T u(c_s, y_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathfrak{F}_t \right] \qquad [11]$$

es la función de utilidad indirecta y $J(x_t,y_t,t)$ es la variable de co-estado. Si se toma como candidato de solución a $J(x_t,y_t,t) = H(x_t,y_t)e^{-\delta t}$ y se supone que $u(c_t, y_t) = \ln(c_t) + \phi\ln(y_t)$, $\phi > 0$, se tiene que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se transforma en

$$0=\max_{c_t,\, w_{1t},\, w_{2t}}\left\{\ln(c_t)+\phi\ln(y_t)-\delta H+H_x x_t\left(r+(\mu_S-r)w_{1t}+(\mu_\nu-r)w_{2t}-\frac{c_t}{x_t}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}H_{xx}x_t^2\left(w_{1t}\sigma_s+w_{2t}\sigma_v\right)^2+H_yM(y_t)+\frac{1}{2}H_{yy}N^2(y_t)\right\} \qquad [12]$$

En este caso, se satisface que $H(x_t,y_t)=g(y_t)\ln(x_t)+f(y_t)$ para algunas funciones $g(y_t)$ y $f(y_t)$. Después de derivar la ecuación [12] con respecto de las variables de control, la condición necesaria sobre el consumo es

$$c_t=\frac{x_t}{g(y_t)} \qquad [13]$$

y las condiciones de primer orden sobre w_{1t} y w_{2t} son, respectivamente,

$$\mu_S-r=w_1\sigma_s^2+w_2\sigma_S\sigma_\nu \qquad [14]$$

y

$$\mu_\nu-r=w_1\sigma_S\sigma_\nu+w_2\sigma_\nu^2 \qquad [15]$$

donde $w_{1t}=w_1$ y $w_{2t}=w_2$ son invariantes en el tiempo. Las dos últimas ecuaciones pueden ser reescritas en términos matriciales como:

$$\begin{pmatrix}\sigma_s^2 & \sigma_s\sigma_\nu\\ \sigma_s\sigma_\nu & \sigma_\nu^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_S-r\\ \mu_\nu-r\end{pmatrix}$$

Las ecuaciones anteriores, [14] y [15], confirman que los premios al riesgo de mercado tanto del subyacente como del derivado coinciden, es decir,

$$\frac{\mu_S-r}{\sigma_S}=\frac{\mu_\nu-r}{\sigma_\nu}$$

La intuición de esto es que el movimiento browniano modela justamente el riesgo de mercado del activo subyacente, esto es, modela las fluctuaciones de su precio, las cuales podrían ser adversas para el agente representativo. Ahora bien, de acuerdo con la ecuación [5], la cual fue obtenida de la aplicación del lema de Itô para obtener el cambio marginal en la prima de la opción, se tiene que el contrato de opción hereda el riesgo del subyacente; tal y como era de esperarse. Por último, es importante hacer notar que la coincidencia de los premios al riesgo permitirá valuar la opción de compra sobre el índice bursátil.

CARACTERIZACIÓN DEL PRECIO DE LA OPCIÓN

Con el fin de valuar la opción de compra, considere la solución de esquina dada por $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$. En este caso, las condiciones [14] y [15] se transforman, respectivamente, en:

$$\mu_S - r = \sigma_S^2 \qquad [16]$$

y

$$\mu_\nu - r = \sigma_S \sigma_\nu \qquad [17]$$

De la última ecuación se sigue que

$$\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 \right) \frac{1}{\nu_t} - r = \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t} \sigma_s^2 S_t \frac{1}{\nu_t}$$

Si se utiliza ahora la ecuación [16], se obtiene[1]

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t} \left(r + \sigma_s^2 \right) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r \nu_t = \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t} \sigma_s^2 S_t \frac{1}{\nu_t}$$

[1] Otras metodologías para valuar derivados se encuentran en Venegas-Martínez (2005).

o

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \frac{\partial \nu_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \nu_t}{\partial S_t^2}\sigma_s^2 S_t^2 - r\nu_t = 0 \qquad [18]$$

con la condición de frontera

$$\nu_t(S_t,T) = \max(S_t - K,0)$$

Así pues, en condiciones de equilibrio, el precio de la opción, $\nu_t(S_t,t)$, debe satisfacer la ecuación [18]. De hecho, se tiene que

$$\nu_t(S_t,t) = S_t\Phi(\xi_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(\xi_2) \qquad [19]$$

donde la función $\Phi(\xi)$ es la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar $\varepsilon \sim N(0,1)$, es decir,

$$\Phi(\xi) = \mathbb{P}_\varepsilon(\varepsilon \le \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 - \Phi(-\xi)$$

con

$$\xi_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}}$$

y

$$\xi_2 = \xi_1 - \sigma_S\sqrt{T-t}$$

La ecuación [19] proporciona la prima o el precio de una opción europea de compra sólo en función de información disponible al tiempo t (momento en que se valúa el instrumento), a saber: el valor del índice bursátil, el plazo por vencer del contrato, el costo de reposición del capital, el precio de ejercicio (o precio *strike*), y la volatilidad; aunque esta última tendrá que estimarse como la desviación estándar de un registro histórico de los rendimientos del índice. Los supuestos bajo los cuales [19] es válida son: el valor del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano, es decir, los rendimientos son normales con media y varianza proporcionales al tiempo; la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo; el mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos; no existen oportunidades de arbitraje, esto es, no es posible generar ganancias libres de riesgo (aunque se podría suponer equilibrio general, lo cual ciertamente lleva a que no existan oportunidades de arbitraje).

Un proceso alternativo para la tasa de interés de equilibrio

A continuación se presenta una fórmula alternativa para la tasa de interés de equilibrio. Observe que a partir de [16], se cumple que

$$r = \mu_S - \sigma_S^2 \qquad [20]$$

En lo que sigue se supone que $\mu_S > \sigma_S^2$. La tasa de interés de equilibrio se puede reescribir de la siguiente forma:

$$r = (w_1, w_2) \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_v \\ \sigma_s \sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \frac{x_t J_{xx}}{J_x}$$

donde $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$. En efecto, es suficiente observar que

$$J_x = e^{-\delta t} g(y_t) \frac{1}{x_t}$$

Por lo tanto, $x_t J_{xx}/J_x = -1$. La condición de equilibrio [20] será de utilidad para determinar la tasa de interés instantánea (o tasa corta).

Dinámica de la tasa corta

En esta sección, a partir del proceso para la función de producción, se determina la dinámica estocástica de la tasa corta. Si se definen $\mu_s = \tilde{\mu}_s y_t$ y $\sigma_s^2 = \tilde{\sigma}_s^2 y_t$ en [20], se tiene que

$$r_t = \gamma y_t$$

donde

$$\gamma = \tilde{\mu}_s - \tilde{\sigma}_s^2$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{d}r_t = \kappa\gamma^{-1/2}\left(\theta\gamma^{-1/2} - \sqrt{r_t}\right)\mathrm{d}t + \gamma^{-1/2}\nu\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t$$

Sean

$$a = \kappa\gamma^{-½},\ b = \theta\gamma^{½},\ \sigma = \gamma^{-½}\nu$$

De esta manera,

$$\mathrm{d}r_t = a\left(b - \sqrt{r_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t \qquad [21]$$

con a, b y σ cantidades positivas. Si se define

$$ab = \kappa\theta = \frac{1}{4}\sigma^2$$

entonces la ecuación [21] se puede reescribir como

$$\mathrm{d}r_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t \qquad [22]$$

En la ecuación anterior el parámetro a representa la velocidad de ajuste. Es decir, si las tasas de interés son demasiado grandes o demasiado pequeñas con respecto de un valor de largo plazo, entonces las tasas se ajustan con velocidad a a mantenerse cerca de dicho valor de largo plazo. El parámetro σ es la volatilidad (por unidad de tiempo) de la tasa instantánea de interés.

Valuación de un bono cupón cero

Considere un mercado en donde los agentes compran y emiten promesas de pago de una unidad monetaria en el futuro, libres de riesgo crédito. Estas promesas que se compran a descuento serán llamadas bonos cupón cero. Sea $B(t,T)$ el precio en el tiempo t de un bono que se compra a descuento con vencimiento al tiempo T, $T > t$, y que paga una unidad monetaria al vencimiento, es decir,

$$B(T,T) = 1 \qquad [23]$$

La curva de rendimientos o estructura de plazos o, simplemente, curva de ceros, en el tiempo t, de un bono con vencimiento T, está dada por

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t,T),\ T > t \qquad [24]$$

La tasa forward instantánea $f(t,T)$ es definida por la siguiente ecuación:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t,s)\,\mathrm{d}s \qquad [25]$$

Equivalentemente,

$$f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\left[(T-t)R(t,T)\right] \qquad [26]$$

La tasa de interés instántanea o tasa de interés spot o, simplemente, tasa corta a la que los agentes pueden comprar y vender bonos es

$$r_t = R(t,t) = \lim_{T \to t} R(t,T) \quad [27]$$

o

$$r_t = f(t,t) = \lim_{T \to t} f(t,T) \quad [28]$$

Observe que cuando $T \to t$, el plazo del bono se hace cada vez más y más pequeño. En consecuencia, cerca de t, el bono vencerá casi instantáneamente y su rendimiento se aproximará a la tasa instantánea de interés, a saber, r_t. Asimismo, cerca de t, la tasas corta y forward instantáneas son indistinguibles. Ahora bien, un bono de monto M_t que paga la tasa spot r_t, aumentará su valor, durante el instante dt, en

$$\mathrm{d}M_t = M_t r_t \mathrm{d}t \quad [29]$$

Esta ecuación es válida con toda certeza en t, ya que r_t es conocida en t. Sin embargo, despúes de t el nivel de la tasa corta es incierto. En otras palabras r_t es un proceso estocástico, sujeto a dos requerimientos. Primero, r_t es una función continua del tiempo. Segundo, se supone que r_t sigue un proceso markoviano. Dando por supuesto esto último, el comportamiento futuro de la tasa corta, dado su valor actual, es independiente del pasado. En otras palabras, la distribución de r_{t+u} dado r_t, $t \leq u$, sólo depende de la información disponible en el tiempo t es decir, sólo depende del valor de r_t.

Los procesos que son continuos y markovianos son llamados procesos de difusión. Estos procesos pueden ser descritos a través de una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(r_t,t)\mathrm{d}t + \beta(r_t,t)\mathrm{d}W_t \quad [30]$$

donde $\{W_t\}_{0\leq t}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. De acuerdo con [31], las funciones $\alpha(r_t,t)$ y $\beta(r_t,t)$ están dadas por

$$\alpha(r_t,t)=\frac{1}{4}\sigma^2-a\sqrt{r_t}$$

y

$$\beta(r_t,t)=\sigma\sqrt{r_t}$$

Asimismo, se supone que en el mercado de bonos no existen costos de transacción (comisiones e impuestos) y que la información está disponible para todos los agentes de forma simultánea (información perfecta y simétrica). Todos los inversionistas actúan en forma racional (maximizan utilidad y emplean toda la información histórica y actual). Además, todos los inversionistas tienen expectativas homogéneas y el mercado está en equilibrio, en consecuencia, no exiten oportunidades de arbitraje.

El precio de bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria se denotará mediante $B = B(r_t,t,T)$, o en forma más simple como $B = B(t,T)$ cuando no sea necesario destacar la dependencia con la tasa corta. Así, la tasa corta es la única variable de estado de la estructura de plazos.

DETERMINACIÓN DE LA CURVA DE CEROS

En la presente sección se determina de manera endógena la estructura de plazos de la tasa de interés asociada al mercado de bonos. A partir de la ecuación [30], se sigue por el lema de Itô que

$$\mathrm{d}B = B\mu(r_t,t,T)\mathrm{d}t + B\sigma(r_t,t,T)\mathrm{d}W_t \qquad [31]$$

donde

$$\mu(r_t,t;T)=\frac{1}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\alpha\frac{\partial B}{\partial r_t}+\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}\right) \qquad [32]$$

y

$$\sigma(r_t,t;T)=\frac{\beta}{B}\frac{\partial B}{\partial r_t} \qquad [33]$$

Considere ahora un inversionista que al tiempo t emite una cantidad w_1 de bonos con fecha de vencimiento T_1 y precio B_1 y simultáneamente compra una cantidad w_2 de bonos con fecha de vencimiento T_2 y precio B_2. El valor del portafolio es $\Pi_t = w_2 B_2 - w_1 B_2$. Si se denotan $W_1 = w_1 B_1$ y $W_2 = w_2 B_2$, el lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi_t &= (W_2\mu(r_t,t,T_2) - W_1\mu(r_t,t,T_1))\mathrm{d}t \\ &\quad + (W_2\sigma(r_t,t,T_2) - W_1\sigma(r_t,t,T_1))\mathrm{d}W_t \end{aligned} \qquad [34]$$

Suponga que las cantidades W_1 y W_2 se seleccionan de tal forma que

$$W_1=\frac{M_t\sigma(r_t,t;T_2)}{\sigma(r_t,t;T_1)-\sigma(r_t,t;T_2)}$$

y

$$W_2=\frac{M_t\sigma(r_t,t;T_2)}{\sigma(r_t,t;T_1)-\sigma(r_t,t;T_2)}$$

En consecuencia, el segundo término en la ecuación [34], el cual modela el riesgo de mercado, es cero. Por lo tanto, la ecuación [34] toma la forma

$$\mathrm{d}\Pi_t = M_t\left(\frac{\mu(r_t,t;T_2)\sigma(r_t,t;T_1)-\mu(r_t,t,T_1)\sigma(r_t,t;T_2)}{\sigma(r_t,t;T_1)-\sigma(r_t,t;T_2)}\right)\mathrm{d}t \qquad [35]$$

De esta manera, el portafolio es libre de riesgo de mercado. Si los mercados están en equilibrio, el portafolio debe producir el mismo rendimiento que el que se obtiene por hacer un depósito a la tasa r_t. Si el rendimiento del portafolio fuera mayor, el portafolio puede ser comprado con fondos prestados a la tasa r_t, en caso contrario el portafolio es vendido y las ganancias son prestadas, lo que produce oportunidades de arbitraje.

Al comparar las ecuaciones [29] y [35], se sigue que:

$$\frac{\mu(r_t,t;T_2)\sigma(r_t,t;T_1)-\mu(r_t,t,T_1)\sigma(r_t,t;T_2)}{\sigma(r_t,t;T_1)-\sigma(r_t,t;T_2)}=r_t$$

o

$$\frac{\mu(r_t,t;T_1)-r_t}{\sigma(r_t,t;T_1)}=\frac{\mu(r_t,t;T_1)-r_t}{\sigma(r_t,t;T_2)} \qquad [36]$$

Observe que los cocientes en cada lado de la ecuación [36] son iguales para fechas de vencimiento arbitrarias T_1 y T_2, se sigue que la razón $\mu(r_t,t,T) - r_t/\sigma(r_t,t,T)$es independiente de T. Sea $\lambda(r_t,t)$ el valor común de tal razón, entonces

$$\lambda(r_t,t)=\frac{\mu(r_t,t;T)-r_t}{\sigma(r_t,t;T)},\, T\geq t \qquad [37]$$

A la cantidad $\lambda(r_t,t)$ se le llama el precio de riesgo mercado, es decir, el valor que el mercado asigna al riesgo. La cantidad $\lambda(r_t,t)$ también puede interpretarse como el rendimiento adicional,por la exposición al riesgo, por unidad de volatilidad. La ecuación [37] se puede reescribir como

$$\mu(r_t,t,T) - r_t = \lambda(r_t,t)\ \sigma(r_t,t,T) \qquad [38]$$

Si se sustituyen la ecuaciones [32] y [33] en [38], se tiene que

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\left[\alpha(r_t,t)+\lambda(r_t,t)\mathrm{B}(r_t,t)\right]\frac{\partial B}{\partial r_t}+\frac{1}{2}\beta^2(r_t,t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}-r_tB=0,\ \ t\leq T \qquad [39]$$

junto con la condición final $B(r_t,t,T) = 1$.

Una vez que la forma de la dinámica estocástica de la tasa spot r_t, expresada en la ecuación [30], ha sido determinada y el precio de riesgo mercado ha sido especificado, $\lambda(r_t,t)$, entonces el precio del bono, asociado a la dinámica de r_t, se obtiene como solución de la ecuación [36]. Posteriormente, se calcula la estructura de plazos $R(t,T)$ de la tasa de interés con la ecuación siguiente:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln B(t,T) \quad [40]$$

A partir de la fórmula anterior, una vez que se determine el vector de precios de bonos a todos los plazos con fecha inicial t, se puede calcular el vector de tasas (anualizadas) de interés a todos los plazos con fecha de referencia t.

Solución de la ecuación diferencial parcial del precio de un bono a descuento

Si r_t es la tasa corta neutral al riesgo, es decir, si el premio al riesgo es cero, entonces el precio de un bono cupón cero, $B = B(t,T)$, que se coloca en t y que paga una unidad monetaria al vencimiento T, satisface la ecuación diferencial parcial parabólica no lineal:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right)\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0 \quad [41]$$

Se propone una solución de [41] en términos de variables separables como sigue:

$$B(t,T) = e^{A(t,T)+r_t D(t,T)+C(t,T)\sqrt{r_t}} \quad [42]$$

Claramente, $A(T,T) = \mathrm{D}(T,T) = C(T,T) = 0$, ya que el valor nominal del bono está dado por

$$B(t,T) = e^{A(t,T)+r_t D(t,T)+C(t,T)\sqrt{r_t}} = 1$$

En el apéndice se muestra que

$$A(t,T)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right)+\frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3}-\frac{a(T-t)}{2\sigma^2}-\frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)})}$$

$$D(t,T)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[1+\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]$$

$$C(t,T)=\frac{2a}{\sigma^2}\left[\frac{\left(1-e^{1/\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]$$

Una vez que se han determinado las funciones $A(t,T)$, D(t,T) y $C(t,T)$ estás se sustituyen en la ecuación [42] para calcular el vector de precios de bonos cupón cero a todos los plazos $T–t$ con fecha de inicio t.

Estructura de plazos

Con base en las ecuaciones [24], [40] y [42], la estructura de plazos se determina mediante

$$R(t,T)=-\frac{\ln B(t,T)}{T-t}=\frac{-r_tD(t,T)-A(t,T)-C(t,T)\sqrt{r_t}}{T-t} \qquad [43]$$

Puede verificarse, fácilmente, que

$$R(t,\infty)\equiv\lim_{T\to\infty}-\frac{\ln B(t,T)}{T-t}=\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}-\frac{a^2}{2\sigma^2} \qquad [44]$$

Como se mencionó antes, si las tasas de interés son demasiado grandes o demasiado pequeñas con respecto de un valor de largo plazo, entonces las tasas se ajustan con velocidad a ($a = \kappa\gamma^{-½}$) a mantenerse cerca de $R(t,\infty)$.

Estimación de parámetros

Recuerde que la ecuación diferencial estocástica del comportamiento de la tasa corta está representada por:

$$\mathrm{d}r_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t \qquad [45]$$

Considere el cambio de variable $X_t = 2\sqrt{r_t}$ y calcule las parciales de primero y segundo orden de X_t con respecto a r_t. Esto es,

$$\frac{\partial X_t}{\partial r_t} = \frac{1}{\sqrt{r_t}} = \frac{2}{X_t}$$

$$\frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} = -\frac{1}{2r_t\sqrt{r_t}} = -\frac{1}{r_t X_t} \qquad [46]$$

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = 0$$

El lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{\partial X_t}{\partial r_t}\left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\frac{\partial X_t}{\partial r_t}\mathrm{d}W_t \\ &= \left(\frac{2}{X_t}\left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t\left(\frac{-1}{r_t X_t}\right)\right)\mathrm{d}t + \sigma\frac{X_t}{2}\frac{2}{X_t}\mathrm{d}W_t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2X_t}\sigma^2 - \frac{2a\sqrt{r_t}}{x_t} - \frac{-1}{2X_t}\sigma^2 \right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t \\
&= \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{\partial X_t}{\partial r_t}\left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} \right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\frac{\partial X_t}{\partial r_t}\mathrm{d}W_t \\
&= a\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t
\end{aligned}
\qquad [47]
$$

Por lo tanto, se tiene que

$$X_t - X_{t-1} = -a + u_t,\ t = 1, 2, \ldots, N$$

donde $u_t \sim N(0,\sigma^2)$. De esta manera,

$$\mathrm{E}[X_t - X_{t-1}] = -a \qquad [48]$$

y

$$\mathrm{Var}[X_t - X_{t-1}] = \sigma^2 \qquad [49]$$

Así pues, si $Y_t = X_t - X_{t-1}$, los estimadores de a y σ se obtienen a través de las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Y_t = \hat{a}$$

y

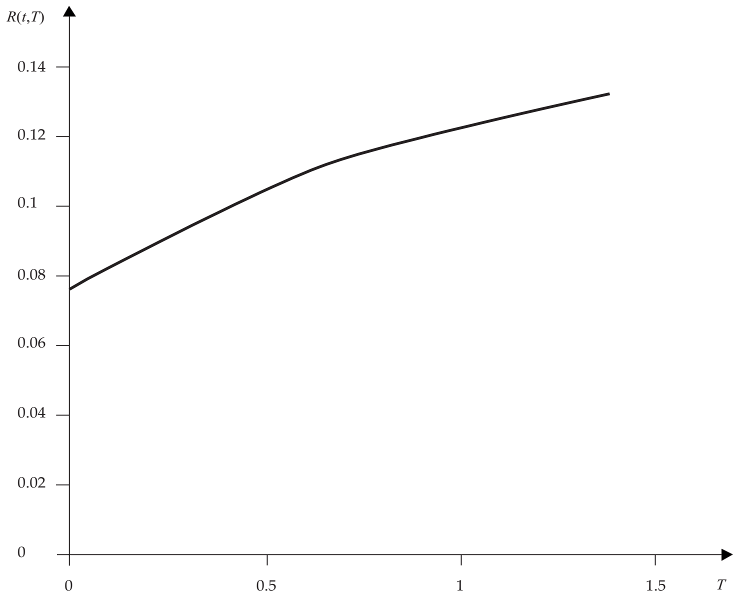
$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Y_t^2} = \sigma^2 \qquad [50]$$

De acuerdo con la ecuación [45] para determinar la dinámica estocástica de la tasa corta *spot* es necesario estimar los parámetros a y b. Para ello, las ecuaciones [49] y [50] proporcionan estimadores que son muy simples de calcular.

Ejemplo de aplicación del modelo propuesto

En esta sección se lleva a cabo una aplicación del modelo propuesto. La tasa corta es la tasa de CETES a 7 días. La gráfica 1 muestra la curva de ceros en un periodo de 1.4 años. La tasa corta actual (14 de marzo de 2005) está dada por $r_t = 0.0765$. Los estimadores de la volatilidad, $\hat{\sigma}$, y velocidad, $\hat{a}$, calculados, con un registro histórico de datos diarios de tamaño 90, a partir de la ecuación [50], están dados por $\hat{a} = 0.0216$ y $\hat{\sigma} = 0.3601$. Como puede observarse la gráfica 1 muestra el comportamiento típico de una estructura de plazos (curva de rendimiento). Es decir, de acuerdo con la ecuación [24], $R(t,T)$ es una función cóncava que se estabiliza alrededor de $R(t,\infty) = 0.14$.

Gráfica **1**
Curva de ceros estimada
(eje horizontal en años y eje vertical en niveles de tasas)



Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de equilibrio general en una economía estocástica poblada por agentes idénticos, con vida infinita, maximizadores de utilidad, competitivos y adversos al riesgo para valuar un derivado sobre un índice bursatil y para determinar una estructura de plazos de la tasa de interés.

El riesgo de mercado fue modelado con el supuesto de normalidad de distintas variables financieras y económicas, aunque esto podría verse como una limitación del modelo, los precios (teóricos) que se obtienen proporcionan una referencia importante en las decisiones de los agentes para participar en un mercado.

El modelo propuesto ha proporcionado dinámicas para la tasa corta diferentes a las obtenidas en Cox *et al.* (1985b) generalizando, como un resultado del equilibrio general, el modelo de tasa corta de Longstaff (1989). Asimismo, con los estimadores obtenidos de los parámetros, los cuales son muy sencillos de calcular, se llevó a cabo la deducción de la estructura de plazos cuando la tasa corta es la tasa de CETES a 7 días.

Varios de los resultados obtenidos en el transcurso de esta investigación merecen algunos comentarios adicionales. Por ejemplo, cuando los agentes son expuestos al riesgo de mercado éste afecta de manera importante su comportamiento. En efecto, si un consumidor-inversionista toma decisiones de consumo y portafolio en un ambiente determinista, entonces el agente puede determinar su trayectoria óptima de consumo (o al menos eso es lo que dice la ortodoxia neoclásica). Mientras que en el caso estocástico, infortunadamente, la trayectoria de consumo ya no puede ser determinada por el agente porque el consumo se convierte en variable aleatoria, situación que está más acorde con la realidad. Por otro lado, las ecuaciones [14] y [15] establecen que, en el equilibrio, los premios al riesgo de mercado tanto del índice bursátil como de una opción europea de compra sobre él coinciden, algo que era de esperarse y que está de acuerdo con hechos estilizados observados. Asimismo, la ecuación [19] proporciona la prima o el precio de una opción europea de compra sobre un índice bursátil en función de información disponible al momento en que se valúa el instrumento; este resultado coincide con el de Black y Scholes (1973) y Merton (1973).

Por último es importante mencionar que el modelo puede ser extendido en varias direcciones, por ejemplo: falta incorporar volatilidad estocástica en el comportamiento de la tasa corta y considerar otras formas funcionales disponibles en la literatura para la función de utilidad.

Apéndice

Después de derivar parcialmente la ecuación [42] con respecto de t y r, se encuentra que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B\left(\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t}\,\frac{\partial C}{\partial t}\right) \quad \text{[A.1]}$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = B\left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}}\right) \quad \text{[A.2]}$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = B\left[\left(-\frac{C}{4\sqrt{r_t}\,r_t}\right) + \left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}}\right)^2\right] \quad \text{[A.3]}$$

Si se sustituyen las expresiones [A.1], [A.2] y [A.3] en la ecuación [41] se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t}\,\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} + \frac{\sigma^2 r_t}{2}\left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma^2}{4} - a\sqrt{r_t}\right)\left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}}\right) - r_t = 0 \quad \text{[A.4]}$$

Después de desarrollar la expresión anterior, se sigue que

$$\frac{\partial A}{\partial t}+r_t\frac{\partial D}{\partial t}+\sqrt{r_t}\,\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}}+\frac{\sigma^2 r_t}{2}D^2+\frac{\sigma^2\sqrt{r_t}}{2\sqrt{r_t}}DC+\frac{\sigma^2 C}{8}+\frac{\sigma^2}{4}D$$
$$+\frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}}-aD\sqrt{r_t}-\frac{aC}{2}-r_t=0$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t}+r_t\left(\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\sigma^2 D^2}{2}-1\right)+\sqrt{r_t}\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\left(\frac{C\sigma^2}{2}-a\right)D\right]$$
$$+\left(\frac{C\sigma^2}{8}-\frac{a}{2}\right)C+\frac{D\sigma^2}{4}=0 \qquad [A.5]$$

Si se deriva con respecto de r_t, se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\sigma^2 D^2}{2}-1+\frac{1}{2\sqrt{r_t}}r_t\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\left(\frac{C\sigma^2}{2}-a\right)D\right]=0 \qquad [A.6]$$

A fin de que [A.6] se cumpla para toda r_t es necesario que se satisfaga

$$\frac{\partial D}{\partial t}=1-\frac{\sigma^2 D^2}{2} \qquad [A.7]$$

junto con

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\left(a-\frac{C\sigma^2}{2}\right)D \qquad [A.8]$$

La ecuación diferencial ordinaria [A.7] es del tipo de Riccatti. Considere esta ecuación escrita en la siguiente forma

$$\frac{\partial D(t,T)}{\partial t} = -\left(\frac{\sigma^2 D^2(t,T)}{2} - 1\right) \qquad [A.9]$$

A partir de la ecuación anterior, se tiene

$$\int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U(s,T)}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2(s,T) - 1} = -\int_T^t \mathrm{d}s = -(t-T) \qquad [A.10]$$

El lado izquierdo de la ecuación [A.10], se puede reescribir como

$$\int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2 - 1} = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{U^2 - (2/\sigma^2)} \qquad [A.11]$$

La integral que aparece en [A.11] se calcula mediante integración por fracciones parciales, esto es,

$$\int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{U^2 - (2/\sigma^2)} = \int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{(U + (2/\sigma^2))(U - (2/\sigma^2))} \qquad [A.12]$$

Note que el integrando en [A.12] se puede reescribir como

$$\frac{1}{(U + (2/\sigma^2))((U - (2/\sigma^2))} = \frac{A_0}{U + \sqrt{2}/\sigma)} + \frac{B_0}{U - \sqrt{2}/\sigma)}$$

De lo anterior, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$A_0 + B_0 = 0$$

y

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\ B_0-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}A_0=1$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$A_0=-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \qquad \text{[A.13]}$$

y

$$B_0=\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \qquad \text{[A.14]}$$

Al sustituir [A.13] y [A.14] en [A.12], se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^{D(t,T)}\frac{\mathrm{d}U}{U^2-(2/\sigma^2)}&=\int_0^{D(t,T)}\frac{\mathrm{d}U}{((U+(2/\sigma))((U-(2/\sigma))}\\
&=-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\int_0^{D(t,T)}\frac{\mathrm{d}U}{U+(2/\sigma)}+\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\int_0^{D(t,T)}\frac{\mathrm{d}U}{U-(\sqrt{2}/\sigma)}\\
&=-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left[-\ln\left|U+(\sqrt{2}/\sigma)\right|_0^{D(t,T)}+\ln\left|U+(\sqrt{2}/\sigma)\right|_0^{D(t,T)}\right]\\
&=\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}-\ln\left|\frac{U-(\sqrt{2}/\sigma)}{U+(\sqrt{2}/\sigma)}\right|_0^{D(t,T)}\\
&=\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\frac{D(t,T)-(\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T)+(\sqrt{2}/\sigma)}\right|-\ln\left|\frac{0-(\sqrt{2}/\sigma)}{0+(\sqrt{2}/\sigma)}\right|\right\}\\
&=\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{D(t,T)-(\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T)+(\sqrt{2}/\sigma)}\right| \qquad \text{[A.15]}\end{aligned}$$

Note que en la ecuación [A.15] se ha considerado que $D(T,T) = 0$ y que $\ln(|-1|) = 0$. Si se sustituye la ecuación [A.15] en la ecuación [A.11], se tiene:

$$\int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2 - 1} = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{\left(U^2 - (2/\sigma^2)\right)}$$

$$= -\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{D(t,T) - \sqrt{2}/\sigma}{D(t,T) + (\sqrt{2}/\sigma)}\right|$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{D(t,T) - (\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T) + (\sqrt{2}/\sigma)}\right) = -(t-T) \quad \text{[A.16]}$$

donde se ha supuesto que la cantidad que aparece dentro del valor absoluto es positiva.

Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}\right) = \sqrt{2}\sigma(T-t) \quad \text{[A.17]}$$

De la ecuación [A.17], se obtiene

$$\ln\left(\frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}\right) = \sqrt{2}\sigma(T-t) \quad \text{[A.18]}$$

Equivalentemente,

$$D(t,T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[\frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \quad \text{[A.19]}$$

La función $D(t,T)$ satisface la ecuación diferencial [A.7]. Sin embargo, observe que [A.19] no cumple la condición final $D(T,T) = 0$. Por lo tanto, se retoma la ecuación [A.16] suponiendo ahora que el argumento del valor absoluto es una cantidad negativa, lo que conduce a

$$\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}-D(t,T)}{D(t,T)+\frac{\sqrt{2}}{\sigma}}\right)=\sqrt{2}\sigma(T-t) \qquad \text{[A.20]}$$

Al despejar $D(t,T)$, se tiene

$$D(t,T)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \qquad \text{[A.21]}$$

o

$$D(t,T)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \qquad \text{[A.22]}$$

Esta función sí satisface la ecuación diferencial [A.7] y cumple la condición final $D(T,T) = 0$.

Así, esta solución se sustituye en la ecuación diferencial parcial [A.8], lo cual lleva a

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t}&=\left(a-\frac{C\sigma^2}{2}\right)D\\&=\left(a-\frac{C\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]\end{aligned} \qquad \text{[A.23]}$$

La ecuación diferencial [A.23] es de variables separables, así

$$-\int_{C(t,T)}^{C(t,T)} \frac{\mathrm{d}U\left(s,T\right)}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right)-a} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_T^t \left[\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]\mathrm{d}s \qquad [A.24]$$

Al resolver la integral del lado izquierdo de la ecuación [A.24], se tiene que

$$\begin{aligned}
-\int_0^{C(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right)-a} &= -\int_0^{C(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{\frac{U\sigma^2}{2}\left[U-\frac{2a}{\sigma^2}\right]} \\
&= \frac{-2}{\sigma^2}\int_0^{C(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{U-\frac{2a}{\sigma^2}} \\
&= \frac{-2}{\sigma^2}\left[\ln\left|U-\frac{2a}{\sigma^2}\right|\right]_0^{C(t,T)} \\
&= \frac{-2}{\sigma^2}\left[\ln\left|U-\frac{2a}{\sigma^2}\right| - \ln\left|0-\frac{2a}{\sigma^2}\right|\right] \\
&= \frac{-2}{\sigma^2}\ln\left|\frac{\frac{2a}{\sigma^2}-C\left(t,T\right)}{2a/\sigma^2}\right| \\
&= \frac{-2}{\sigma^2}\ln\left|\frac{2a-\sigma^2 C\left(t,T\right)}{2a}\right| \\
&= \frac{-2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2a-\sigma^2 C\left(t,T\right)}{2a}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

donde se ha tomado en cuenta que $C(T,T) = 0$ y se ha supuesto que $C(t,T) < 2a/\sigma^2$. Por lo tanto,

$$-\int_0^{C(t,T)} \frac{\mathrm{d}U}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right)-a} = \frac{-2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2a}{2a-\sigma^2 C(t,T)}\right) \qquad [A.25]$$

Considere ahora el lado derecho de [A.24] y defina el cambio de variable $U = 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U &= -\sqrt{2}\sigma e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}\mathrm{d}s \\ &= -\sqrt{2}\sigma(U-1)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

así

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_T^t \left[\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]\mathrm{d}s = \frac{1}{\sigma^2}\int_T^t \left[\frac{U-2}{U(U-1)}\right]\mathrm{d}U \qquad [A.26]$$

El lado derecho de la ecuación [A.26] se resuelve por fracciones parciales, esto es, se desean determinar A_1 y B_1 tales que

$$\frac{U-2}{U(U-1)} = \frac{A_1}{U} + \frac{B_1}{U-1} = \frac{A_1(U-1)+B_1 U}{U(U-1)}$$

Es decir,

$$A_1 + B_1 = 1$$

y

$$A_1 = 2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^2}\int_T^t\left[\frac{U-2}{U(U-1)}\right]\mathrm{d}U &= \frac{1}{\sigma^2}\left[\int_T^t \frac{A_1}{U}\mathrm{d}U+\int_T^t\frac{B_1}{U-1}\mathrm{d}U\right]\\
&=\frac{1}{\sigma^2}\left[2\ln\left|1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}\right|_T^t-\ln\left|1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}-1\right|_T^t\right]\\
&=\frac{1}{\sigma^2}\left[2\left(\ln\left|1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}\right|-\ln 2\right)-\ln\left|e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}-1\right|_T^t\right]\\
&=\frac{1}{\sigma^2}\left[\ln\left[\frac{\left(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{4}\right]-\ln e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right]\\
&=\frac{1}{\sigma^2}\ln\left[\frac{\left(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \qquad \text{[A.27]}
\end{aligned}$$

Si, por un lado, se sustituye [A.27] en [A.26] y, por otro lado, se sustituyen [A.25] y [A.26] en [A.24], se tiene que

$$-\int_{C(T,T)}^{C(t,T)}\frac{\mathrm{d}U}{\left(\frac{U\sigma 2}{2}\right)-a}=\frac{\sqrt{2}}{\sigma^2}\int_T^t\left[\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}\right]\mathrm{d}s$$

$$\frac{2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2a}{2a-\sigma^2C(t,T)}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\ln\left[\frac{\left(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \qquad \text{[A.28]}$$

Al despejar $C(t,T)$ de la ecuación anterior, se tiene que

$$C(t,T)=\frac{2a}{\sigma^2}\left[\frac{\left(1-e^{1/\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \qquad \text{[A.29]}$$

Observe que $C(t,T) < 2a/\sigma^2$ y que si $t = T$, entonces $C(t,T) = 0$. Se puede verificar, de manera sencilla, que [A.22] y [A.29] cumplen con [A.8].

Ahora bien, si se sustituyen [A.7], [A.8], [A.22] y [A.29] en [A.5], se obtiene que

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{a\left(1-e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}\right)^4}{2\sigma^2\left(1+e^{1/\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}-\frac{a^2\left(1-e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}\right)^2}{\sigma^2\left(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)}$$
$$+\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left[1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]=0$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{2a}{\sigma^2}\left(\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right)^2-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\left[1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right] \qquad \text{[A.30]}$$

Por lo tanto,

$$A(t,T)=\frac{2a}{\sigma^2}\int_T^t\left(\frac{1-e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right)^2\mathrm{d}s$$
$$-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\int_{\mathrm{T}}^{\mathrm{t}}\left[1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]\mathrm{d}s \qquad \text{[A.31]}$$

Para calcular la primera integral, del lado derecho de la ecuación anterior, se define el siguiente cambio de variable sea $u=1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}$, de donde $\mathrm{d}u=-\sqrt{2}\sigma(u-1)\,\mathrm{d}s=\sqrt{2}\sigma(1-u)\,\mathrm{d}s$. En consecuencia,

$$\frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3}\int_T^t\frac{(2-u)^2}{u^2(1-u)}\mathrm{d}u=\frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3}\int_T^t\frac{\left(4-4u-u^2\right)}{u^2(1-u)}\mathrm{d}u \qquad \text{[A.32]}$$

La integral del lado derecho de [A.32] se calcula de nuevo por fracciones parciales. Esto es,

$$\begin{aligned}\frac{\left(4-4u-u^2\right)}{u^2\left(1-u\right)} &= \frac{A_2}{u^2}+\frac{B_2}{u}+\frac{C_2}{\left(1-u\right)}\\ &= \frac{A_2+u\left(B_2-A_2\right)+u^2\left(C_2-B_2\right)}{u^2\left(1-u\right)}\end{aligned}$$

La solución del sistema generado es $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ y $C_2 = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3}\int_T^t \frac{\left(4-4u-u^2\right)}{u^2\left(1-u\right)}\mathrm{d}u &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3}\left[\int_T^t \frac{4}{u^2}\mathrm{d}u+\int_T^t \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3}\left[\int_T^t \frac{4}{u^2}\mathrm{d}u-\int_T^t \frac{1}{u-1}\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3}\left[-4\left(\frac{1}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}\right)\Bigg|_T^t-\ln\left(e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}\right)\Bigg|_T^t\right]\\ &= -\frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)})}+\frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3}-\frac{a^2(T-t)}{2\sigma^2} \qquad [\text{A.33}]\end{aligned}$$

A continuación se calcula la segunda integral que aparece en [A.31], es decir,

$$\begin{aligned}-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\int_T^t\left[1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}\right]\mathrm{d}s &= -\frac{\sigma^2}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_T^t\left[1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}\right]\mathrm{d}s\right]\\ &= -\frac{\sigma^2}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_T^t\left(1-\frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}\right)\mathrm{d}s\right]\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left[\frac{\left(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right) \qquad \text{[A.34]}$$

Note que la integral que aparece en la segunda igualdad de [A.34], ya fue resuelta en [A.26].

Por último, si se sustituyen las ecuaciones [A.33] y [A.34] en [A.31], se obtiene que

$$A(t,T) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} - \frac{a(T-t)}{2\sigma^2} - \frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)})} \qquad \text{[A.35]}$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$A(t,T) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}\right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} + \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2\sigma^2}\right)(T-t) - \frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3(1+e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)})} \qquad \text{[A.36]}$$

Claramente, si $t = T$, entonces $A(T,T) = 0$.

Bibliografía

Black, F. y M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, 1973, pp. 637-654.

Cox, J.; J. Ingersoll y S. Ross, "An intertemporal general equilibrium model of asset prices", *Econometrica*, vol. 53, núm. 2, 1985a, pp. 363-384.

———, "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, vol. 53, núm. 2, 1985b, pp. 385-467.

Grinols, E.L. y S.J. Turnovsky, "Risk, the financial market, and macroeconomic equilibrium", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 17, núm. 1-2, 1993, pp. 1-36.

Harrod, R., "An essay in dynamic theory", *The Economic Journal*, vol. 49, núm, 1939, pp. 14-33.

Lee, M. y W. Li, "Drift and diffusion function specification for short-term interest rates", *Economics Letters*, vol. 86, núm. 3, 2005, pp. 339-346.

Longstaff, F.A., "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, vol. 23, núm. 2, 1989, pp. 195-224.

Merton, R.C., "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, núm 1, 1973, pp. 141-183.

Rebelo, S., "Long run policy analysis and long run growth", *The Journal of Political Economy*, vol. 99, núm. 3, 1991, pp. 500-521.

Rivas-Aceves, A. y F. Venegas-Martínez, "Gobierno como promotor del cambio tecnológico: un modelo de crecimiento endógeno con trabajo, dinero y deuda", *Economía Mexicana, Nueva Época*, vol. 19, núm. 1, 2010, pp. 91-117.

Schmedders, K., "Computing equilibria in the general equilibrium model with incomplete asset markets", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 22, núm. 8-9, 1998, pp. 1375-1401.

Venegas-Martínez, F., "Temporary stabilization: a stochastic analysis", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, núm. 9, 2001, pp. 1429-1449.

———, "Bayesian inference, prior information on volatility, and option pricing: A Maximum Entropy Approach", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 8, núm. 1, 2005, pp. 1-12.

———, "Stochastic temporary stabilization: undiversifiable devaluation and income risks", *Economic Modelling*, vol. 23, núm. 1, 2006, pp. 157-173.

———, "Real options on consumption in a small open monetary economy", *Journal of World Economic Review*, vol. 3, núm. 2, 2008, pp. 105-115.

———, "Temporary stabilization in developing countries and real options on consumption", *International Journal of Economic Research*, vol. 6, núm. 2, 2009, pp. 229-249.

Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga, "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad", *El Trimestre Económico*, vol. 59(2), núm. 274, 2002, pp. 227-250.