

La sección CÓMO SE... invita al desarrollo práctico en química, sea a través de experimentos, construcción de modelos, prototipos o equipo.

Geometría, simetría y química: un modelo de icosaedro hecho con popotes de plástico

Carlos A. Martínez-Huitle,¹ Aarón Pérez-Benítez² y Enrique González-Vergara³

Abstract (*Geometry, Symmetry and Chemistry: An Icosahedron Model made out with Plastic Straws*)

The construction of an icosahedron model made with drinking straws is described. This model is very useful for learning (and teaching) the geometry and symmetry of icosahedral species, such as, the closedodecaborane ion, $(B_{12}H_{12})^{2-}$.

Introducción

La química como ciencia netamente molecular requiere la explicación a escala macroscópica de los fenómenos microscópicos. A este respecto, el uso de modelos moleculares en la enseñanza y en la investigación juega un importante papel. La química de boranos, carboranos y cúmulos metálicos no es la excepción; sin embargo, casi no existen modelos simples de desarrollar que sean capaces de representar a muchas de tales moléculas. Aquí se presenta la construcción de un modelo de icosaedro utilizando únicamente popotes de plástico, fácil de construir por maestro y alumnos (a diferente escala, si se quiere), con el cual es posible representar una gran variedad de sustancias que tienen estructuras icosaédricas.

En el artículo "El icosaedro en Química Inorgánica" (King, 1992), se describen por lo menos siete grupos de sustancias con geometría icosaédrica, mismos que a continuación se listan:

- 1) Boranos y carboranos icosaédricos y sus productos de sustitución.
- 2) Boro elemental y boruros metálicos con alto contenido de boro.

- 3) Quasicristales icosaédricos basados en icosaedros de aluminio.
- 4) Iones icosaédricos de Galio Ga_{12}^{2-} , encontrados en fases intermetálicas de Galio y Metales Alcalinos.
- 5) Cúmulos metálicos carbonílicos icosaédricos, tanto centrados como no centrados.
- 6) Cúmulos de Oro centrados y cúmulos más complicados basados en unidades estructurales icosaédricas.
- 7) Polioxometalatos del tipo $M^{IV}Mo_{12}O_{42}^{8-}$, en donde M^{IV} ($M = Ce, Th, U$) está rodeado por 12 oxígenos.

En muchas de estas estructuras se distinguen los elementos B, Al, Ga, ..., esta columna de la tabla periódica se distingue por su alta tendencia a estructuras basadas en el icosaedro, por esta razón se conoce a estos elementos como los icoságenos.

Un poco de geometría

El concepto de poliedro es muy útil para describir diversas estructuras químicas. Un poliedro se considera que consta de un conjunto de puntos llamados **vértices**; líneas uniendo dichos puntos, que se llaman **lados** o **aristas** y superficies formadas por los lados o aristas, las cuales se denominan como **caras**. El grado o figura de un vértice es definido como el número de lados o aristas que convergen en ese vértice.

En la química, los poliedros pueden aparecer en estructuras tales como los poliedros de coordinación, en los cuales los vértices representan los ligantes o átomos rodeando a un átomo central el cual es a menudo, pero no siempre, un metal; y poliedros de cúmulo, en los cuales los vértices representan átomos polivalentes y los lados representan distancias de enlace (King, 1994). Los poliedros en los cuales todas las caras son triángulos se llaman deltaedros. El que aquí nos ocupa es el icosaedro, el cual posee 20 caras triangulares y 12 vértices.

La tabla 1 muestra las características de los cinco poliedros regulares convexos llamados Sólidos Platónicos, debido a que fueron utilizados por Platón en el planteamiento de su filosofía, aunque en realidad, desde el punto de vista matemático, fueron descubiertos por los pitagóricos.

¹ Estudiante de la carrera de Química, Universidad de las Américas Puebla.

² Centro de Investigación de la Facultad de Química, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Av. 14 Sur y Av. San Claudio, Col. San Manuel, CP 72570, Puebla, Pue. México.

³ Centro de Química, Instituto de Ciencias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. 14 Sur 6301, Col. San Manuel, CP 72570, Puebla, Pue. México.

Correo electrónico: engonzal@cen.buap

Recibido: 14 de abril de 1998; Aceptado: 20 de agosto de 1998.

Un poliedro convexo se dice que es regular si todas sus caras son regulares e iguales, y al mismo tiempo sus vértices están rodeados de igual manera, es decir, tienen el mismo grado de vértice. Un poliedro es convexo si cada ángulo diedro es menor de 180°. El ángulo diedro es el ángulo formado por dos polígonos unidos a lo largo de un lado común (Hargittai I. y Hargittai M., 1987). Los cinco poliedros regulares convexos se muestran en la figura 1.

Algunos modelos para representar estos poliedros han sido publicados anteriormente (Pérez-Benítez *et al.*, 1991, 1992, 1997); sin embargo, el representar un icosaedro cuyo grado o figura de vértice es 5, impone un reto muy especial, en donde, la creatividad de un estudiante, como es de esperarse, nos ha sorprendido por la simplicidad de la solución que ha propuesto.

El mundo de los poliedros es muy vasto, y en la química destacan también algunos poliedros semi-regulares llamados sólidos arquimideanos, en éstos todas las caras son regulares y sus vértices tienen el mismo grado de vértice, sin embargo, sus caras no son todas polígonos de la misma clase (Wells, 1970). El icosaedro truncado es quizá el más famoso de los 13 sólidos arquimideanos, ya que el buckminsterfullereno o Futboleno posee dicha geometría (Pérez-Benítez, 1998). Prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides son ejemplos de poliedros altamente representados en la química (Gillespie y Hargittai, 1993); en estos casos, a menudo el grado o figura de vértice es 5, como en el caso del icosaedro, por esta razón la metodología aquí desarrollada será también útil para la construcción de modelos para estos casos.

George W. Hart, creador de la página Web de Poliedros Virtuales (<http://www.li-net/george/virtual-polyhedra/vp.html>) nos invita a visitar este sitio que contiene más de 1,000 poliedros. Aun cuando la visita es muy educativa, el mismo autor advierte que la mejor manera de aprender acerca de los poliedros es construyendo uno propio. La segunda mejor manera es jugando con uno que alguien haya hecho previamente (Hart, 1996).

El maravillarnos con el potencial de perseguir a los poliedros químicamente está de acuerdo con lo expresado por Flores-Parra (1991): "Evidentemente, los químicos seguirán obteniendo estructuras cada vez más exóticas a fin de complacer sus inquietudes artísticas y creativas y su único límite será la imaginación".

TABLA 1. Características de los poliedros regulares.

Nombre	Polígono	Número de caras	Grado del vértice*	Número de vértices	Número de lados o aristas
TETRAEDRO	Triángulo	4	3	4	6
CUBO	Cuadrado	6	3	8	12
OCTAEDRO	Triángulo	8	4	6	12
DODECAEDRO	Pentágono	12	3	20	30
ICOSAEDRO	Triángulo	20	5	12	30

* Número de líneas que concurren en cada vértice.

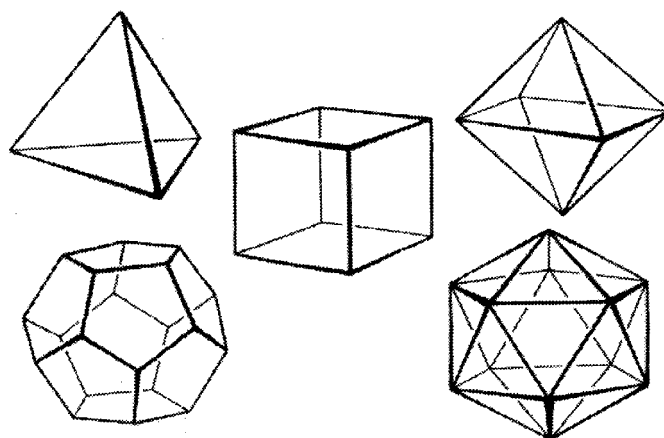


Figura 1. Los cinco sólidos platónicos. Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro pentagonal e icosaedro.

Algo de simetría

Utilizando un sólo tipo de polígonos regulares, una superficie plana puede cubrirse en su totalidad con triángulos, cuadrados o hexágonos (figura 2a-c), pero no con pentágonos (figura 2d) ni con otros polígonos mayores.

Análogamente, las estructuras tridimensionales de simetría quintuple (por ejemplo el dodecaedro pentagonal o el icosaedro) no pueden empacarse de manera que llenen el espacio sin dejar huecos. Este hecho fue el principal motivo por el que la simetría de quinto orden fue ignorada por la ciencia (y en particular por la cristalografía) durante un largo periodo. Pero en 1984, Blech, Gratias y Cahn descubrieron la simetría puntual cuasi-icosaédrica en la difracción de rayos-X de la aleación Al₆Mn (Sordelet y Dubois, 1997).

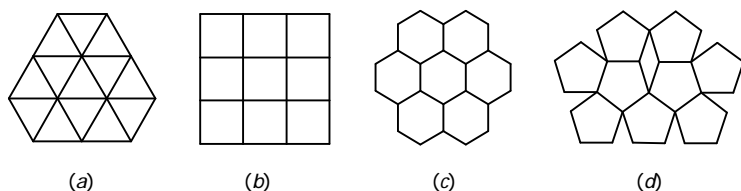


Figura 2. Ocupación de una superficie plana por polígonos regulares: (a)-(c) llenado total; (d) llenado incompleto.

Por otro lado, la simetría de orden quintuple es muy frecuente en la naturaleza. La presentan muchos vegetales con flores formadas por cinco pétalos y algunos animales marinos como la estrella de mar. El ADN, la estructura genética esencial de todos los organismos vivos, también posee propiedades de simetría de orden quinto, lo mismo que las proteínas tubulina y clathrina y muchos virus con estructura icosaédrica.

En la química, también se pueden encontrar varias entidades con esa simetría; por ejemplo: el ferroceno, $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$ (figura 3a); el futboleno- C_{60} (figura 3b) y el dianión cluso-dodecaborano, $(\text{B}_{12}\text{H}_{12})^{2-}$ (figura 3c).

En este contexto, por simetría de orden quinto nos hemos estado refiriendo tanto a rotaciones propias (giros de 72° o eje C_5) como a ejes helicoidales de rotación-traslación (rotación de 72° acompañada de una translación, como en el caso de una escalera de espiral con escalones idénticos situados a 72°).

La rotación propia C_5 puede ser ejemplificada con un círculo de papel que contenga cinco marcas equidistantes entre sí y equidistantes del centro del círculo (figura 4a). Obsérvese que si se clava un alfiler en el centro del círculo y se utiliza como eje de rotación para efectuar giros de: $1/5$ (figura 4b),

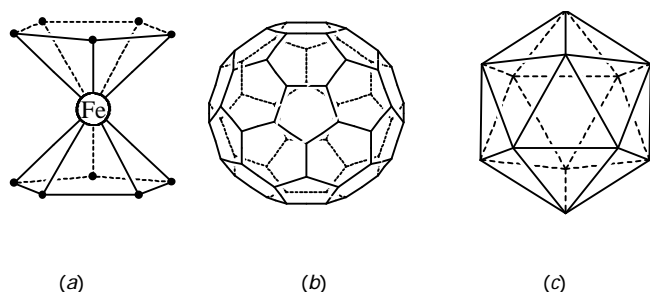


Figura 3. Representaciones de entidades químicas con simetría rotacional de orden quinto: (a) Ferroceno; (b) Buckminsterfullereno; (c) dianión cluso-dodecaborano.

$2/5$, $3/5$ y $4/5$ de vuelta,¹ se obtienen posiciones indistinguibles de la inicial y que con $5/5$ de vuelta se llega al punto de partida.²

Otros elementos de simetría relacionados con el eje propio de orden cinco son el eje impropio de rotación-reflexión de orden diez (S_{10}) y sus múltiplos. Las tres entidades químicas de la figura 3 lo presentan y también puede ilustrarse de manera simple usando dos círculos de papel pegados con las marcas mirando al exterior y dispuestas de manera alternada (figura 4c). La operación impropia S_{10} , consiste de una rotación de 36° seguida de una reflexión perpendicular a dicho eje (en este caso ni la rotación por 36° ni el plano de reflexión son operaciones de simetría por sí mismos. En cambio, la aplicación de ambos sí lleva las marcas a una posición semejante a la inicial).

El grupo puntual de simetría I_h .

Uno de los cuerpos geométricos más ricos en elementos de simetría (120 elementos), el icosaedro, posee ejes C_2 (figura 5a); ejes C_3 y S_6 (figura 5b) y; ejes C_5 y S_{10} colineales con las diagonales del icosaedro (figura 5c).

En la figura 5a el lector puede observar claramente que hay dos formas de dividir al icosaedro en dos partes iguales. Estas dos formas corresponden a dos planos de simetría perpendiculares al plano del papel, uno vertical y el otro horizontal. De la misma manera en las figuras 4b-c se pueden identificar, respectivamente, a 3 y 5 formas de dividir al icosaedro en dos partes iguales, las cuales corresponden nuevamente a 3 y 5 planos de simetría.

Si bien, la ubicación, el número y el tipo de ejes de rotación propia e impropia queda completamente especificado en función de las características geométricas del icosaedro, el número de planos de simetría y la disposición relativa entre ellos resulta difícil de establecer a partir de una imagen bidimensional.

El icosaedro, como se mencionó anteriormente, es un cuerpo geométrico regular que se conoce desde la antigüedad. En la figura 6a a la 6c, se presentan algunas de sus representaciones más difundidas. El

¹ Recuérdese que una vuelta = 360° ó 2π radianes.

² Para llegar a la posición inicial se requiere completar un ciclo de operaciones de simetría; esto es, una rotación de 360° , dos rotaciones de 180° , tres rotaciones de 120° , etcétera, o bien dos reflexiones sobre el mismo plano o dos inversiones sobre el centro de inversión. Obviamente, si el objeto se deja intacto también se obtiene una posición indistinguible de la original.

esquema bidimensional (diagrama de Schlegel⁶) es la representación más empleada por los matemáticos y el esquema “tridimensional” en perspectiva con la numeración indicada es el más usado en la química, para nombrar a los compuestos de Boro sustituidos (por ejemplo los carboranos).

Construcción del modelo

i) Materiales:

Popotes de plástico y Tijeras.

ii) Instrucciones:

1. Corte 17 popotes de plástico en cuatro secciones iguales, 36 de éstos se utilizarán para construir los vértices del modelo y los 30 restantes servirán como aristas.
2. Construcción de los vértices :
 - a) A dos popotes haga una ranura doblando a la mitad y cortando aproximadamente 0.5 cm. Como lo indica la marca de la figura 7a.
 - b) Inserte un popote entre la ranura de los dos anteriores, como se indica en la figura 7b-c. Se obtiene una pieza en forma de cruz con dos puntas sencillas y dos puntas dobles. Se requieren 12 de estas piezas, que serán los 12 vértices del icosaedro.
3. Ensamble del modelo:
 - a) Una cinco vértices a través de sus puntas sencillas formando una cadena, como se indica en la figura 7d. Repita la operación para formar una segunda cadena.
 - b) Con diez popotes una las cadenas entre sí a través de sus puntas dobles. Cada vértice de la primera cadena se conectará con dos vértices de

la segunda cadena formando triángulos, como se indica en la figura 7e.

c) Una los extremos de las cadenas para formar una banda de 10 triángulos.

d) Transforme las cinco puntas dobles de la parte superior en puntas sencillas, introduciendo ambas en un solo popote, como se muestra en la figura 7f.

e) Una las cinco nuevas puntas sencillas, utilizando una de las piezas para vértice.

f) Repita los pasos **d** y **e** en la parte inferior, y concluya el modelo como se muestra en la figura 8.

El modelo terminado se presenta en la figura 9.

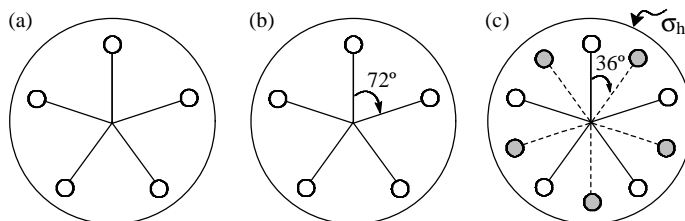


Figura 4. (a) Molde³ para elaborar un modelo sencillo útil para ilustrar las operaciones de simetría C_5 y S_{10} (b) C_5 : rotación de 72° ; (c) S_{10} : rotación de 36° seguido de una reflexión en el plano del papel.⁴ En ambos casos el eje de simetría es colineal a la vista del lector.⁵

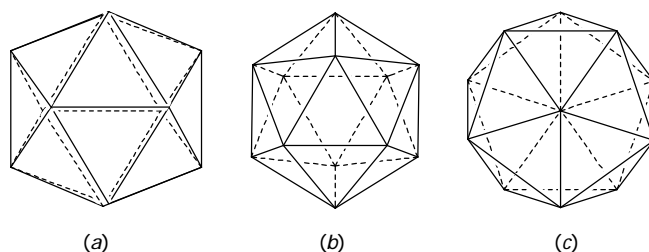


Figura 5. Ejes de simetría del icosaedro colineales a la vista del lector: (a) eje de rotación C_2 ; (b) eje de rotación C_3 y de rotación-reflexión S_6 ; (c) eje de rotación C_5 y eje de rotación-reflexión S_{10}

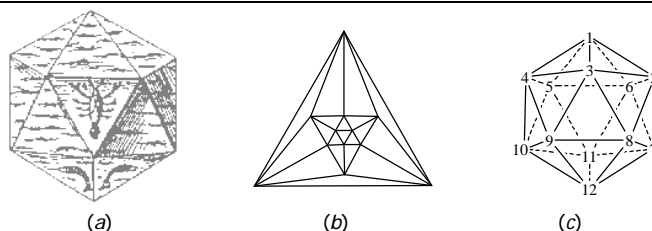


Figura 6. (a) Representación platónica del agua; (b) diagrama bidimensional del icosaedro (el triángulo formado por las tres aristas externas corresponde al triángulo más cercano al observador); (c) sistema de numeración y representación en perspectiva del icosaedro.

³ Con este molde se pueden abordar los grupos puntuales C_{5v} (una plantilla: obsérvese que las marcas aparecen solamente en una cara y por tanto no existe plano de simetría horizontal), D_{5h} (dos plantillas pegadas con el decorado hacia afuera y haciendo coincidir las marcas) y D_{5d} (dos plantillas pegadas con el decorado hacia afuera y alternando las marcas).

⁴ La reflexión traslada las marcas hacia la parte posterior, lo cual se simboliza con líneas punteadas y círculos oscuros.

⁵ Nótese que en la figura 4a-c hay un C_2 y dos planos de simetría, un C_3 y tres planos y un C_5 , y cinco planos, respectivamente. Entonces se deduce uno de los teoremas de la simetría: Si un eje de rotación C_n está contenido en un plano de simetría, entonces deben de existir otros $n-1$ planos de simetría situados a $360^\circ/n$ de él; en caso contrario el eje C_n no existe.

⁶ Mediante el uso de programas de mecánica molecular (por ejemplo Hyperchem), los diagramas bidimensionales pueden utilizar, entre otras cosas, para la elaboración rápida de la perspectiva tridimensional de los poliedros correspondientes.

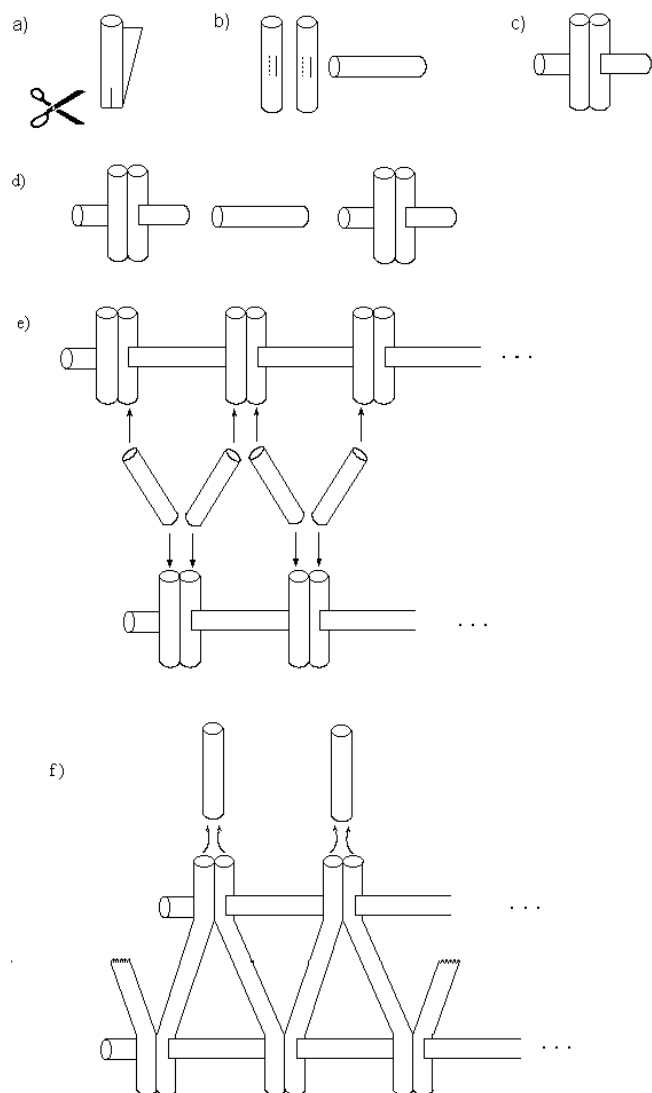


Figura 7. Construcción paso a paso del modelo de icosaedro.

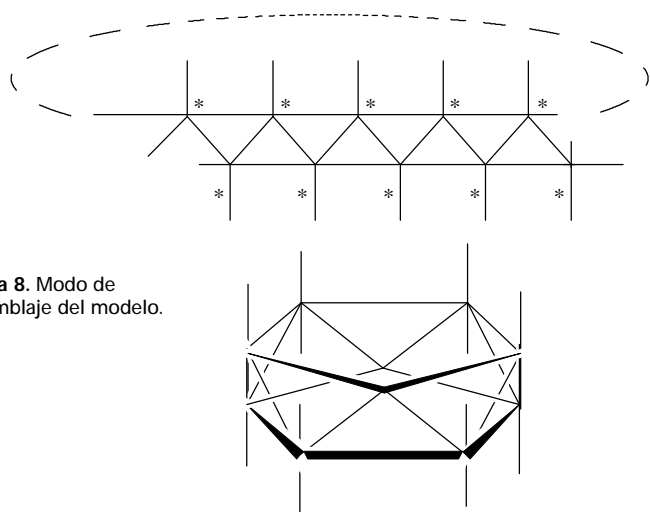


Figura 8. Modo de ensamblaje del modelo.

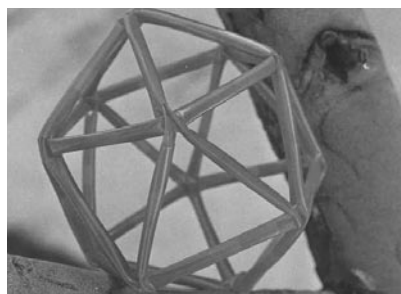


Figura 9. Modelo terminado.

Conclusiones

La forma de construir un modelo armable de un icosaedro hecho con popotes de plástico se ha descrito. El modelo es útil para analizar la geometría icosaédrica y para efectuar de manera objetiva las operaciones propias C_2 , C_3 y C_5 del grupo puntual I_h ; siendo una herramienta de apoyo que permite visualizar rápidamente las operaciones impropias de orden superior S_6 y S_{10} en el icosaedro.

Su bajo costo y alta maniobrabilidad, lo convierten en un excelente auxiliar didáctico para la enseñanza de la geometría y la simetría molecular.

Agradecimientos

Los autores agradecen la colaboración del M.C. Ricardo Peña Moreno, por su gran ayuda en el diseño de las figuras y apoyo computacional en general, y a Yadhira Rosas Bravo por sus valiosas sugerencias y comentarios.

Bibliografía

- Flores-Parra A., Cuando los químicos orgánicos se enamoraron de la simetría, *Avance y Perspectiva*, vol. 9, Octubre-Noviembre 1990.
- Gillespie, R.J. and Hargittai, I., *The VSEPR Model of Molecular Geometry*, Allyn and Bacon Massachusetts, USA, 1991. p. 8-12.
- Hargittai, I. and Hargittai, M., *Symmetry through the eyes of a chemist*. VCH Publishers, New York, 1987.
- King, R.B., The icosahedron in inorganic chemistry, *Inorg. Chim. Acta*, **198-200**, 841-861, 1992.
- King, R.B., Polyhedra, en *The Encyclopedia of Inorganic Chemistry*, John Wiley and Sons Ltd., 1994. p. 3344-3347
- Pérez-Benítez, A. y González-Vergara, E., Un tetraedro o un tetraedro alargado a partir de un popote y un cordel, *Educ. quim.*, **2(4)**, 198-200 (1990).
- Pérez-Benítez, A., Hernández, Ma. G. y González-Vergara, E., Modelos de bajo costo de estructuras de silicatos, *Educ. quim.* **3(2)**, 114-118 (1991).
- Pérez-Benítez, A. y Guevara García, J.A., Un modelo tridimensional para la enseñanza de la Simetría del fullereno I_h-C_{20} , *Educ. quim.*, **8(2)**, 94-96 (1997).
- Pérez-Benítez, A., Enseñando simetría con un balón de fútbol soccer o con un modelo tridimensional de buckminsterfullereno que muestra sus elementos de simetría, *Educ. quim.*, **9(4)** 1998.
- Wells, A.F., *Models in Structural Inorganic Chemistry*, Oxford University Press, New York-Oxford, 1970.