

Un ejemplo de modelación en ingeniería química a través del uso de los balances macroscópicos y los parámetros empíricos que describen la transferencia de *momentum* (factor de fricción) y de energía (coeficiente convectivo de transferencia de calor).

Entropía mínima para transferencia de energía

Luis Ángel López Latorre y Reynaldo Sandoval González*

Summary (*Minimum entropy for energy transfer*)

The energy and entropy balances are used to relate the energy lost during the internal flow in a tube and the energy transfer across the cylindrical pipe wall using a workable procedure for engineering purposes. The output entropy is minimized with respect to the fluid flow in the tube and illustrated by an example. The problem is developed thorough the required equations showing the impossibility to obtain an explicit solution which requires instead an iterative numerical method. The application of the technique to the example shows the minimization effect over the selected variables.

Resumen

En este trabajo se combinan los balances de energía y entropía con métodos ingenieriles para calcular la energía perdida por el flujo de un fluido en el interior de un tubo y la energía intercambiada con la pared del tubo. Se presenta un método para minimizar el valor de la entropía de salida con respecto al flujo de materia y se ilustra el uso del método. Se plantea el sistema de ecuaciones que describen el problema y se observa que no permite obtener una solución directa, por lo que se recurre a un proceso iterativo que permita obtener la solución. Se aplica el método a un caso particular y se muestra el efecto del proceso de minimización sobre las variables de mayor interés.

Introducción

La complejidad de los fenómenos que estudia la ingeniería química se ha venido incrementando y progresivamente ha sido posible enfrentar situaciones de mayor dificultad como fabricar productos con altos niveles de pureza o bien operar procesos con altos niveles de control. Sin embargo, procesos aparentemente sencillos como el flujo interno de fluidos en tubos o la transferencia de energía térmica cuando se presenta diferencia de temperatura entre el fluido y la pared

del tubo siguen siendo fenómenos cuyo entendimiento es incompleto.

Esta falta de comprensión ha provocado que se recurra a modelos empíricos sencillos que permitan explicar el efecto de las principales variables en los cálculos de tipo ingenieril. Así, por medio de un modelo para el factor de fricción es posible calcular la energía perdida a lo largo del tubo y mediante un modelo para el coeficiente de transferencia de energía térmica puede calcularse la energía que intercambia el fluido al circular por el tubo.

Desde el punto de vista educativo es sumamente interesante analizar el efecto de las variables que intervienen en este tipo de fenómenos. Así, por ejemplo resulta útil que en los cursos convencionales de Flujo de Fluidos se analice el efecto de las características del ducto, el régimen de flujo o las propiedades del fluido sobre el trabajo perdido a causa de la fricción, o que en los cursos de Transferencia de Calor se analice el efecto de dichas variable sobre el coeficiente convectivo de transferencia de energía térmica.

Con respecto a los aspectos pedagógicos anteriores, es necesario entender que las suposiciones de continuidad y homogeneidad en el comportamiento de los materiales constituyen la base de muchos modelos de cálculo, ya que su validez depende de ignorar los espacios vacíos que presenta la estructura de la materia.

En este contexto, el trabajo que se presenta analiza el flujo de un fluido en el interior de un tubo recto de área transversal circular que intercambia energía debido a una diferencia de temperatura con la pared del tubo. Se propone un método novedoso para minimizar el cambio de entropía con respecto al flujo de materia manteniendo constantes el valor del diámetro, la superficie de transferencia y la temperatura de la pared. También se presenta un ejemplo en el cual se ilustra el uso del método de minimización.

El trabajo de los ingenieros algunas veces consiste en aplicar este tipo de modelos para encontrar procesos que utilicen la energía en la forma más eficiente posible, lo cual conduce normalmente al análisis de la variable entropía. Esta aplicación es sencilla pero constituye la idea principal con la que se podría llevar a cabo el diseño eficiente de intercambiadores de calor con objeto de aprovechar al máximo la transferencia de energía. La metodología puede extenderse a procesos que incluyan sistemas con reacción química, aunque como podemos intuir la descripción cuan-

* A quien debe enviarse toda la correspondencia:

Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, UNAM. Conjunto "E" Ciudad Universitaria, 04510 México, DF. Tel. 5622 5353, fax 5622 5355.

Recibido: 19 de marzo de 2001; aceptado: 11 de junio de 2001.

titativa del fenómeno requerirá un modelo con una estructura mucho más elaborada.

Planteamiento del problema

Consideremos el flujo en una tubería horizontal rectilínea con diámetro interno D y longitud L , que se encuentra sujeto a la transferencia de energía debida a una temperatura de pared T_w , mayor o menor que T_1 y T_2 ; en forma esquemática tenemos:

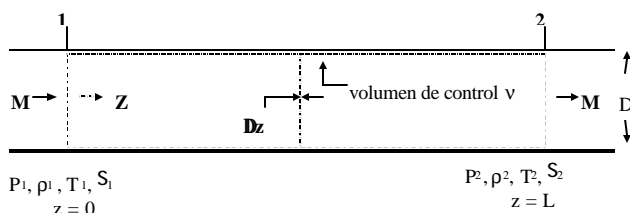


Figura 1.

El volumen de control $v = \pi D^2 L/4$ establece el espacio donde se llevan a cabo los procesos simultáneos para las transferencias de cantidad de movimiento y energía desde la sección 1 a la 2. El área de flujo $A_f = \pi D^2/4$ es perpendicular a la dirección axial z , mientras que el área de transferencia de energía $A_c = \pi DL$ es paralela a z .

Nuestro objetivo es obtener una expresión analítica para $\Delta S \approx S_2 - S_1$ y obtener el valor más pequeño mediante su minimización, ya que desde el punto de vista energético sería trabajar con el proceso más adecuado.

Y como todos los modelos de ingeniería (o ecuaciones prácticas de cálculo) están basados en suposiciones físicas, debemos establecer el conjunto de las mismas:

- a) proceso independiente del tiempo;
- b) fluido homogéneo;
- c) no hay trabajo mecánico;
- d) no existe diferencia de energía potencial;
- e) efectos de energía cinética despreciables;
- f) velocidad y temperatura completamente desarrolladas, y
- g) fluido newtoniano.

Balances macroscópicos diferenciales

Con las suposiciones realizadas, para líquidos incompresibles (ρ constante) o gases en los que ρ no cambia más del 20% desde 1 a 2, podemos adaptar los balances integrados (Bird *et al.*, 1960) como:

$$1. \text{ materia: } M = A_f G = \text{constante} \quad (1)$$

$$2. \text{ energía mecánica: } (dP/\rho) + f (1/D) (V^2/2) dz = 0 \quad (2)$$

$$3. \text{ energía térmica: } Mc_p dT = \pm [\pi Dh (LMTD)] dz \quad (3)$$

donde el signo (+) es para calentamiento y el (-) para enfriamiento.

Utilizando las ecuaciones (2) y (3) puede probarse que el balance diferencial de entropía es:

$$4. \text{ entropía: } dS = [(f M^2/2DA_f^2 \rho^2) \pm (\pi Dh (LMTD)/M)] dz/T \quad (4)$$

Desarrollo

Como h se obtiene calculando las propiedades a la temperatura volumétrica promedio T_b (Holman, 1981) usando normalmente ecuaciones empíricas, extenderemos la idea para utilizar también una presión volumétrica promedio P_b con objeto de tener la posibilidad de incluir la variación de las propiedades con la presión. Esta aproximación provoca que f se pueda considerar constante en las ecuaciones, proporcionando una expresión para la caída de presión al integrar la ecuación 2 como:

$$\Delta P = 8f (L/D) (M^2/\pi^2 D^4 \rho) \quad (5)$$

Debido a que los balances 2 y 3 se mantienen independientes, es fácil demostrar que este último proporciona las distribuciones axiales de temperatura T y calor Q_c siguientes:

$$\text{Ln} [(T - T_w)/(T_1 - T_w)] = \pm (\pi Dh / Mc_p) z \quad (6a);$$

$$Q_c = \pm Mc_p [T(z) - T_1] \quad (6b)$$

y calor total Q_{ct} en $[0,L]$ como:

$$Q_{ct} = \pm Mc_p (T_2 - T_1) \quad (7a);$$

$$Q_{ct} = \pi DLh (LMTD) \quad (7b)$$

La ecuación (6a) se inserta ahora en el balance 4 y se lleva cabo la integración sujeta a las condiciones frontera $S(z=0) = S_1$ y $S(z=L) = S_2$ para obtener finalmente en forma adimensional:

$$\psi = (A \pm B) [1 + (\gamma/\beta)] \quad (8)$$

donde:

$$\psi = (\delta/c_p) (S_2 - S_1); \delta = T_w/(T_1 - T_w); \gamma = \pm \text{Ln}(T_1/T_2) \quad (8a)$$

$$A = 8 f L M^2/\pi^2 D^5 \rho^2 c_p (T_1 - T_w);$$

$$B = \beta \text{LMTD}/(T_1 - T_w);$$

$$\beta = \pi DLh / Mc_p \quad (8b)$$

También es claro que el procedimiento de minimización de $(S_2 - S_1)$ equivale a minimizar ψ .

En particular, por ejemplo, deseamos establecer el procedimiento para conocer el valor de M que hace ψ mínimo; es decir,

$$\frac{\partial \psi}{\partial M} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial A}{\partial M} \pm \frac{\partial B}{\partial M} \right] \left[1 + \frac{\gamma}{\beta} \right] - \gamma \left[\frac{A \pm B}{\beta^2} \right] \frac{\partial \beta}{\partial M} = 0$$

Usando los elementos matemáticos necesarios se demuestra que:

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{A}{M} \left[2 + M \frac{\partial f}{\partial M} \right]; \frac{\partial B}{\partial M} = \lambda \frac{\partial \beta}{\partial M};$$

$$\lambda = \frac{LMTD}{T_1 - T_w}; \frac{\partial \beta}{\partial M} = \frac{\beta}{Mh} \left[M \frac{\partial h}{\partial M} - h \right]$$

Relaciones que evidentemente dependen del tipo de flujo.

Flujo laminar completamente desarrollado: Las ecuaciones para f (Bird *et al.*, 1960) y Nu (Sieder y Tate, 1936) son:

$$f = \frac{64}{Re}; Nu = 1.86 \varnothing \left[RePr \frac{D}{L} \right]^{1/3}; \varnothing = \left[\frac{\mu}{\mu_b} \right]^{0.14};$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = -\frac{Re}{M}; \frac{\partial h}{\partial M} = \frac{kNu}{3DM}$$

Flujo turbulento completamente desarrollado: Usando la ecuación para f de Swamee y Jain (1976) en la que por claridad definimos $c = 2 \text{Log}(e)$ y la de Nu (Sieder y Tate, 1936) tenemos:

$$\frac{1}{f} = \left[c \text{Ln} \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2; Nu = 0.027 \varnothing (Re^{0.8}) (Pr^{1/3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \frac{10.332c f^{1.5}}{\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right] Re^{0.9}} \left[\frac{1}{M} \right]; \frac{\partial h}{\partial M} = 0.8 \frac{kNu}{DM}$$

A pesar de las suposiciones hechas para obtener la ecuación 8, es evidente que el conjunto anterior de ecuaciones es complejo sin posibilidad de proporcionar una ecuación explícita en M, por lo que el procedimiento de cálculo será numérico e iterativo.

Aplicación del método

Para ejemplificar el uso del método se analiza el caso particular en donde se tiene el flujo de agua líquida en una tubería con diámetro $D = 2.54$ cm, longitud $L = 3$ m y rugosidad absoluta $\varepsilon = 4.572 \times 10^{-5}$ m, que entra en la sección 1 (ver figura 1) a 60°C y 500 kPa. Cuando la temperatura de la pared del tubo $T_w = 80^\circ\text{C}$ se desea conocer la temperatura de salida T_2 , el flujo másico M, el calor transferido Q_{ct} , la presión de salida P_2 , el cambio de presión ΔP y el Reynolds

Re; también las entropías de entrada y salida S_1 , S_2 y S_{2c} (i.e. S_2 calculado en la sección 2). Los valores de S_1 y S_2 se obtendrán usando la referencia de ediciones Alfaomega (1988); con S_1 se obtendrán los valores calculados de S_{2c} y ΔS mediante la ecuación 8. El conjunto de cantidades mencionado deberá obtenerse sin minimización y con minimización.

La solución de este problema demanda claramente el uso de un algoritmo numérico que incorpore un proceso iterativo, debido a la forma no lineal del conjunto de ecuaciones desarrolladas. Los valores obtenidos en este proceso iterativo se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1

Variable	Sin minimización	Con minimización
T_2 ($^\circ\text{C}$)	71.5	70.4
M (kg/s)	0.009934	0.52282
Q_{ct} (J/kg)	48,087	43,492
S_1 (J/kg K)	831	831
S_2 (J/kg K)	973	959.4
S_{2c} (J/kg K)	973	959.2
ΔS (J/kg K)	142	128.2
P_2 (Pa)	499,998.7	498,340
ΔP (Pa)	1.3	1660
Re	1,173	61,324

A partir de los datos en la tabla podemos observar que a las condiciones conocidas de P_1 , T_1 , y S_1 la ecuación 8 propuesta predice un valor de entropía S_{2c} que es idéntico con el leído de la referencia 5 para el proceso sin minimización, y para el cálculo con minimización la diferencia porcentual relativa $[100(S_{2c} - S_2) / S_2]$ es de -0.021% debido a la independencia entre los balances 2 y 3 ya que esto no permite que P_b corresponda exactamente a $P(T_b)$.

Otro resultado interesante es que una reducción en ΔS para las dos formas de cálculo del 10.8% modifica el tipo de flujo, de laminar a turbulento, provocando un aumento de 5,170% en la velocidad de flujo, una reducción en T_2 de 1.54%, aumento en ΔP de 127,592% pero todavía muy por abajo del valor recomendado de 69 kPa y una disminución de 10.6% en el calor transferido por unidad de masa.

Conclusiones

En este trabajo se ha podido apreciar la manera en que se pueden combinar los balances de energía y entropía, con los métodos ingenieriles que permiten calcular la energía perdida por el flujo de un fluido en el interior de un tubo y la energía intercambiada con la pared del tubo, para obtener

NOMENCLATURA	
c_p	Calor específico a presión constante (J/kg K)
f	Factor de fricción de Darcy para flujo laminar ($Re \leq 2,100$) y flujo turbulento ($Re \geq 4000$)
G	Velocidad másica por unidad de área A_f , $G = \rho V$ (kg/m ² s)
h	Coefficiente convectivo de transferencia entre el fluido y la superficie interna de la tubería (W/m ² K)
k	Conductividad térmica (W/m K)
LMTD	Diferencia de temperaturas logarítmica promedio que provoca la transferencia de energía a través de A_c . $LMTD = [(T_1 - T_w) - (T_2 - T_w)] / \ln \left(\frac{T_2 - T_w}{T_1 - T_w} \right)$
M	Velocidad másica (kg/s)
Nu	Número de Nusselt, $Nu = hD/k$
P	Presión (Pa)
ΔP	Caída de presión, $\Delta P = P_1 - P_2$ (Pa)
P_b	Presión volumétrica promedio, $P_b = (P_1 + P_2)/2$ (Pa)
Pr	Número de Prandtl, $Pr = c_p \mu / k$
Q_{ct}	Calor por unidad de tiempo (W)
\underline{Q}_{ct}	Calor por unidad de masa (J/kg)
Re	Número de Reynolds, $Re = \rho V D / \mu$
S	Entropía específica (J/kg K)
T	Temperatura (K)
T_b	Temperatura volumétrica promedio, $T_b = (T_1 + T_2) / 2$ (K)
V	Velocidad promedio de flujo, $V = M / (A_f \rho)$ (m/s)
ϵ	Rugosidad absoluta (m)
ρ	Densidad (kg/m ³)
μ	Viscosidad (kg/m s)

información acerca del comportamiento de un sistema. Se ha presentado un método para minimizar el valor de la entropía de salida con respecto a la cantidad de material que circula por el tubo en la unidad de tiempo y se ha ilustrado el uso del método empleando agua como fluido de trabajo.

Se ha mostrado que a pesar de las suposiciones implícitas en los métodos ingenieriles, el sistema de ecuaciones que resulta del proceso de minimización es complejo y no permite obtener una solución directa, por lo que se ha recurrido al uso de un proceso iterativo que se incorpora en el programa que genera la solución.

Mediante la aplicación del método a una situación particular se ha mostrado el efecto que tiene el proceso de minimización sobre el régimen de flujo y sobre los valores de las variables más importantes. ▣

Bibliografía

- Bird, R.B., W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley International Edition, 1960. Capítulos 6, 7 y 15.
- Ediciones Alfaomega SA de CV, *Tablas de Vapor*, México, 1988.
- Holman, J.P., *Heat Transfer*, 5th ed., New York, McGraw-Hill, 1981.
- Sieder, E.N. and C.E. Tate, Heat Transfer and Pressure Drop of Liquids in Tubes, *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 1429 (1936).
- Swamee, P.K. and A.K. Jain, *J. Hydraulic Division of the ASCE*, **102**, (HY5), 657-664, May 1976.