

Caída de un cuerpo esférico, inicialmente en reposo, en un medio denso y viscoso

Alberto Rojas-Hernández* y Ma. Teresa Ramírez Silva

Abstract

In this paper the integration of the movement equation of a sphere falling through a dense and viscous medium, considering weight, Arquimede's principle and friction by Stokes law is presented. This simple model has been applied to simulate experimental conditions and to interpret experimental results. It has been demonstrated that experiments in water do not follow the model due to turbulence effects, but that the model may fit experimental results with more viscous liquids inside the magnitude of experimental errors. The use of these cheap experiments is recommended for the teaching of experimental methodology, on Physics, Chemistry, Engineering and Pharmaceutics undergraduate courses.

Resumen

En este trabajo se presenta la integración de las ecuaciones de movimiento de una esfera cayendo a través de un medio denso y viscoso, considerando su peso, el principio de Arquímedes y la fricción mediante la ley de Stokes. Este sencillo modelo se aplicó para simular condiciones y para interpretar resultados experimentales. Se demuestra que los experimentos en los que se utilizó agua como fluido no son explicados por el modelo debido a efectos de turbulencia, pero que éste permite ajustar resultados experimentales cuando se utilizan líquidos más viscosos, dentro de los errores experimentales. El uso de estos experimentos de bajo costo se recomienda para la enseñanza de la metodología experimental, en cursos de primer año de licenciatura de Física, Química, Ingeniería y Farmacia.

Introducción

En la enseñanza de tecnologías e ingenierías de carreras del área de la Química son importantes los conceptos del comportamiento fisicoquímico de partículas esféricas en diferentes fluidos, como es el caso de la sedimentación de suspensiones o de los reactores de lecho fluidizado (ver Bird *et al.*, 1993; Toral, 1973, y Lachman *et al.*, 1970).

El objetivo del presente trabajo es presentar un experi-

mento sencillo y económico que permite entender los principios elementales asociados a estos fenómenos. El primer concepto a adquirir es el caso más simple que resulta ser la caída de un cuerpo esférico, inicialmente en reposo, en un medio denso y viscoso.

Para saber $\frac{1}{4}$

En el libro de Sears y Zemansky (1973) se presenta el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 1.

En el mismo libro se presenta la ecuación vectorial que describe matemáticamente la fuerza resultante que actúa sobre el objeto (en el caso que la velocidad no sea tan grande que promueva efectos de turbulencia en el fluido). Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el objeto (que son el peso, el empuje y la resistencia) apunta hacia abajo:

$$F = m_o \frac{dv}{dt} = m_o \frac{d^2 h}{dt^2} = m_o g - \rho_m V_o g - 6\pi \eta r v \quad (1)$$

siendo m_o la masa del objeto, t el instante o tiempo considerado, v la velocidad que tiene el objeto en el tiempo t , g la aceleración de la gravedad, ρ_m la densidad del medio, V_o el volumen del objeto (que es el mismo que va desplazando del fluido al caer), η la viscosidad (o coeficiente de viscosidad) del medio, y r el radio del objeto.

El primer término del miembro derecho de la ecuación (1) es el peso del objeto, el segundo término es la fuerza de

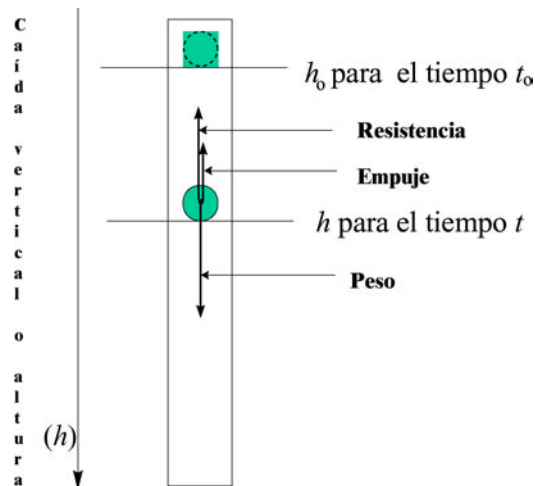


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre para el problema planteado.

* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Departamento de Química. AP 55-534, México, D.F.

Correo electrónico: suemi918@xanum.uam.mx

empuje (o fuerza boyante, establecida por el principio de Arquímedes), y el tercer término es la fuerza de resistencia que el medio ofrece al paso de un objeto esférico, por su viscosidad (dada por la ley de Stokes).

Velocidad terminal de un objeto esférico cayendo en un medio denso y viscoso

También en el libro de Sears y Zemansky (1973) se presenta la velocidad que alcanza el objeto en el caso que se igualen las fuerzas; de manera que

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{\max} \approx \left(\frac{dh}{dt}\right)_{\max} = v_{\max} = v_{\text{terminal}} = \frac{2(\rho_o - \rho_m)gr^2}{9\eta} \quad (2)$$

donde ρ_o es la densidad del objeto.

La velocidad que alcanza el objeto al igualarse las fuerzas es la máxima que puede adquirir y, como muestra la ecuación 2, es llamada velocidad terminal. También la ecuación 2 muestra que es posible determinarla experimentalmente si se mide la diferencia de alturas recorrida y el intervalo de tiempo en que el objeto lo hace.

Ya que se ha determinado la velocidad terminal, es posible calcular la viscosidad, despejándola de la misma ecuación 2.

$$\eta = \frac{2(\rho_o - \rho_m)gr^2}{9v_{\text{terminal}}} \quad (3)$$

La viscosidad es uno de los parámetros más relevantes a determinar en mecánica de fluidos, de sumo interés para la caracterización de problemas tecnológicos y de ingeniería. De hecho, este método se ha aplicado para construir viscosímetros de esfera que se han utilizado en las industrias automotriz, alimentaria, y farmacéutica, entre otras.

¼simular¼

Las ecuaciones (2) y (3) sólo son válidas en el equilibrio de fuerzas, pero no siempre se alcanzan estas condiciones. Para saber en qué casos se pueden utilizar sería necesario tener la descripción completa del movimiento y para ello se necesita la integración de la ecuación 1, para que las variables dinámicas queden parametrizadas como una función del tiempo. En cursos introductorios de ingeniería o tecnología, es un buen ejercicio presentar esta integración porque no es tan simple, ya que la fuerza de resistencia depende de la velocidad; además, esto es indispensable si se desea comprender el fenómeno y elegir las condiciones adecuadas para poder hacer las determinaciones de viscosidad. Se presenta esta integración a continuación ya que no se encuentra el desarrollo en ninguno de los libros citados y porque sin estas ecuaciones tampoco se podrían realizar simulaciones tan fácilmente.

Primera integración de la ecuación de movimiento para obtener la velocidad del objeto en función del tiempo

Se puede expresar la masa del objeto como el producto de su densidad (ρ_o) por su volumen, y se puede escribir la ecuación (1) en la siguiente forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(\rho_o - \rho_m)V_o g}{m_o} - \frac{6\pi\eta r}{m_o} v \quad (4)$$

de manera que, si se hace el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{(\rho_o - \rho_m)V_o g}{m_o} - \frac{6\pi\eta r}{m_o} v ; du = -\frac{6\pi\eta r}{m_o} dv \quad (5)$$

Sustituyendo entonces la ecuación (5) en la (4), reordenando términos e integrando, se obtiene

$$\ln u - \ln u_i = -\frac{6\pi\eta r}{m_o} t \quad (6)$$

El análisis dimensional del coeficiente de la variable t en la ecuación (6) demuestra que este sistema presenta un *tiempo característico* (τ), definido por la ecuación

$$\tau = \frac{m_o}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho_o r^2}{9\eta} \quad (7)$$

Introduciendo las ecuaciones (5) y (7) en la (6) y reagrupando términos se obtiene

$$\left[1 - \frac{6\pi\eta r}{(\rho_o - \rho_m)V_o g} v\right] = \exp[-(t/\tau)] \quad (8)$$

Recordando ahora que la velocidad que alcanza el objeto en el tiempo t es la derivada de la altura que ha recorrido con respecto al tiempo y reordenando la ecuación (8), se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = v &= (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau[1 - \exp[-(t/\tau)]] = \\ &= \frac{(\rho_o - \rho_m)V_o g}{6\pi\eta r} \{1 - \exp[-(t/\tau)]\} \end{aligned} \quad (9)$$

La ecuación (9) ya es una expresión de velocidad como función del tiempo, que además demuestra que para $t \gg \tau$ el objeto alcanza una *velocidad terminal* constante, tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{\max} \approx \left(\frac{dh}{dt}\right)_{\max} &= v_{\max} = v_{\text{terminal}} = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau = \\ &= \frac{(1 - \rho_m/\rho_o)g m_o}{6\pi\eta r} \end{aligned} \quad (10)$$

Recordando también que el volumen para un objeto esférico es $V_o = (4/3)\pi r^3$ se puede demostrar que la ecuación (10) es igual a la ecuación (2), lo que implica que en la primera integración se ha seguido un procedimiento correcto.

Segunda integración de la ecuación de movimiento para obtener la distancia vertical recorrida (o altura) en función del tiempo

Para determinar ahora la relación de la altura como función del tiempo, es necesario integrar la ecuación (9). Esta ecuación es de variables separables, de manera que

$$dh = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau \{1 - \exp[-(t/\tau)]\} dt = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau dt - \exp[-(t/\tau)] dt \quad (11)$$

Los límites de integración para la integral de la diferencial de la altura deben tomarse desde el tiempo inicial (considerada arbitrariamente como cero para el tiempo inicial, también tomado como cero) hasta la altura h , que se alcanza en el tiempo t . La primera integral a realizar en el miembro derecho de la ecuación (11) es directa, porque la diferencial de t está multiplicada por un factor independiente de la altura y del tiempo. Por otra parte, una forma sencilla de integrar la segunda parte del miembro derecho de la ecuación (11) es realizar el cambio de variable

$$\omega = \exp[-(t/\tau)]; \quad d\omega = -\frac{1}{\tau} \exp[-(t/\tau)] dt \quad (12)$$

por lo que también es cierto que

$$h = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau r + \int_1^\omega (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau^2 d\omega \quad (13)$$

ya que ω toma el valor de la unidad cuando t toma el valor de cero.

Finalmente, al realizar la integral de la ecuación (13), sustituyendo en ella la ecuación (12) y factorizando los términos comunes se obtiene la relación entre la altura y el tiempo

$$h = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau (t + \tau \exp[-(t/\tau)] - \tau) = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau (t - \tau \{1 - \exp[-(t/\tau)]\}) \quad (14)$$

Es posible demostrar que las ecuaciones (1)-(14) también se cumplen en el caso del movimiento de objetos menos densos que el fluido (que entonces en vez de caer, flotan), pero permutando las densidades del objeto y del medio si se desean alturas positivas.

Casos límite de la relación de la altura como una función del tiempo

* Si $t \ll \tau$

Para tiempos de caída mucho menores que el tiempo característico, la función exponencial involucrada en la ecuación (14) puede aproximarse por

$$\exp[-(t/\tau)] \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (15)$$

Introduciendo la ecuación aproximada (15) en la (14), se tiene que

$$h \approx (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau \left\{ t - \tau \left[1 - \left[1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right] \right] \right\} = \frac{1}{2} (1 - \rho_m/\rho_o) g t^2 \quad (16)$$

No es de extrañar que la ecuación (16) sea bastante parecida a la ecuación de caída libre de un cuerpo. La única diferencia es que dicha ecuación ahora está multiplicada por un factor $(1 - \rho_m/\rho_o)$, que es menor que la unidad, y que proviene del empuje establecido por el principio de Arquímedes. Esto implica que en los primeros instantes de la caída de un cuerpo esférico inicialmente en reposo, en un medio denso y viscoso, se podría despreciar la resistencia que ejerce el medio a través de la viscosidad. Esto se debe a que la ley de Stokes establece una fuerza (resistiva) que es proporcional a la velocidad que adquiere el objeto.

* Si $3\tau < t < 10\tau$

Para este intervalo de tiempos de caída, el valor de la función exponencial ha decaído prácticamente a cero. Haciendo ahora esta aproximación en la ecuación (14) se tiene que

$$h \approx (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau(t - \tau) = (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau t - (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau^2 \quad (17)$$

Es evidente que la ecuación (17) establece para la altura una función lineal con el tiempo, con ordenada al origen negativa e igual a $[(\rho_m/\rho_o) - 1]g\tau^2$ y pendiente positiva igual a $[1 - (\rho_m/\rho_o)]g\tau$. Ésta es la velocidad terminal dada por la ecuación (10).

Los límites propuestos para este caso se establecieron con criterios matemáticos y por comparación directa de los valores de la función representada en la ecuación (17), y la que se presenta en el siguiente caso (ecuación (18)).

* Si $\tau \ll t$

En este último caso se puede despreciar el término τ frente a t en la resta de la ecuación (17), por lo que haciendo esta segunda aproximación se obtiene

$$h \approx (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau(t - \tau) \approx (1 - \rho_m/\rho_o)g\tau t \quad (18)$$

La ecuación (18) implica que la altura sigue una relación directamente proporcional con el tiempo de caída del objeto, con una constante de proporcionalidad igual a $[1 - (\rho_m/\rho_o)]g\tau$ que, como se recordó anteriormente, es la velocidad terminal del objeto.

Tanto en el caso anterior como en éste, un análisis gráfico

de la función $h = h(t)$ debe dar puntos experimentales alineados en una recta. Los parámetros de las rectas (considerando sus incertidumbres respectivas) permitirían determinar experimentalmente el valor del *tiempo característico* del sistema si se conocen las densidades del medio y del objeto (aunque en el caso anterior, el valor absoluto del cociente de la ordenada al origen y de la pendiente arrojaría directamente el valor de τ).

Simulaciones de la altura recorrida por objetos, en diferentes medios, como una función del tiempo
Utilizando las ecuaciones (14 y 16-18) es posible simular

diferentes casos para seleccionar las condiciones más interesantes en que se podrían realizar los experimentos. Para las simulaciones en este trabajo se utilizó una hoja de cálculo Excel 7.0 para Windows 95 de Microsoft. Algunas de estas simulaciones se presentan en la figura 2.

En las figuras 2a y 2b se puede observar que los objetos de acero de densidad igual a 8.0 g mL^{-1} caen de acuerdo con el modelo cuadrático de la ecuación (28), y que la distancia vertical recorrida, como una función del tiempo, es prácticamente la misma para objetos de radio 2 mm o 1 cm. Además, se prevé que la dificultad experimental principal sería la

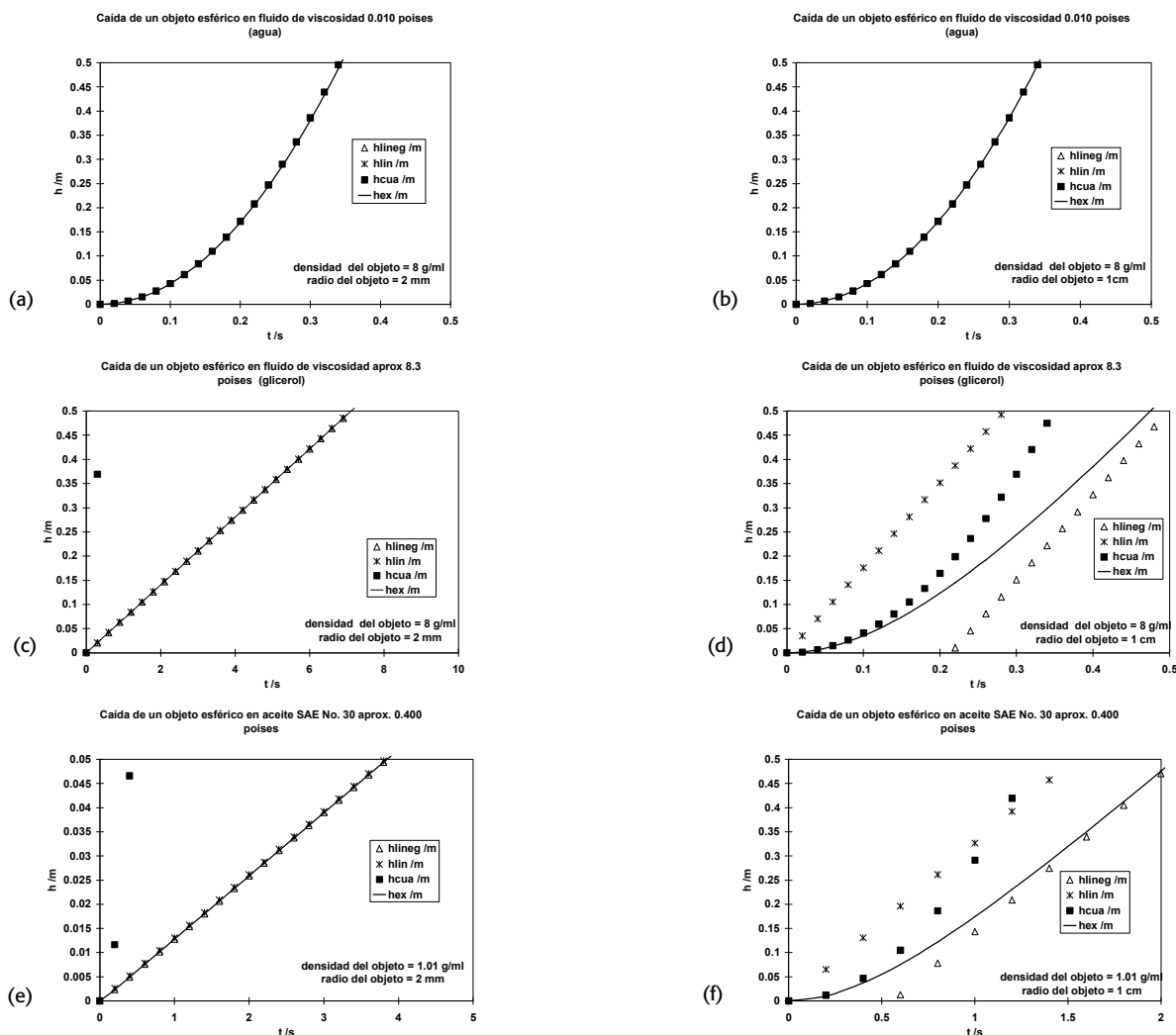


Figura 2. Simulaciones de la altura recorrida por objetos esféricos en caída dentro de medios densos y viscosos. (a) y (b) Simulaciones de la caída de esferas de acero de densidad promedio 8.0 g mL^{-1} en agua a 20°C . (c) y (d) Simulaciones de la caída de esferas de acero de densidad promedio 8.0 g mL^{-1} en glicerol a 20°C . (e) y (f) Simulaciones de la caída de esferas de plástico de densidad promedio 1.01 g mL^{-1} en aceite para motor de automóvil del número 30 (SAE 30) a 20°C . hlineg representa el modelo con ordenada al origen negativa, hlin representa el modelo directamente proporcional, hcua el modelo cuadrático y hex el modelo general, por la función exponencial. En las figuras 2a, 2c y 2e el radio del objeto es de 2 mm en tanto que en las figuras 2b, 2d y 2f es de 1.0 cm.

determinación del tiempo de caída, para alturas típicas en un experimento de laboratorio.

Las figuras 2c a 2f muestran que existe una dependencia muy grande del fenómeno para medios más viscosos que el agua, de acuerdo con el radio y la densidad del objeto. Al parecer y de acuerdo con estas simulaciones, lo más fácil de determinar es el caso límite en donde el modelo general coincide con las tendencias lineales (ecuaciones (17) y (18), que parten del origen o no, pero que también en esas condiciones prácticamente son iguales) y en donde se alcanza velocidad terminal para el objeto desde tiempos muy cortos (figuras 2c y 2e)). Las simulaciones de la figura 2 permitieron seleccionar las características más convenientes de los objetos y de los fluidos, así como las alturas desde donde se lanzaría el objeto en los experimentos.

¼ experimentar¼

Así, se decidió trabajar con un medio viscoso (shampoo Caprice) y otro poco viscoso (agua) (esperando encontrar diferentes casos límite), esferas de radio pequeño (aproximadamente $2\text{ mm} < r < 5\text{ mm}$) de materiales diferentes (plástico de dos densidades diferentes y acero). Todos los materiales se adquirieron en un supermercado, excepto el agua que se tomó de la llave.

Para la caracterización de los materiales se utilizó un vernier de plástico, con resolución de 1/10 mm, para la medición del radio de los objetos; una balanza analítica, con resolución de 0.001 g, para la medición de la masa de los objetos y del shampoo (para calcular la densidad); una probeta de 10 mL, con resolución de 0.1 mL, para la medición del volumen de shampoo de la masa determinada para calcular la densidad. La determinación de las propiedades se realizó por triplicado y el valor promedio de éstas fue utilizado para los cálculos realizados, así como el doble de su desviación estándar como medida de incertidumbre. Los valores obtenidos se muestran en la tabla 1.

Para la realización del experimento se utilizaron frascos de plástico y vidrio transparentes de diferentes capacidades y alturas; un flexómetro con resolución de 1 mm para la

medición de la altura y un cronómetro digital con resolución de 0.01 s para la determinación del tiempo transcurrido en la caída.

Descripción del experimento

Se llenan los frascos de plástico con agua o con shampoo casi hasta el borde, dependiendo del experimento. El objeto se humedece en el líquido previamente a su caída, sujetándolo con unas pinzas pequeñas (pinzas de depilar). Después de lo anterior se coloca en el centro de la boca del recipiente y se sumerge en la superficie como se muestra en la figura 1; en este momento se libera y se acciona el cronómetro simultáneamente; el cronómetro se detiene en el momento justo en que llega al fondo del recipiente.

Una estimación pesimista de las incertidumbres en altura y tiempo lleva a considerar la incertidumbre en altura como igual al diámetro de las esferas utilizadas y la incertidumbre en tiempo es del orden de 0.5 s (tomada como el doble del tiempo entre dos activaciones sucesivas del cronómetro lo más rápido posible).

El tratamiento tradicional de los datos

La figura 3 muestra los resultados obtenidos para los experimentos realizados, con excepción del experimento de esferas de acero cayendo en agua, ya que en ese caso los tiempos de caída fueron extremadamente rápidos como para intentar medirlos, aun con incertidumbres del orden del 50% de error.

A primera vista no parece haber razón para no considerar que el comportamiento del fenómeno no es lineal. Así, en la tabla 2 se presentan los resultados del ajuste de regresión lineal de las rectas, obtenidas por mínimos cuadrados, que se presentan en la figura 3, así como las viscosidades y los tiempos característicos calculados con la ecuaciones (3) y (7).

De acuerdo con las simulaciones realizadas para los experimentos en agua se esperaría obtener una relación cuadrática para la altura como función del tiempo (figuras 2a y 2b); sin embargo, los puntos experimentales parecen seguir una relación lineal (figuras 3a y 3b). Además, las

Tabla 1. Especificaciones experimentales de los objetos y fluidos utilizados.

Objeto o fluido	Diámetro /mm	Masa /g	Volumen /mL	Densidad /g mL ⁻¹
Esfera verde (plástico poco denso)	3.96 ± 0.10	0.033 ± 0.001	0.032 ± 0.001	1.01 ± 0.11
Esfera anaranjada (plástico denso)	5.77 ± 0.16	0.123 ± 0.002	0.101 ± 0.004	1.22 ± 0.14
Esfera de acero	4.45 ± 0.10	0.354 ± 0.005	0.046 ± 0.002	7.68 ± 0.72
Shampoo	—	—	—	1.003 ± 0.004
Agua	—	—	—	0.9995*

* Tomado de Sears y Zemansky (1973).

Tabla 2. Valores de regresión, y viscosidad y tiempos característicos calculados a partir de las ecuaciones (3) y (7), y de los experimentos mostrados en la figura 3.

Sistema	Esferas anaranjadas en agua	Esferas verdes en agua	Esferas de acero en shampoo	Esferas anaranjadas en agua	Esferas verdes en shampoo
ordenada (m)*	-0.09 ± 0.09	0.03 ± 0.04	-0.01 ± 0.07	0.00 ± 0.06	-0.01 ± 0.02
pendiente (10^{-4}) / ($m s^{-1}$ *)	$2,100 \pm 500$	400 ± 100	200 ± 100	12 ± 6	0.83 ± 0.34
r^2	0.972	0.989	0.913	0.923	0.974
η (poises)	0.197	0.023	31.19	33.55	8.48
τ (s)	0.1149	0.3769	0.0007	0.0027	0.0010

* Los valores para el intervalo de confianza fueron calculados con Excel, para un 95% de nivel de significancia.

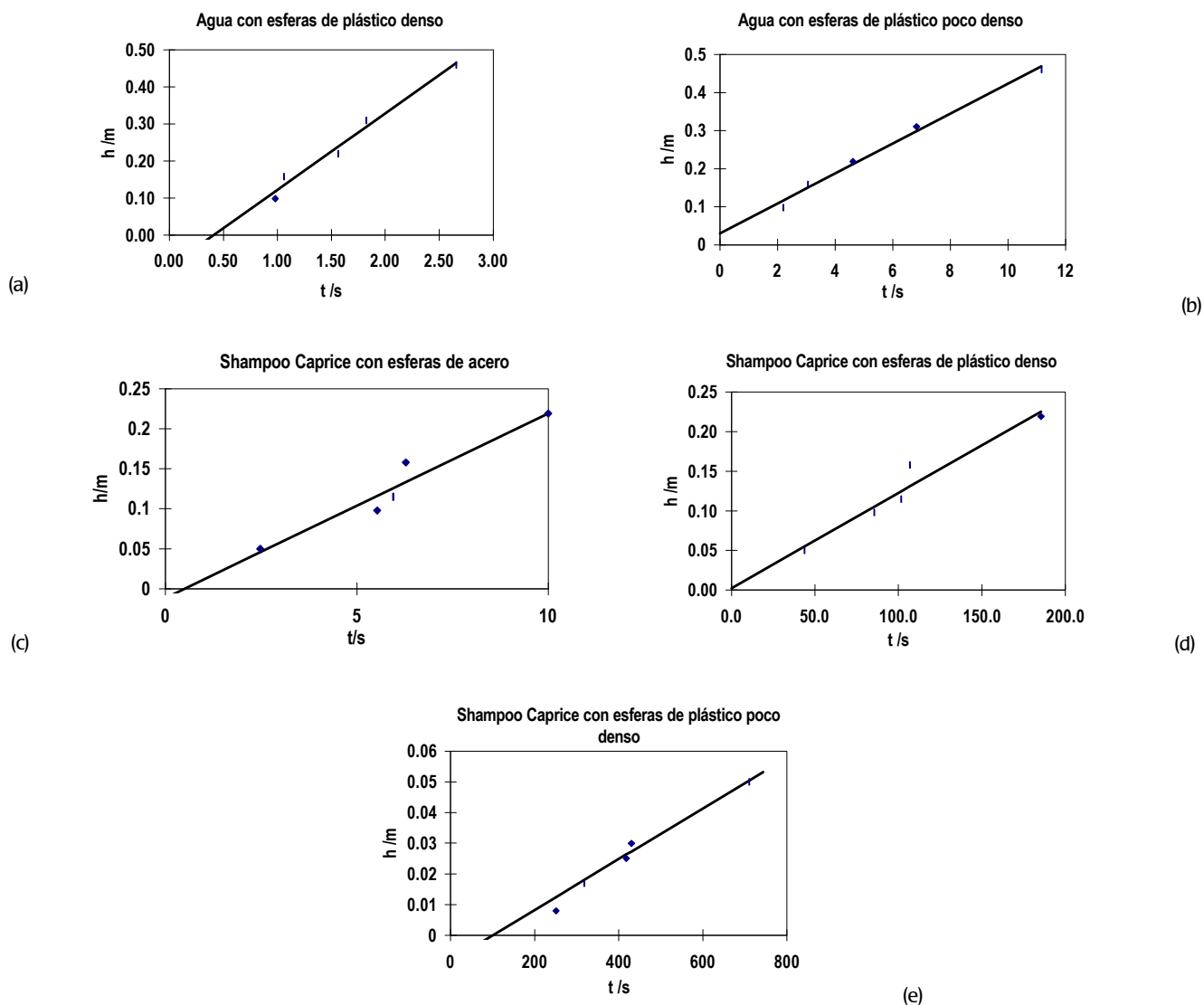


Figura 3. Resultados experimentales para cinco de los seis experimentos realizados, mostrando también la recta ajustada por mínimos cuadrados. (a) Esferas anaranjadas (plástico denso) en agua. (b) Esferas verdes (plástico poco denso) en agua. (c) Esferas de acero en shampoo. (d) Esferas anaranjadas en shampoo. (e) Esferas verdes en shampoo.

viscosidades calculadas son muy diferentes entre sí y también muy diferentes al valor reportado (0.010 poises). Los tiempos característicos calculados son directamente proporcionales a la densidad del objeto (por la ecuación (7)), lo que también resulta contradictorio, porque el tiempo característico de las esferas verdes resulta mayor que el de las esferas anaranjadas, lo que se debe a que en este cálculo se utilizó la viscosidad calculada (que no coincide con la reportada). Esto conduce a pensar que existen factores, no considerados en el modelo, que están involucrados en estos experimentos. Esta apreciación se ve reforzada por la observación de la trayectoria de caída de los objetos en agua, ya que por más cuidado que el experimentador tenga, no se puede lograr una caída vertical; en todos los casos la trayectoria de caída es tridimensional (hélices, ángulos con respecto a la normal, etcétera) y azarosa (o tal vez caótica).

Por otra parte, los experimentos realizados con shampoo coinciden con lo esperado en las simulaciones, aunque una de las viscosidades calculadas a partir de los resultados obtenidos en ellos se aleja bastante de los otros dos, que son muy parecidos. Además, el tiempo característico para la caída de las esferas verdes tampoco coincide con lo esperado, pero también esto se debe a que se usó la viscosidad calculada en cada experimento. La observación experimental de la caída de los objetos en todos estos casos es prácticamente vertical.

Como era de esperarse, la incertidumbre de la pendiente y la ordenada al origen es alta, lo que concuerda con la estimación pesimista de las incertidumbres en el tiempo y en la altura.

Al analizar los valores que se obtienen en la tabla 2, sin considerar los dos primeros renglones, podría pensarse que la linealidad es mejor en las figuras 3a, 3b y 3e, considerando solamente los valores obtenidos del coeficiente de correlación. ¿Cuál sería entonces la mejor interpretación de los resultados?

Podría concluirse que no sirve el experimento para la enseñanza de este fenómeno, que el modelo es inadecuado, que los materiales no son convenientes, etcétera.

Sin embargo, puede darse un enfoque diferente en el cual se realicen otras consideraciones que surgen de un análisis más cuidadoso de los datos y del fenómeno.

En el caso del fenómeno, se puede buscar una explicación para la diferencia de trayectorias de los objetos en los dos medios, ya que el modelo se cumple en ausencia de turbulencia.

En el caso del modelo, la simulación fue realizada utilizando materiales con características diferentes a las del experimento, excepto la de esfera de acero en agua, que no se pudo medir por los tiempos de caída tan rápidos. De los otros materiales no se hizo simulación previa porque no se conocían exactamente las propiedades que iban a presentar

los materiales adquiridos. Por lo anterior, no se puede descartar el modelo hasta comparar los resultados experimentales con la simulación, utilizando las características de los objetos y fluidos que realmente se utilizaron. Por lo que hay que volver a simular.

¼ y volver a simular

El tratamiento de los datos con un enfoque contemporáneo

Las simulaciones realizadas con la finalidad de ajustar los cálculos de un modelo matemático al comportamiento observado experimentalmente requiere de la selección de los parámetros del modelo matemático que se pueden ajustar (o refinar) con esa finalidad.

Los parámetros que pueden ser ajustados (o refinados) son aquéllos que se desconocen (pero pueden ser estimados mediante simulación o experimentación), o que tienen incertidumbres relativamente grandes, de manera que tiene sentido ajustar el valor en algún intervalo conocido.

La variación en estos parámetros de ajuste hace cambiar los valores calculados (en este caso, de las alturas de caída para diferentes tiempos) por el modelo matemático, de manera que permita obtener los valores obtenidos experimentalmente (con cierta incertidumbre) y/o darle una interpretación a los resultados obtenidos mediante la comparación de los valores calculados y los experimentales.

Este tipo de ajuste es fácil de realizar visualmente con la ayuda una hoja de cálculo que permita ver en una gráfica cómo cambian los valores calculados al cambiar los parámetros (de ajuste). Esto se ilustra en la figura 4 con uno de los refinamientos realizados para estos experimentos.

En el caso de los experimentos en agua el único parámetro que tiene sentido ajustar es la densidad de los objetos (por sus elevados valores de incertidumbre), ya que todo lo demás es bastante conocido ($\rho_{\text{agua}} = 0.9995 \text{ g cm}^{-3}$, $\eta_{\text{agua}} = 0.01005$ poises, $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$) y no tendría sentido realizar un ajuste en estos parámetros para este experimento; en tanto, el radio de los objetos (determinado con vernier) presenta una incertidumbre pequeña para el tamaño de la muestra.

En el caso de los experimentos en el shampoo podrían ajustarse, además de la densidad de los objetos, la densidad y la viscosidad del medio. Ya que en la ecuación (14) aparece un cociente de las densidades del medio y del objeto, podría tomarse uno de ellos como constante, en tanto que el otro puede ser ajustado. Es por esa razón, y para poder tener cierto punto de comparación con las simulaciones en agua, se decidió tomar la densidad del objeto y la viscosidad del medio como parámetros de ajuste.

En la figura 5 se muestran los mejores resultados de ajuste para los cinco experimentos que se presentan en la figura 3, en tanto que la tabla 3 presenta los resultados de los ajustes.

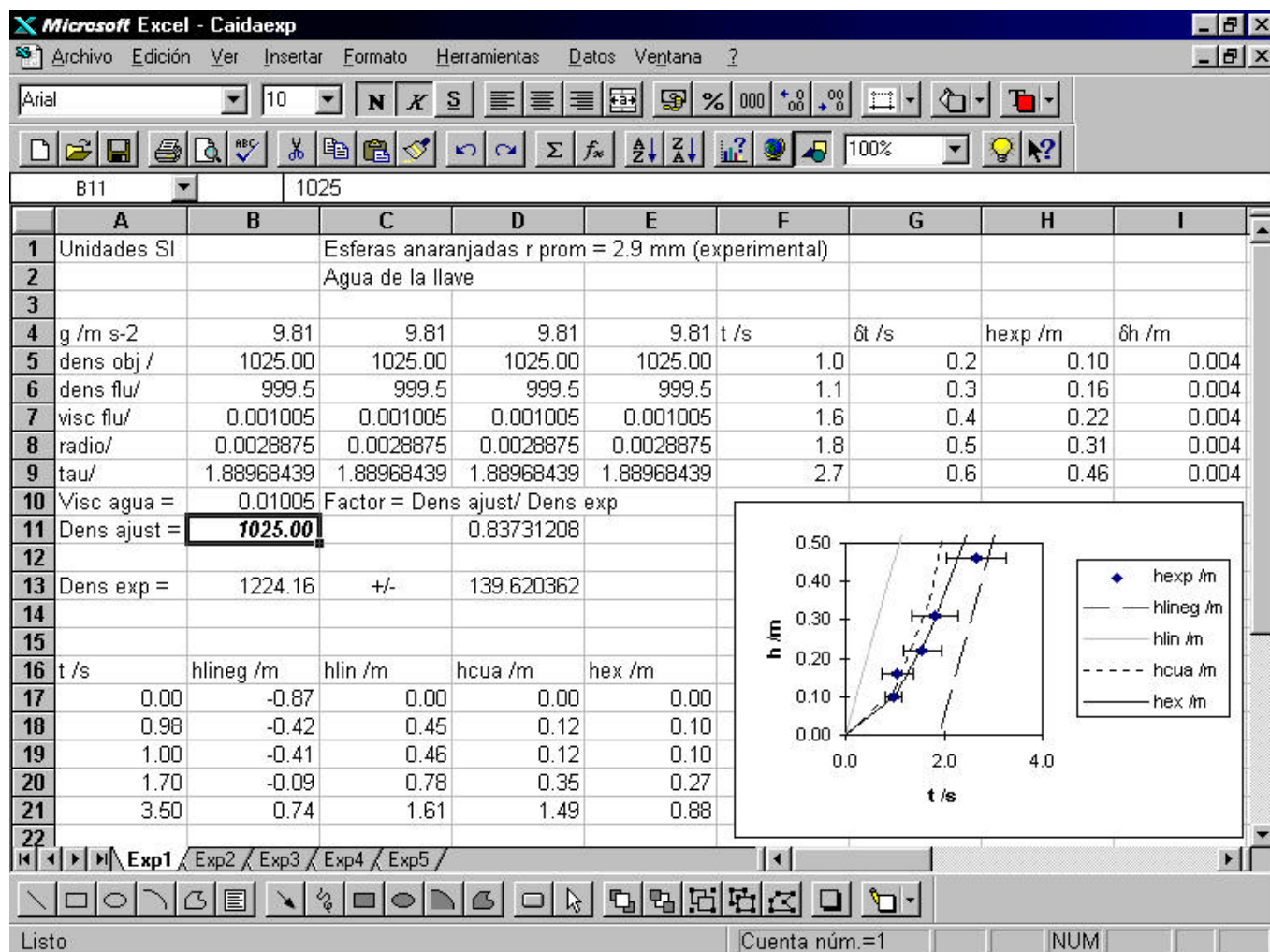


Figura 4. Aspecto de la pantalla de la microcomputadora PC cuando se utiliza la hoja de cálculo para Excel 7.0 de MSOffice para Windows 95 de Microsoft en los ajustes realizados para los experimentos de caída de las esferas anaranjadas en agua. El único parámetro de ajuste es la densidad de las esferas, y se muestra resaltado en negritas cursivas, con la posición del cursor en la celda B11, a un valor de 1,025 kg m⁻³. Al cambiar dicho parámetro, las líneas que se muestran en el gráfico de Excel (que se presenta en la misma pantalla) cambian, de acuerdo con las funciones introducidas en las celdas B17 a E21. Los puntos experimentales se representan con rombos y se muestran también sus barras de error. Todas las magnitudes de las propiedades mostradas son del sistema internacional de unidades (SI).

Las barras de error presentadas para los valores experimentales de las figuras 4 y 5 fueron estimadas considerando que la incertidumbre absoluta es igual a dos veces el valor de la desviación estándar (95% de nivel de significancia considerando una población Gaussiana para los errores), tanto para la altura como para el tiempo de caída, calculada a partir de tres experimentos independientes.

Los refinamientos presentados en la figura 5, comparados con los valores experimentales, muestran que el modelo permite ajustar bastante bien la tendencia y el orden de magnitud observados experimentalmente, para la altura recorrida por los objetos como una función del tiempo, en ambos medios, considerando las magnitudes conocidas. Esto

es alentador, pero hay que analizar más cuidadosamente la información obtenida.

Las figuras 5a y 5b muestran que es posible realizar el mejor ajuste de los resultados experimentales con la ecuación (14) (que constituye el modelo sin aproximaciones). En estas condiciones el modelo general no coincide con los modelos lineales ni con el modelo cuadrático, por la baja densidad de las esferas de plástico anaranjadas y verdes comparadas con el valor considerado en el primer juego de simulaciones (figuras 2a y 2b). Las simulaciones realizadas muestran entonces que es contradictorio el haber realizado el ajuste de regresión lineal mostrado en las figuras 3a y 3b y en la tabla 2, porque la simulación predice que la relación

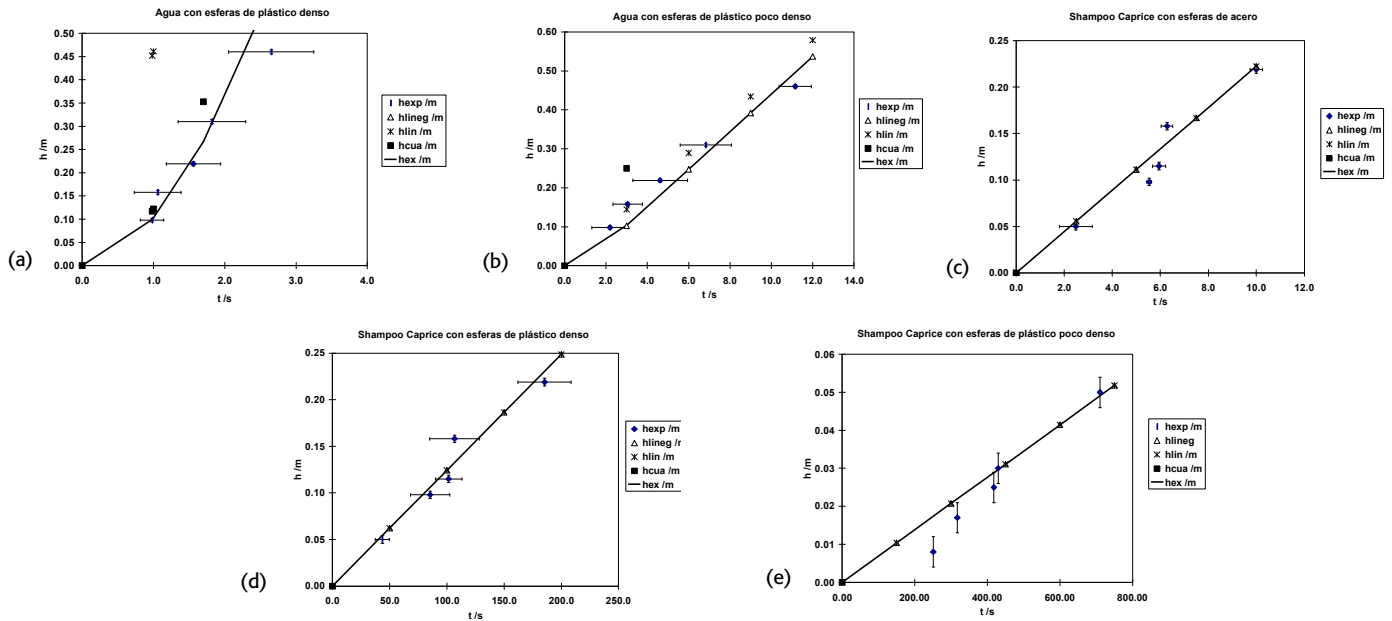


Figura 5. Estudio comparativo de ajuste por simulación con los resultados experimentales para cinco de los seis experimentos realizados. El ajuste del modelo se realizó tomando un parámetro de ajuste para los experimentos en agua y uno o dos parámetros de ajuste para los experimentos en shampoo (ver texto). (a) Esferas anaranjadas (plástico denso) en agua. (b) Esferas verdes (plástico poco denso) en agua. (c) Esferas de acero en shampoo. (d) Esferas anaranjadas en shampoo. (e) Esferas verdes en shampoo. **hexp** (rombos con barras de error) representa los resultados experimentales, **hlineg** representa el modelo con ordenada al origen negativa, **hlin** representa el modelo directamente proporcional, **hcua** el modelo cuadrático y **hex** el modelo general, por la función exponencial.

funcional para la altura y el tiempo de caída no es una recta que parte del origen, ¡aunque lo sugieran los puntos obtenidos experimentalmente, graficados en las figuras 3a y 3b! En la tabla 3 es de llamar la atención que ρ_o ajustado es bastante menor que el valor promedio de ρ_o , obtenido experimentalmente para las esferas anaranjadas, como se puede corroborar con el factor de bondad de ajuste para este parámetro (ver tabla 3). Para las esferas verdes, el parámetro ajustado para la densidad del objeto también es menor que su valor experimental promedio, pero el parámetro de bondad de ajuste es mucho mejor. Los tiempos característicos calculados con los parámetros ajustados en la simulación, mostrados en la tabla 3, no sólo son consistentes con lo esperado (por haber utilizado la viscosidad reportada en la literatura

en ambos casos), sino que establecen que la ventana de tiempo es del mismo orden de magnitud que el tiempo de caída de los objetos, por lo que no es posible realizar aproximaciones sobre la ecuación general.

Las figuras 5c y 5d muestran que para estos dos experimentos es posible realizar el ajuste, considerando la relación directamente proporcional para la altura y el tiempo de caída (en los experimentos de esferas de acero y esferas anaranjadas en shampoo), ya que la ecuación general coincide entonces con este modelo para los valores que toman las diferentes variables en estos sistemas. La tabla 3 muestra también que, a pesar de que es posible refinar la densidad del objeto y la viscosidad del shampoo, para los ajustes de estos resultados experimentales, si se fija el valor de la densidad del objeto a

Tabla 3. Parámetros de ajuste para los experimentos mostrados en la figura 5.

Parámetros	Sistema	Esferas anaranjadas en agua	Esferas verdes en agua	Esferas de acero en shampoo	Esferas anaranjadas en shampoo	Esferas verdes en shampoo
ρ_o (kg m ⁻³)		1,025.00	1,005.20	7,676.08	1,224.16	1,026.15
Factor de ajuste [‡]		0.837	0.995	0.999	1.003	1.016
η (poises)		0.01005*	0.01005*	32.37†	32.37†	32.37†
τ (s)		1.8897	0.8670	0.0026	0.0007	0.0003

[‡] El factor de ajuste, o de bondad de ajuste, se calculó como $\rho_{oajustado}/\rho_{oexperimental}$.

* Valor tomado de Sears y Zemansky (1973).

† Se fijó en el ajuste al promedio de los valores obtenidos para las esferas anaranjadas y de acero mediante la regresión lineal de los valores

su valor experimental promedio y el valor de la viscosidad al promedio de los valores calculados por el método de ajuste de regresión lineal para este tipo de objetos (ver tabla 2), la tendencia lineal calculada explica muy bien los resultados obtenidos. Esto es, en este caso la simulación muestra que no hay contradicciones entre lo que se esperaba obtener a partir de las primeras simulaciones y los resultados obtenidos experimentalmente, y que es bastante probable que el valor de 32.37 poises sea un buen estimador para la viscosidad del shampoo (eso sí, dentro del error experimental que es bastante grande) pues no hay contradicciones entre las hipótesis del modelo y los resultados obtenidos. Es así que la simulación demuestra que no fue incorrecto realizar el ajuste de regresión lineal para los datos mostrados en las figuras 3c y 3d.

La figura 5e también muestra que es posible realizar el ajuste por simulación, considerando la relación directamente proporcional para la altura y el tiempo de caída, en los experimentos de esferas verdes (de plástico poco denso) en shampoo. Sin embargo, a pesar que también se mantuvo fijo el valor de la viscosidad del fluido a 32.37 poises, se tuvo que ajustar el valor de la densidad del objeto a un valor un poco más alto que el promedio experimental determinado ($1,026.15 \text{ kg m}^{-3}$, como se muestra en la tabla 3), pero dentro de su incertidumbre experimental, quedando solamente afuera de la tendencia lineal el punto con distancia vertical recorrida más pequeña (junto con su incertidumbre estimada). Ahora es fácil considerar que este punto es el de altura más baja de todos los experimentos realizados (0.8 cm) y que es muy probable que se haya realizado una medición incorrecta de la misma, por lo que habría razones convincentes para descartarlo y tomarlo como una equivocación al realizar ese experimento.

Finalmente, los tiempos característicos calculados para los objetos cayendo en shampoo son compatibles con lo esperado y muestran que en este caso la ventana de tiempo observada corresponde a valores mucho mayores a sus tiempos característicos. En este caso, la aproximación de proporcionalidad directa entre altura y tiempo de caída es muy buena.

Así, el análisis cuidadoso de los ajustes realizados por simulación para los experimentos de caída en shampoo parecen bien descritos por el modelo deducido en la primera parte de este trabajo, ya que prácticamente hay concordancia con el modelo aplicado, con los métodos de cálculo, y porque se ha explicado también por qué el valor de la viscosidad calculada por el método de regresión lineal se desvía para las esferas de plástico verde con respecto a las de acero y de plástico anaranjado (utilizando para ello el método de ajuste por simulación). Por lo tanto, sólo restaría explicar las desviaciones observadas en los experimentos de caída en agua.

¼ y volver a saber ¼

La posible explicación a las desviaciones observadas en los experimentos realizados en agua es la turbulencia que surgiría por una velocidad demasiado grande que el objeto podría adquirir, dada la baja resistencia del medio para oponerse a su caída.

En la ingeniería y en la dinámica de fluidos, la forma natural de caracterizar si un fenómeno dinámico se ve acompañado por turbulencia en el fluido es calcular el *número de Reynolds*. En el libro de Bird *et al.* (1993) puede encontrarse la definición del número de Reynolds (N_R) para un objeto esférico cayendo en un medio infinito (es decir, cuyo radio es despreciable con respecto a los límites del recipiente que contiene al fluido en donde cae). Esta definición se presenta en la ecuación (19).

$$N_R = \frac{\rho_m v D}{\eta} = \frac{\rho_m v (2r)}{\eta} \quad (19)$$

Es interesante notar el hecho de que aparece la velocidad del objeto en la ecuación (19), pero que, aparentemente, N_R no depende de la densidad del mismo. Sin embargo, si se sustituyen la ecuaciones (7 y 9) en la ecuación (19), es posible expresar el número de Reynolds de estos sistemas como una función del tiempo de caída, expresión que, ya simplificada, se muestra en la ecuación (20) y que resulta relevante porque no aparece en la literatura consultada:

$$N_R = \frac{4r^3}{9} \frac{\rho_m \rho_o}{\eta^2} \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_o}\right) g \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]\right) \quad (20)$$

También en el libro de Bird *et al.* (1993) se dice que, para este fenómeno, N_R debe ser menor que 0.1 para que no se presenten turbulencias en el fluido durante el mismo. Éste resulta un buen criterio para verificar la validez de la hipótesis planteada en la sección anterior.

En la figura 6 se muestran los números de Reynolds calculados, como una función del tiempo, para los experimentos descritos en el presente trabajo. Asimismo, esta figura demuestra que los sistemas estudiados en la parte experimental deben alcanzar números de Reynolds muy altos cuando se dejan caer en agua (mayores que 0.1 en las condiciones experimentales), en tanto que deben alcanzar números de Reynolds pequeños cuando se dejan caer en shampoo (menores que 0.1 en dichas condiciones).

Así, de la figura 6 se puede concluir que es muy probable que los experimentos realizados en las condiciones descritas en el presente trabajo presentan turbulencia en agua y que el hecho de que las partículas no caigan verticalmente sí puede interpretarse de esta forma; en tanto, en shampoo no se manifiesta la turbulencia, por las velocidades relativamente pequeñas que alcanzan las partículas.

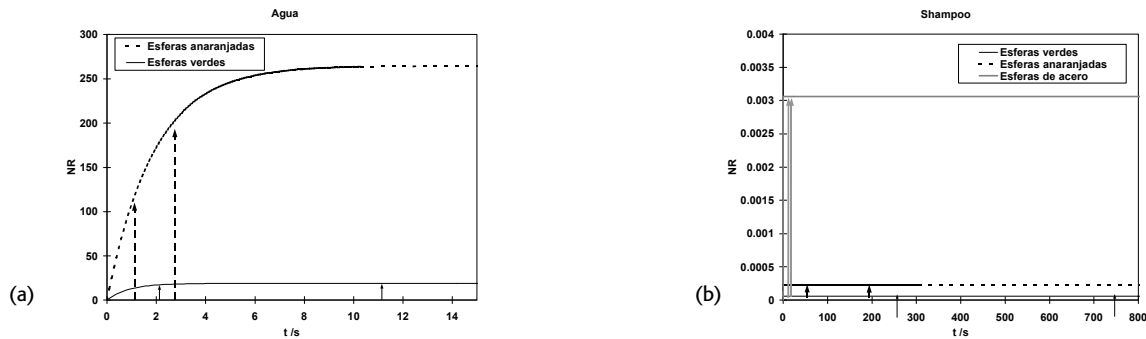


Figura 6. Representación gráfica del número de Reynolds para los experimentos realizados en el presente trabajo. (a) Esferas de plástico cayendo en agua. (b) Esferas de plástico y acero cayendo en Shampoo. Las flechas en las figuras muestran el intervalo de valores de tiempo experimentales, para cada tipo de objeto. Las flechas se dibujaron con el mismo estilo que las líneas de las funciones para una identificación más fácil. Nótese cómo para los valores en agua se observa que $aguaNR > 0.1$, en tanto que en shampoo $shampooNR < 0.1$ para todos los objetos estudiados.

¼ y volver a experimentar¼

De las interpretaciones realizadas mediante los ajustes por simulación con el modelo de la ecuación (14) para los resultados experimentales, podría entonces concluirse que no se puede rechazar la hipótesis de que este modelo matemático puede describir los experimentos en donde no se presenta la turbulencia. Tampoco los experimentos confirman del todo la hipótesis, por las grandes incertidumbres asociadas a las variables que pueden medirse.

Entonces deberían plantearse nuevos experimentos que minimicen estas incertidumbres. ¿Cómo experimentar entonces? Al resolver esta pregunta se seguiría hacia nuevas experimentaciones, nuevas simulaciones, también se buscaría nueva información, etcétera, hasta resolver satisfactoriamente el problema inicialmente planteado, siguiendo para ello la dinámica natural del método científico-experimental.

¼Pero eso queda fuera de los alcances del presente artículo, que está por concluir.

Conclusiones

La teoría y los resultados experimentales mostrados en el presente trabajo demuestran la necesidad de realizar análisis cuidadosos de los datos, en donde simulaciones previas y finales permiten establecer los intervalos de validez de un modelo, así como estimar parámetros fisicoquímicos, aun cuando se tengan datos con incertidumbres grandes.

El modelo mecánico presentado en este documento para la caída de objetos esféricos en medios densos y viscosos muestra relaciones funcionales interesantes que se observan en otros fenómenos de la naturaleza. El más cercano y conocido es posiblemente el de las ecuaciones de corriente y carga en un circuito RLC simple. En particular hay que subrayar la definición de un tiempo característico para los sistemas (τ) que define *ventanas de tiempo*, así como la expresión del número de Reynolds como una función del tiempo para este fenómeno. Hasta donde llega nuestro co-

nocimiento, éstos son hallazgos poco documentados en los libros de texto de Dinámica de Fluidos o Física General a nivel licenciatura y cabe resaltar que resultan directamente de la obtención de las ecuaciones de movimiento para este modelo y del enfoque metodológico contemporáneo de la enseñanza experimental, en donde las simulaciones tienen un papel muy relevante.

Por último, debe recordarse y enfatizarse el hecho de que el modelo aquí presentado explica el principio de funcionamiento de viscosímetros utilizados industrialmente (Merck, 1996). ▀

Agradecimientos

Los autores agradecen al cuerpo de profesores de las unidades de enseñanza aprendizaje de Método Experimental I y II, que se ofrecen en el Tronco General de Asignaturas de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-Iztapalapa, por sus críticas y discusiones referentes a este experimento; en particular al doctor Pablo Lonngi Villanueva por sus comentarios y orientaciones acerca del uso del número de Reynolds. También dedican el presente artículo a la maestra Gloria Soto, durante muchos años jefa de la Sección de Ciencia Básica en la ENEP-Cuautitlán, por su sexagésimo aniversario.

Referencias

- Bird, B., Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N., *Fenómenos de Transporte*, Reverté, México, 1993. p. 2-28.
- Lachman, L., Lieberman, H.A. y Kanig, J.L., *The Theory and Practice of Industrial Pharmacy*, 2da. ed., Lea & Febiger, Philadelphia, 1970. p. 167-168.
- Sears, W. y Zemansky, M.W., *Física general*, Aguilar, Madrid, 1973. p. 263-265.
- The Merck Co. (ed.) *The VWR Scientific Products Catalog 97/98*. VWR Scientific Products, USA, 1996. p. 2008.
- Toral, M.T., *Fisicoquímica de Superficies y Sistemas Dispersos*, Urmo, Bilbao, 1973. p. 167-168.