

Innovación en evaluación: un ejemplo basado en la perspectiva de modelos

María Trigueros G.*

Resumen

Las prácticas de evaluación del conocimiento han variado poco a pesar de las reformas educativas y han dejado de ser coherentes con las metodologías de enseñanza. Es necesario investigar sobre formas alternativas de evaluación que proporcionen resultados más completos que las tradicionales. En este trabajo se presenta una metodología alternativa de evaluación basada en el marco conceptual de modelación y puesta a prueba en un curso de ecuaciones diferenciales. Los resultados muestran que es posible diseñar instrumentos y formas de evaluación que dan cuenta del conocimiento de los estudiantes con mayor profundidad.

Introducción

La evaluación del conocimiento de los estudiantes es una de las actividades más importantes de los sistemas educativos. En la escuela, la evaluación ayuda a conformar el ambiente de aprendizaje y también sirve como base sobre la cual se apoyan las decisiones pedagógicas generales. Pero tal vez el elemento que constituye el eje central por el cual es necesario analizar la evaluación de una manera crítica es el hecho de que a partir de los resultados generados se toman decisiones que afectan el futuro de los estudiantes.

A pesar de su importancia, la investigación en evaluación ha recibido menos atención que otras áreas de la investigación educativa, y ésta se ha centrado básicamente en los diseños de exámenes estandarizados y de las formas de medida adecuadas para tomar decisiones con base en las respuestas de los estudiantes en ellos. La discusión, por ello, se ha dirigido hacia los métodos estadísticos que permiten determinar la confiabilidad de los resultados obtenidos en los exámenes (Bickel, *et al.*, 2001; Brennann, 2001; Kane, 2001; Enright, 2002) y hacia las posibilidades de determinar el conocimiento real de los estudiantes con diferentes formatos de preguntas que

sean fácilmente graduables para cantidades considerables de alumnos (Embreston, 1999; McNeil, 2000; Embreston y Heshberger, 2001; Cohen, 2002).

En el ámbito de las aulas, la complejidad del problema ha conducido a una actividad común entre la mayor parte de los profesores que consiste en plantear problemas en los exámenes semejantes a aquellos que se han revisado en el curso, y con frecuencia con un grado de dificultad un poco mayor. Estas prácticas de evaluación conducen a una forma específica de estudio por parte de los estudiantes que ha mostrado ser muy poco efectiva en relación con el aprendizaje conceptual de las disciplinas (Filler y Pollard, 2000; Firestone *et al.*, 2001; Sakonidis y Klothou, 2003; Schorr y Bulgar, 2003). Los estudios indican que la actividad más favorecida por este tipo de evaluación es la memorística y, en algunos casos, el seguimiento de procedimientos sin mayor comprensión.

Los sistemas conceptuales de los estudiantes son complejos, cambian continuamente y no se muestran de manera completa cada vez que se hace una evaluación. Los sistemas conceptuales de los estudiantes interactúan, además, unos con otros y con la forma misma de evaluación. El conocimiento se desarrolla a través de la interacción de lo aprendido en la escuela en las diversas disciplinas a las que se accede, pero también en la interacción con el ambiente social. La evaluación es por ello una actividad compleja. Los conocimientos o sistemas de conocimientos que se intentan medir a través de la evaluación no se pueden aislar con facilidad y su naturaleza cambia cuando se intentan medir a través de instrumentos que pretenden aislarlos. La investigación en evaluación requiere de un impulso para poder acceder de manera menos parcial a los sistemas completos en los que “habitan” los conceptos y que no son observables directamente, sino únicamente a través de sus efectos en otros eventos.

En este trabajo se intenta contribuir en esta dirección. En él se presenta el desarrollo de una forma alternativa de evaluación que puede utilizarse, conjuntamente con otras formas de evaluación, para acercarse al conocimiento de los estudiantes en un área específica de las matemáticas: las ecuaciones

*Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Río Hondo No. 1, 01000 México, DF.
Correo electrónico: trigue@itam.mx

diferenciales. En el desarrollo de esta metodología de evaluación se reconoce de entrada que no todo el conocimiento se puede medir a través de una lista de preguntas a responder o de ejercicios a resolver. Se intenta, en cambio, proponer una forma de evaluación dinámica e iterativa que pone énfasis en el desarrollo de modelos conceptuales y que permite poner de manifiesto la forma en la que los estudiantes abordan problemas complejos utilizando herramientas conceptuales y otro tipo de habilidades indispensables en el ejercicio profesional.

Antecedentes

Las actividades propuestas en la evaluación tradicional enfatizan ciertas habilidades matemáticas bien identificadas, así como un procedimiento paso a paso para resolver problemas (Morgan, 2000; Goldin, en prensa); en ellas la atención se centra en las respuestas que los estudiantes pueden lograr y en el nivel de exactitud que demuestran. Para resolver exitosamente instrumentos de evaluación de esta naturaleza se requiere ejemplificar en clase métodos en los que se practican dichas habilidades en la solución de ejercicios. Recientemente, los estándares curriculares propuestos en muchos países enfatizan un mayor nivel de profundidad en los procesos de razonamiento matemático. Éstos incluyen la búsqueda de patrones, el establecer relaciones, la comunicación en forma matemática, la capacidad de solución de problemas cotidianos y contextualizados y abiertos, entre otros (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; McNeil, 2000; Goldin, en prensa). Esta posición educativa requiere de métodos distintos de evaluación que permitan verificar el grado en el que los estudiantes satisfacen los requisitos propuestos.

Limitar a los estudiantes a producir una respuesta específica reduce la visión que es posible alcanzar de sus capacidades matemáticas. Los nuevos diseños de evaluación se interesan en el proceso por el cual los estudiantes llegan a esa respuesta, tanto como por el producto final mismo. De esta forma se pretende eliminar al menos parte del efecto muchas veces nocivo que las pruebas tradicionales tienen sobre lo que se quiere enseñar, por bien diseñado que esté el programa.

Problema de investigación

En esta investigación se pretende analizar una metodología alternativa de evaluación del conocimiento de los estudiantes, a través del análisis de la forma en la que utilizan los conceptos importantes de un

curso, o de una parte de un curso, en una actividad de modelación, y de examinar su efectividad mediante los resultados producidos en su empleo en un caso específico. En particular nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Es posible proporcionar a los estudiantes experiencias ricas en las que ellos puedan poner de manifiesto sus puntos de vista y sus conocimientos acerca de las ideas importantes de un curso específico y otras ideas matemáticas importantes que son el resultado de la integración de lo que han aprendido con anterioridad?
- ¿Qué tipo de instrumentos se pueden desarrollar de tal suerte que permitan, por una parte, diagnosticar y evaluar el conocimiento de los alumnos y, por otra, proporcionarles retroalimentación efectiva sobre los aspectos en los que pueden mejorar?
- ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos se pueden recuperar a través de una metodología basada en el planteamiento de modelos?

La respuesta a estas preguntas puede proporcionar elementos básicos para el desarrollo de nuevas estrategias y nuevas herramientas de evaluación diagnóstica con las cuales sea posible tomar mejores decisiones acerca del desempeño de los estudiantes en un curso.

Marco teórico

Durante varios años un grupo de investigadores (Lesh y Kelly, 2000; Kelly y Lesh, 2001; Aliprantis y Carmona, 2003; Lesh y Doerr, 2003; McKlain, 2003; Zawsjeroski *et al.*, 2003) han desarrollado una forma de trabajo en clase que puede ser útil para poner en evidencia el conocimiento de los estudiantes. Estos investigadores parten de experiencias previas en las que se ha demostrado que para tener la posibilidad de investigar la manera en la que los estudiantes abordan un problema, es necesario lograr que se expresen en formas que sean visibles para todos los participantes en el proceso de solución: los estudiantes, los profesores y los investigadores. Desde su punto de vista, las actividades que se diseñan para ser trabajadas en el salón de clase deben poner en evidencia el pensamiento de los alumnos mientras trabajan con ellas. Para lograrlo, las actividades a realizar en clase se pueden replantear de tal manera que se tome en consideración la posibilidad de contar con documentación pertinente en la cual la forma

de pensar de los estudiantes sobre el problema se haga evidente.

Cuando los estudiantes o los individuos resuelven un problema complejo, muy a menudo externalizan la forma en la que están pensando en ese momento. En estas ocasiones se ponen en evidencia también los constructos y sistemas conceptuales que utilizan y la forma en la que los emplean. Para estos investigadores, los productos que los estudiantes generan se pueden considerar como encarnaciones de los sistemas conceptuales relevantes para la solución del problema. Así, conforme estas herramientas se prueban, se revisan y se redefinen, los sistemas conceptuales también atraviesan por distintas fases. Esto es especialmente cierto en el caso en que los productos que los estudiantes entregan se pueden considerar como “tecnologías conceptuales” y no incluyen únicamente el procedimiento para resolver el problema, sino además formas de describir y explicar las situaciones en las que las herramientas conceptuales pueden ser útiles.

En la aplicación de estas ideas a la práctica se trata de generar herramientas conceptuales que queden expresadas en productos concretos y que permitan lograr que los estudiantes pongan de manifiesto de manera clara sus ideas relativas a conceptos importantes del sistema conceptual que se trata de enseñar y que queden expresadas de una forma que sea visible para quien las expresa, para los usuarios de los materiales generados y para quien observa cómo se usan.

En una obra posterior, el *International Handbook of Research Design in Mathematics Education* (English, *et al.*, en prensa) se introduce el término “investigación en diseño” para describir la forma de lograr diseños útiles para estudiar el conocimiento de los estudiantes. En los estudios ahí reportados se indica que los productos deben especificarse de tal forma que los criterios para su uso sean claros y puedan dar lugar a productos que pueden ser evaluados y sobre todo auto evaluados. Es decir, es necesario proporcionar criterios que permitan la obtención de retroalimentación formativa y de consensos para refinar el pensamiento y así poder producir, progresivamente, mejores juicios de valor que sean útiles a los participantes en el proceso y pongan en evidencia la necesidad de ir más allá de sus formas primitivas de pensamiento, las fortalezas y debilidades relativas de formas alternativas de pensar y para llegar a sistemas conceptuales que tengan la potencialidad de satisfacer las necesidades de la situación en estu-

dio, que se puedan compartir, que se puedan volver a utilizar y que sean transportables a otras situaciones. En otras palabras, tanto las herramientas como las formas de pensar que subyacen a ellas deben ser compatibles y generalizables.

Una consideración importante al utilizar el marco teórico de la modelación consiste en que los procesos de diseño que se emplean deben ser tales que los participantes entiendan claramente, desde el inicio de la solución del problema propuesto, que la solución no se obtiene en un solo intento, sino que serán necesarios una serie de ciclos para producir resultados que sean suficientemente útiles. Cuando el diseño involucra una serie de pasos o de ciclos de revisión y prueba, y cuando los resultados intermedios se expresan en formas que pueden ser revisadas por un individuo externo al proceso de diseño, además de los mismos participantes, se producen trazas de documentación que se pueden analizar; estas trazas se generan de manera automática y revelan características importantes del pensamiento de los estudiantes y de su evolución. De esta manera, el proceso de solución del problema contribuye por una parte al aprendizaje y produce, por otra, documentación útil para otros fines. Con el fin de incrementar la riqueza de la información producida es importante que los procesos de solución de un problema promuevan las interacciones entre participantes que tengan distintas perspectivas y que involucren procesos en los que sea necesario ir logrando consensos.

Desde nuestra perspectiva, este marco teórico puede emplearse con éxito en la evaluación del conocimiento si se trabajan situaciones suficientemente complejas para que los estudiantes pongan de manifiesto los conocimientos matemáticos que han adquirido, no solamente en un curso, sino a lo largo de su experiencia escolar, y al mismo tiempo, suficientemente simples para que los estudiantes sean capaces de llegar a una solución satisfactoria en el transcurso de un tiempo razonable. La posibilidad de usar la construcción de modelos como forma de evaluación del conocimiento implica la necesidad de diseñar herramientas de evaluación que sean útiles y fáciles de utilizar por el maestro y que proporcionen información de calidad que haga posible y eficaz el diagnóstico de las necesidades y capacidades de los estudiantes y así emitir un juicio razonado de valor que sea más satisfactorio que el que se obtiene de las evaluaciones tradicionales.

Metodología

La investigación se llevó a cabo en el contexto de un curso de Ecuaciones Diferenciales en una universidad pequeña en la Ciudad de México. El grupo estaba formado por 24 estudiantes de la carrera de ingeniería. Los propósitos del curso hacen énfasis en el aprendizaje de los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales y en su aplicación a la solución de problemas.

Considerando que el objetivo del presente trabajo es el diseño y puesta a prueba de una metodología de evaluación, se diseñaron una situación problemática específica ligada a un problema real y los instrumentos que permitieran registrar los elementos de interés que aparecen en la búsqueda de la solución para evaluar el conocimiento de los alumnos y su evolución respecto a los temas: Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden por separación de variables, uso de métodos cualitativos y numéricos para el análisis de la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y aplicación de ecuaciones diferenciales a la solución de problemas.

La situación que se trabajó con los estudiantes es la siguiente:

En la escuela secundaria Benito Juárez, la coordinadora académica está preocupada porque sus lecturas indican que, en la actualidad, los adolescentes tienen menor capacidad de memorización que antaño. Por otra parte, está conciente de que los maestros se quejan continuamente de que lo único que hacen los alumnos es memorizar y que no tratan de entender los conceptos. La maestra se propone hacer un experimento en la escuela para poner a prueba esta información que parece contradictoria. La coordinadora se encuentra ahora con el problema de que no sabe cómo hacer para medir la capacidad de memorización de los alumnos y ha pedido nuestra asesoría. Para ayudarla es necesario diseñar una forma práctica y sencilla de evaluar la capacidad de memorización de los alumnos de la secundaria y darle a la coordinadora las herramientas para hacerlo, conjuntamente con una explicación de la forma de usarlas y por qué le pueden resultar útiles. Es conveniente añadir a la explicación algunos datos que le permitan valorar el procedimiento y un análisis de las bondades y limitaciones del método.

La actividad, que los estudiantes trabajaron en grupos de cuatro alumnos, se propuso a los estudiantes en dos partes. La primera se desarrolló en el contexto de una clase de dos horas de duración, en las que debían llegar a proponer un modelo para

medir la memorización y las estrategias que utilizarían para ponerlo a prueba. La segunda parte se desarrolló como tarea en las dos semanas posteriores; el material a entregar a la coordinadora consistió en el trabajo requerido. Las dos partes se incorporaron como parte de la evaluación.

Las soluciones a este problema involucran la necesidad de encontrar una relación entre variables, de preferencia dinámica. El reporte final a entregar tiene que pasar por una serie de borradores en los que se pueden ir documentando los pasos sucesivos de la solución, la forma de pensar de los estudiantes, los conceptos matemáticos que utilizan y cómo los utilizan. Este reporte debe contener el modelo utilizado, la forma de ajustarlo a una situación particular, la forma de utilizarlo en la práctica y la justificación de su utilidad. Para completar con éxito esta tarea se requiere además de una definición operacional de lo que se podría llamarse el índice de memorización de una persona. Una característica importante del problema es que los estudiantes son capaces de probar sus propias respuestas sin necesidad de pedir la opinión del maestro.

En el caso que nos ocupa se dividió la actividad, para la evaluación, los siguientes ciclos:

Primera fase	Trabajo en clase	Ciclo 1: Comprensión y primera propuesta. Ciclo 2: Primer refinamiento y análisis. Ciclo 3: Segundo refinamiento y preparación de la presentación. Ciclo 4: Refinamiento final, entrega del modelo con metodología de prueba.
Segunda fase	Trabajo en casa	Ciclo 5: Posible refinamiento, puesta a prueba. Ciclo 6: Posible refinamiento, entrega proyecto final.

Es importante notar que todavía en el producto terminado los alumnos tienen oportunidad de presentar un nuevo refinamiento del modelo de manera que dé cuenta de mejor manera de los resultados obtenidos.

Para llevar a cabo la evaluación de la actividad interesa documentar la forma en la que los estudiantes son capaces de utilizar una idea poderosa de las matemáticas: la variación. Otras ideas importantes relativas al curso que surgen en el proceso de solución de esta tarea son las de proporcionalidad, reconocimiento de variables, reconocimiento de la

función como incógnita, relación entre variables, solución de ecuaciones diferenciales, uso de herramientas de cálculo para analizar e interpretar información en términos de ecuaciones diferenciales, uso del análisis cualitativo, comprensión del papel que juega un parámetro, métodos numéricos de aproximación.

El profesor elaboró los instrumentos pertinentes para seguir el trabajo de los estudiantes durante todo el proceso de solución de la tarea. Los estudiantes trabajaron durante una hora en la solución de la tarea y en la elaboración de una presentación general a todos los alumnos de la clase. Al final de cada presentación tanto los alumnos como el profesor planteaban preguntas y dudas a los expositores, mismas que ellos debían anotar y responder. La presentación de los cuatro grupos duró aproximadamente cuarenta minutos. En los veinte minutos restantes, los alumnos trabajaron nuevamente en su modelo con el fin de tomar en cuenta los comentarios obtenidos y en la forma de ponerlo a prueba. El profesor observó además a los estudiantes y tomó nota durante el proceso de solución sin intervenir en sus discusiones ni resolver dudas. En la segunda fase del trabajo los alumnos contaron con dos semanas durante las cuales podían consultar bibliografía y pedir apoyos específicos al profesor. La calificación final se conformó de los resultados obtenidos de los instrumentos elaborados para cada uno de los ciclos y fue la misma para todos los miembros de cada grupo.

Los datos a analizar provinieron del trabajo de los estudiantes y los instrumentos diseñados para su análisis en cada ciclo, las presentaciones, la grabación de la sesión de presentación y de un instrumento final para analizar el proyecto entregado.

Diseño de instrumentos

Los instrumentos juegan un papel clave en la evaluación del aprendizaje y de los comportamientos de los estudiantes, la información que se obtiene de ellos es la fuente de datos de la cual surge la evaluación y el diagnóstico de los estudiantes. El diseño de los instrumentos debe ser coherente con las metodologías de enseñanza y, sobre todo, con la epistemología que subyace a ellas. Es importante señalar que para que los instrumentos de evaluación sean eficaces deben diseñarse de manera que faciliten el proceso de toma de datos por parte del profesor. En la metodología propuesta, él juega una parte activa en el desarrollo de la clase, observa a los estudiantes mientras realizan la tarea y discuten, escucha y par-

ticipa durante la discusión en la presentación de los modelos y, posteriormente, analiza los datos recabados durante este proceso, conjuntamente con los que provienen de la fase correspondiente al trabajo en casa. La posibilidad de contar con instrumentos de fácil uso para llevar el registro de la información relevante de los distintos ciclos del proceso de evaluación es de suma importancia.

A fin de diseñar los instrumentos, se conjeturaron las principales dificultades de los estudiantes al trabajar con la actividad y, a partir de ellas, se elaboraron tablas en las que el profesor podía hacer anotaciones cortas que permitieran un análisis posterior a mayor profundidad. Los instrumentos diseñados y empleados se muestran en los cuadros adjuntos.

En el instrumento I el rubro correspondiente al tipo de discusión se refiere a la forma del trabajo del grupo; por ejemplo, si el grupo tiene un líder de opinión o si intervienen todos los estudiantes en la elaboración de la tarea. También se registra el tipo de interacciones que se dan entre los estudiantes.

El segundo rubro se refiere a las consideraciones que los alumnos hacen para empezar a plantear el modelo. En esta parte es de interés centrar la atención en la cantidad de variables que se toman en consideración y el tipo de hipótesis y consideraciones que se utilizan en su elección. La parte que

Instrumento I

Instrumento de observación durante la realización de la tarea ciclo 1.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Tipo de discusión						
Justifican hipótesis						
Discusión sobre variables relevantes						
Tipo de modelo						
Sencillez						
Factibilidad						
Uso de derivada						
Condiciones iniciales						
Conceptos utilizados						
Análisis del modelo						
Comentarios						

*Instrumento II***Instrumento de observación durante la presentación del modelo.**

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Calidad de la presentación						
Justifican hipótesis						
VARIABLES INVOLUCRADAS						
Tipo de modelo						
Sencillez						
Factibilidad						
Uso de derivada						
Condiciones iniciales						
Conceptos utilizados						
Análisis del modelo						
Aspecto sobre el que tratan los comentarios de los otros grupos						
Adecuación de las preguntas						
Claridad de respuestas						
Uso de argumentación matemática en las respuestas						
Comentarios						

*Instrumento III***Instrumento de observación durante la realización de la tarea ciclo 2 (refinamiento).**

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Tipo de discusión						
Justifican hipótesis						
Discusión sobre variables relevantes						
Tipo de modelo en desarrollo:						
Sencillez						
Factibilidad						
Uso de derivada						
Condiciones iniciales						
Conceptos utilizados						
Análisis del modelo						
Metodología de prueba						
Comentarios						

corresponde a la discusión sobre variables relevantes se refiere a la elección de variables que se hacen intervenir en el modelo y al tipo de relaciones que se establecen entre ellas.

El rubro correspondiente al tipo de modelo en desarrollo es de suma importancia, es en él donde se registra cómo resuelven los estudiantes el problema planteado y las herramientas conceptuales que utilizan para ello. En esta parte, la sencillez se refiere a las características elegidas para que el modelo sea manejable desde el punto de vista matemático, la factibilidad hace referencia a las posibilidades de que el modelo, que en ese momento se vislumbra, tiene de ser adecuado para la situación en estudio, el uso de derivada se refiere a la relación con la variación que guardan las consideraciones de los alumnos y si escriben el modelo utilizando una ecuación diferencial; el papel de las condiciones iniciales se refiere, a la forma en que éstas se toman en consideración y a la forma en la que se introducen en el modelo. En el rubro correspondiente a los conceptos utilizados se anotan las consideraciones matemáticas que los estudiantes van haciendo, por ejemplo, si usan la noción de proporcionalidad, si utilizan un modelo lineal, etcétera. Finalmente, en el análisis del modelo se registran aquellas consideraciones relativas al estudio del modelo para verificar su adecuación a la situación, antes de ponerlo a prueba. En el renglón para comentarios el profesor puede anotar algunos aspectos que le llamen la atención, como el nombre del líder del grupo o aspectos relacionados con asuntos en las otras partes de la tabla.

En la primera etapa del proceso de solución el profesor visita al menos dos veces a cada grupo, por lo que en este instrumento hay cuando menos dos registros en el tiempo; queda claro, además, que en ocasiones algunos de los renglones pueden dejarse vacíos por no corresponder a la actividad de los estudiantes en el momento de la visita del profesor.

En el instrumento II se toman en consideración los mismos aspectos que en el instrumento anterior, pero en este caso, se hace referencia al modelo terminado en el primer ciclo. Interesa, además, tomar en cuenta el tipo de presentación que se hace del modelo propuesto y de respuestas que se dan a las preguntas de los compañeros de clase y del profesor, sobre todo en términos de la comprensión del problema, del uso de conceptos y de la argumentación matemática.

En el tercer instrumento se registran los datos relevantes del proceso de desarrollo de la tarea en el

segundo ciclo, el correspondiente al refinamiento del modelo a partir de los comentarios y sugerencias obtenidos de la discusión en clase y a la planeación de las actividades para poner a prueba el modelo final.

En el instrumento IV se resume la información obtenida de los instrumentos anteriores y se complementa con la información proveniente de la propuesta entregada por los estudiantes. El análisis de los instrumentos anteriores destaca el nivel de comprensión de los conceptos introducidos hasta ese momento en la clase. En éste se registran los datos en forma numérica para ir conformando la calificación final de los estudiantes. La parte de comentarios es importante pues en ella se registran los aspectos relevantes para el diagnóstico de los estudiantes.

El V es un instrumento de seguimiento del trabajo de los estudiantes a través de sus consultas al profesor. Los rubros que se incluyen están diseñados para continuar la evaluación de los estudiantes a través de sus dudas, sus aciertos y el compromiso que tienen con la solución del problema. Para contar con información pertinente se anota el objetivo de la visita de los alumnos y si participa el grupo completo, además de los aspectos antes mencionados en relación al modelo y su puesta a prueba. Los comentarios del maestro nuevamente juegan un papel importante para la evaluación de la comprensión de los alumnos de los conceptos introducidos en el curso. En la parte que se refiere a las dificultades conceptuales se registran las dudas específicas de los alumnos. En el rubro relacionado con las variables relevantes se codifican las discusiones que tienen que ver con la elección de variables, con la identificación de las variables registradas en los datos y aquéllas que quedan por determinar numéricamente. Durante el transcurso de la puesta a prueba del modelo los estudiantes tienen acceso a nuevas fuentes de información y pueden decidir cambiar el modelo propuesto originalmente, lo que se anota en el rubro correspondiente al tipo de modelo en desarrollo. El instrumento toma en cuenta también los conceptos discutidos en las visitas y la profundidad en la comprensión de los alumnos.

El instrumento VI evalúa el trabajo final entregado; en él se toman en cuenta todos los requisitos que debe satisfacer el proyecto. La calificación en cada uno de estos rubros es un número. A partir de este resumen se obtiene una calificación de la segunda fase del proyecto que se combina con la de la primera fase para obtener la calificación total.

Los instrumentos que se presentan en la sección

Instrumento IV

Instrumento de evaluación de lo sucedido en la clase.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Colaboración						
Comprensión hipótesis						
Papel de variables						
Comprensión conceptos relevantes:						
Derivada						
Campos de tangentes						
Estabilidad						
Condiciones iniciales						
Función						
Proporcionalidad						
Uso de parámetros						
Metodología de prueba						
Satisfacción de requisitos de la tarea						
Comentarios						

Instrumento V

Instrumento de observación durante la prueba del modelo.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Tipo de interacción						
Dificultades conceptuales						
Discusión sobre variables relevantes						
Tipo de modelo en desarrollo:						
Sencillez						
Factibilidad						
Uso de derivada						
Condiciones iniciales						
Conceptos utilizados						
Análisis del modelo						
Metodología de prueba						
Comentarios						

Instrumento VI

Instrumento de análisis del proyecto final.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Estructura						
Justificación hipótesis						
Solución del modelo						
Cálculo de parámetros						
Análisis resultados						
Conclusiones						
Propuesta de modificación del modelo						
Generalización						
Satisfacción de requisitos de la tarea						
Comentarios						

anterior son el resultado de una triple iteración de ocasiones anteriores en las que esta metodología se empleó para la evaluación de proyectos elaborados parcialmente en clase y parcialmente como tarea en casa.

Resultados obtenidos de la aplicación de los instrumentos

Resultados relativos a los instrumentos

Los instrumentos diseñados resultaron fáciles de utilizar, tanto en el momento de las discusiones en clase cuanto en la solución de la segunda parte del proyecto. Los resultados que se obtienen de su aplicación mostraron ser de gran utilidad para resumir las partes más relevantes del trabajo de los alumnos.

Aquellos resultados relacionados con el trabajo colaborativo en los grupos se utilizaron para detectar problemas en la interacción entre los alumnos de cada grupo y ayudar a resolverlos para el mejor funcionamiento del grupo. Estas partes de los instrumentos fueron de gran utilidad, además, en la identificación del papel que cada uno de los participantes jugó en la solución del problema planteado, para determinar el tipo de actividad de preferencia, sus fortalezas y debilidades en cada parte de la actividad.

Consideramos que un valor adicional de los instrumentos consiste en que pueden ser fácilmente modificados para atender las necesidades de proyectos distintos aquí reportado, en términos de sus contenidos conceptuales y sus variables relevantes.

Resultados relativos al aprendizaje de los alumnos

La solución del modelo propuesto permitió poner de manifiesto aspectos clave del conocimiento de los alumnos que difícilmente se obtienen con un examen tradicional. Los productos que generan los alumnos a lo largo del proceso de solución de la actividad involucran respuestas largas, justificaciones precisas y comentarios profundos, todos ellos bien definidos, por lo que es más fácil acceder a la forma en la que piensan sobre los conceptos y a las estrategias que utilizan para trabajar con ellos.

En el problema surge de manera natural la comparación entre una forma de pensar en la que las variables están relacionadas de manera directa a través de una relación funcional y otra forma de pensar en la que la atención se centra en la variación. Para muchos de los alumnos la modelación en términos de la variación resulta sumamente problemática, a pesar de que el problema se preste de manera más o menos clara a ello y de que las relaciones entre las variables tengan una expresión matemática más simple. A través del proceso de solución del proyecto, todos los alumnos que mostraron dificultades en el primer ciclo del planteamiento fueron cambiando de opinión y valorando, por ellos mismos, las ventajas de la adopción de un modelo de variación. En la gráfica 1 se muestra el tipo de modelo presentado por cada uno de los grupos desde el primer ciclo hasta el último, en el momento de la presentación final.

Es importante notar que en esta gráfica no se toma en consideración si el modelo es o no correcto, sino únicamente si la presencia o ausencia de la relación de las variables con la variación es adecuada.

En la solución de este modelo se descubre una idea poderosa: la posibilidad de pensar en términos de variación puede brindar estrategias de solución a problemas de una manera más simple y más accesible en algunos casos, que el considerar directamente la relación entre las variables. Los alumnos de este curso, como se observa en la figura, mostraron dificultades al abordar el problema de esta manera, únicamente uno de los grupos inició el proceso incluyendo la variación en el modelo, a pesar de que el curso en cuestión era un curso de ecuaciones diferenciales en el que la variación juega desde el inicio un papel preponderante. Sin embargo, también se puede observar en la figura, que el mismo proceso de evaluación brinda a los estudiantes la oportunidad de reconsiderar sus ideas iniciales, auto

evaluar sus posturas y considerar otras alternativas y les ayuda a interiorizar el conocimiento. Los instrumentos de evaluación, por su parte, permiten observar la dinámica misma del proceso de reconsideración de alternativas de solución, lo cual sería imposible a través de una forma de evaluación tradicional. En la misma figura se puede observar que el grupo 3 inicia con un modelo no adecuado de variación y rápidamente lo transforma en un modelo adecuado, mientras que los alumnos del grupo 4 tienen más dificultades en transformar sus ideas acerca del problema.

En el modelo se plantea también la necesidad de considerar que en el problema la función “memorización” entra como una variable de la ecuación diferencial, además de la variable independiente y que, en una situación como ésta, la función constituye la incógnita del problema, cuestión que también resulta poco clara para los estudiantes. En este caso, la posibilidad de identificar a la función con la incógnita de la ecuación no presentó una dificultad para los estudiantes que iniciaron el proceso de solución de la actividad en términos de una ecuación diferencial, pero sí lo fue para aquellos que iniciaron el proceso buscando una relación funcional y que introdujeron posteriormente la variación; el análisis de la ecuación ayudó a resolver esta dificultad.

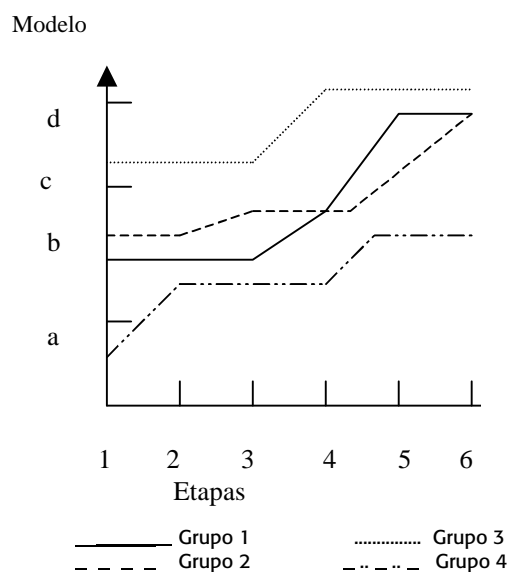
Otro aspecto relacionado con el nivel de conocimiento de los alumnos que se pudo evaluar es la flexibilidad con la que utilizan distintos sistemas de representación. En este estudio se encontró que los alumnos usan una variedad de representaciones del problema, no únicamente en la presentación y análisis del modelo, sino también como apoyo a su razonamiento. Entre los sistemas de representación utilizados por los estudiantes de este grupo se encontraron: el gráfico, para funciones y para la variación en forma de campos de pendientes o de línea fase; el analítico; el análisis verbal de situaciones; esquemas para interpretar la variación, y tablas. Se encontró, además, que algunos alumnos muestran mucha mayor seguridad en el uso de las representaciones y en el paso entre representaciones que otros. Por ejemplo, los alumnos del grupo 3 comenzaron por plantear un esquema en el que, mediante flechas y cajas, representaron las variables involucradas en el problema y la forma en la que cambiaban a lo largo del tiempo; esto facilitó el reconocimiento del problema como uno de variación y los condujo a plantear, de entrada, una ecuación diferencial. En la segunda visita del primer ciclo se registró que este

grupo llevó a cabo un análisis cualitativo de su modelo y que, al hacerlo enfrentaron algunos problemas causados por la aparición de las condiciones iniciales dentro de la ecuación diferencial que en ese momento no fueron capaces de resolver; no fue sino hasta el segundo ciclo en el que, a partir de los comentarios de sus compañeros y del profesor, detectaron la causa de las anomalías en el análisis. Los alumnos que conformaban el grupo 2, por otra parte, utilizaron de entrada una gráfica para describir su hipótesis acerca del comportamiento del problema y a partir de esa gráfica trataron de encontrar una relación funcional que se pareciera a la gráfica, sin incluir la variación y tuvieron muchas dificultades para lograrlo y para justificarlo.

A través de los instrumentos de evaluación fue posible seguir las estrategias de los alumnos relativas a la elección de las variables importantes. La modelación es una actividad difícil para la mayor parte de los estudiantes y las dificultades comienzan desde el momento mismo de elegir las variables que intervienen en el problema. Durante la primera fase de la solución la mayoría de los alumnos discutieron acaloradamente sobre las variables involucradas y sobre cuáles podrían jugar un papel secundario. En la mayor parte de los primeros modelos generados, salvo aquél generado por el grupo 3, los modelos incluían varias variables de igual relevancia. Por ejemplo, el grupo 4 incluyó en su primer modelo la atención del estudiante, la edad del estudiante, la hora del día a la que se lleva a cabo el concurso y el número de datos aprendidos, además del tiempo, aunque mostraron serias dificultades para dar prioridad a unas variables sobre otras.

Otro concepto que mostró ser un obstáculo para los alumnos es el de proporcionalidad. La mayoría de los alumnos utilizaron sumas de variables ponderadas en su modelo, pero al preguntárseles el papel que jugaban los pesos de cada variable en sus expresiones tuvieron dificultades para explicarlo con claridad. Les fue difícil también reducir estas expresiones de manera que pudieran representarse con el menor número de parámetros.

La estrategia seguida en el proceso de evaluación mostró también ser eficiente en la búsqueda de evidencias acerca de la capacidad de los estudiantes para analizar y resolver la ecuación diferencial, una vez planteado el modelo. Al igual que en los aspectos mencionados anteriormente, mediante la metodología empleada resultó fácil acceder a la determinación de qué tan eficientes son los alumnos en el uso de los



Grafica 1. Nomenclatura: Tipo de modelo: a) Vaga relación entre variables; b) Relación funcional; c) Modelo con variación poco adecuado, y d) Modelo adecuado con variación.

Etapas: 1. Ciclo 1-1 2. ciclo 1-2; 3. Presentación; 4. Ciclo 2; 5. Visita apoyo, y 6. Proyecto final.

métodos analíticos de solución y de los métodos cualitativos de análisis. Una limitación de la metodología consiste en que a través del análisis de un solo problema no se puede evaluar si los estudiantes son capaces de resolver distintos tipos de ecuaciones diferenciales; sin embargo, pensamos que esto se puede lograr con otro tipo de evaluación en otro momento.

En la segunda parte del proceso, aquella que tiene lugar fuera del aula, los estudiantes tienen acceso a literatura y a otros medios para resolver sus dudas. En esta parte del proyecto el interés se centra en la forma en la que los estudiantes justifican los cambios en su modelo, en la forma de trabajar con él y en la manera como estructuran la presentación y análisis de sus resultados. Podría pensarse que en esta etapa es difícil hacer un seguimiento de los conocimientos de los estudiantes; los resultados muestran, sin embargo, que sí es posible dar cuenta de las estrategias de razonamiento, las fortalezas y las debilidades de los alumnos.

El resultado más interesante en esta parte del problema consiste en la evolución de las formas de justificar sus acciones. En la primera parte del pro-

ceso, los estudiantes usan justificaciones pobres de sus ideas. Un comentario típico es el manifestado por un alumno del grupo 1: “No sé explicar pero eso es lo que pensamos y por eso lo planteamos así”. En la segunda parte, después de refinar varias veces su forma de abordar el problema, las justificaciones también evolucionan; por ejemplo, los alumnos del mismo grupo se expresan de la siguiente manera: “Nuestro modelo incluía las condiciones iniciales como parte de esta función, de esta que está a la derecha de la derivada, pero, al consultar algunos libros nos dimos cuenta de que en los modelos no entran las condiciones iniciales sino hasta el final. (Interviene otro alumno) eso también lo vimos en nuestros apuntes, en los ejemplos que nos diste, pero, como que no entendíamos por qué porque la verdad sentíamos que lo que está pasando cuando empiezas a medir y eso es importante, pero discutimos un rato para entender y pues ya vimos que lo que pasa es que la derivada es como la diferencia pero chiquitita entre el estado final y el inicial, y que ahí ya, como que ya se toman en cuenta. (Interviene el primer alumno) por eso, como ya están tomadas en cuenta ya nada más las fijamos cuando ya resolvimos la ecuación, acá en esta parte...”. En la presentación del trabajo los alumnos de este grupo reconstruyeron de una manera más resumida y clara este mismo argumento.

La necesidad de evaluar el o los parámetros del modelo planteó a los estudiantes el problema de la interpretación a mayor profundidad de este tipo de variables. Si bien todos los grupos utilizaron desde el inicio de la actividad algún tipo de constante arbitraria, todos tuvieron dificultades para explicar su significado. La necesidad de probar el modelo con datos específicos los ayudó a reconsiderar el papel de los parámetros, así como sus estrategias de modelación para eliminar de ellos las dificultades que introduce la evaluación de un gran número de constantes. Por su parte, la metodología de cálculo de estas constantes consistió un aprendizaje nuevo para los estudiantes ya que en ningún otro curso habían aprendido procedimientos para ajustar modelos a datos reales. Fue en esta parte de la actividad donde los alumnos requirieron de mayor apoyo del profesor; sin embargo, en este aspecto también se registró una evolución favorable de las estrategias de los alumnos. Los métodos de aproximación de los parámetros que utilizaron los grupos en un principio, cuando aún no tenían acceso a otras fuentes de información, consistieron básicamente en las siguien-

tes: a) después de resolver la ecuación, sustituir los datos de una persona, despejar el parámetro y después hacer un promedio para obtener un valor final para el o los parámetros, b) resolver la ecuación utilizando los primeros datos y a partir de ellos calcular el valor del parámetro que se usaría para el modelo final. Conforme los estudiantes tuvieron oportunidad de trabajar con los datos y verificar si su modelo los describía con cierta precisión, cambiaron de estrategia. Dos de los grupos, el 2 y el 3, llegaron a buscar procedimientos sofisticados de ajuste de datos y se introdujeron, por ellos mismos, al estudio de los métodos numéricos disponibles en los paquetes computacionales.

El análisis final de los resultados del proceso de modelación fue menos profundo de lo que se esperaba. Los alumnos se limitaron a comentar qué tan bien su modelo ajustaba los datos, sin incluir un análisis de la razón por la que el modelo podría tener limitaciones. Se concretaron, en general, a mostrar las virtudes del modelo propuesto, aun en los casos en que éstas no eran tan reales, o a comentar, muy escuetamente, algunas fallas del modelo y la necesidad de hacer cambios, sin especificar cuáles. Los alumnos incluyeron también en forma muy breve, y no muy clara, algún comentario acerca de la generalizabilidad del modelo, que era un requisito del proyecto. Esto condujo a la necesidad de hacer más trabajo al respecto en clase.

Otros aspecto que vale la pena mencionar es la posibilidad que este tipo de evaluación abre a la creatividad de los alumnos. Los modelos presentados por los diversos grupos fueron distintos, al igual que las estrategias para probarlos. Para la presentación del producto final del proyecto los grupos no se limitaron a hacer un reporte de su procedimiento y la justificación de su producto, como se había pedido, sino que utilizaron el modelo en situaciones diversas para intentar mostrar sus bondades y convencer así al usuario de la conveniencia de adoptarlo.

Un último aspecto a mencionar está relacionado con la participación de los estudiantes. Todos los alumnos mostraron interés por el proyecto y trabajaron intensamente durante su solución. Es importante destacar que durante el proceso de evaluación se notó un cambio de roles entre los estudiantes. Estudiantes que en las clases solían ser poco participativos y que aparentaban poco conocimiento de los temas tomaron el papel de líderes de sus grupos, se mostraron muy activos y, en la segunda parte del proyecto, estudiaron a profundidad el problema

para resolverlo con mayor exactitud. Esto nos permite considerar que el uso de estrategias únicas de evaluación puede perjudicar a algunos alumnos al no brindarles oportunidad de mostrar sus talentos y su conocimiento de manera efectiva. A partir de la solución del proyecto, el papel de estos alumnos en la clase cambió de forma considerable. Uno de los alumnos entre los que se observó un fuerte cambio fue quien indujo a los estudiantes de su grupo, el grupo 3, a considerar el diseño de un esquema previamente al planteamiento del modelo y quien decidió a partir del esquema utilizar en el modelo una ecuación que incluyera una diferencia. El primer modelo de este grupo fue un modelo discreto de ecuaciones en diferencia que no se había estudiado en clase. Otros compañeros del grupo transformaron este modelo en una ecuación diferencial. Es importante notar cómo este tipo de metodología permite a los alumnos desarrollar procedimientos propios utilizando sus recursos matemáticos y no únicamente procedimientos previamente estudiados y, en muchas ocasiones, únicamente memorizados sin comprensión.

Un resultado adicional de esta evaluación consistió en que a través del proceso de modelación los alumnos del curso desarrollaron herramientas conceptuales que hicieron más fácil la comprensión de los temas posteriores. El mismo proceso de desarrollo de la actividad generó conocimiento.

Los resultados arriba mencionados ponen de manifiesto que a través de un esquema de evaluación basado en la modelación es posible poner en evidencia muchos aspectos del conocimiento de los estudiantes que los métodos tradicionales no contribuyen a aclarar. Esta metodología favorece el pensamiento crítico de los estudiantes al estimularlos a reconsiderar sus primeras respuestas y a desarrollarlas de una manera más sólida. El refinamiento en las estrategias de solución permite tomar en consideración las posibilidades de los estudiantes de auto valorar y mejorar sus primeras respuestas en la evaluación, cuestión que no es pensable a través de una prueba tradicional. Esta experiencia da cuenta de que la metodología de evaluación basada en modelos puede proporcionar a los estudiantes experiencias ricas en las que pueden poner en evidencia sus conocimientos matemáticos, la forma en la que entienden los conceptos del curso, sus estrategias de solución de problemas y sus estrategias de comunicación. La misma metodología brinda además oportunidades a los estudiantes de revalorar sus respues-

tas, su forma de expresión y sus estrategias de solución. El proceso de evaluación se convierte, de esta manera, en una experiencia rica de aprendizaje.

Los instrumentos diseñados, por su parte, muestran un ejemplo del tipo de instrumentos que puede ser utilizado de manera práctica y sencilla al poner en práctica este tipo de evaluación. Los resultados de su uso indican que la información que se obtiene de ellos es útil tanto para el diagnóstico de los estudiantes cuanto para la evaluación de su desempeño.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación en evaluación muestran que es posible encontrar metodologías para valorar el conocimiento de los estudiantes que producen mayor cantidad de información relevante y de calidad que las evaluaciones tradicionales. En una evaluación como la que aquí se reporta se observa que es posible obtener mayor información de la esperada, al tener la oportunidad de acercarse a otras variables que constituyen una parte fundamental del proceso enseñanza aprendizaje.

El planteamiento de modelos como evaluación brinda a los alumnos una oportunidad de mostrar sus conocimientos previos. En la solución del modelo que aquí se presenta fue posible acercarse al conocimiento de los alumnos sobre los conceptos de variación, función, derivada, variable y ecuación, además de poder constatar sus ideas acerca de lo que significa modelar y sus habilidades de comunicación, cuestionamiento, razonamiento lógico y discusión.

En términos de la metodología misma de evaluación, un resultado de suma importancia es la producción fácil y eficiente de trazas de documentación a lo largo del proceso. Estos datos, en conjunto, permiten la obtención de información muy completa que de otra manera habría sido muy difícil de conseguir.

En resumen, este tipo de estrategia de evaluación brinda a los estudiantes más oportunidades de mostrar sus capacidades y sus aprendizajes. Estudiantes que a través de un método tradicional hubieran sido calificados como poco competentes o incompetentes se muestran en este estudio con un gran potencial y con niveles de comprensión inesperados que hubiera sido imposible de detectar de otra manera. Esta metodología proporciona a los estudiantes una experiencia rica en las que ellos pueden poner de manifiesto sus puntos de vista, sus conocimientos de los conceptos importantes de un curso especí-

fico, pero también de otras ideas matemáticas que son el resultado de la integración de lo que han aprendido con anterioridad. La metodología que aquí se presenta es tan solo un ejemplo de posibles estrategias de evaluación innovadoras. La búsqueda de situaciones que se presten a tratamientos semejantes para otros contenidos dentro de las matemáticas o en el contexto de otras disciplinas es un problema que aún no ha sido resuelto. ■

Referencias

- Aliprantis, A. D. y Carmona, G. Introduction to an economic problem: a models and modelling perspective. En: *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. R. Lesh and H Doerr (eds.), Lawrence Erlbaum Associates. Mahawah, NJ. USA, 2003.
- Bickel, P., Buyske, S. Chang, y H. Ying, Z. On maximizing item information and matching difficulty with ability, *Psychometrika*, **66**(1), 69-77, 2001.
- Brennann, R., An essay on the history and future of reliability from the perspective of replication, *Journal of Educational Measurement*, **38**(4), 295-317, 2001.
- Cohen, R. J., *Psychological testing and assessment: An introduction to tests and measurement*, McGraw Hill Higher Education, USA, 2002.
- Embreston, S., Generating items during testing: Psychometric issues and models, *Psychometrika*, **66**(4), 407-433, 1999.
- Embreston, S., Heshberger, S. (eds.), *The new rules of measurement: What every psychologist and educator should know*, Lawrence Erlbaum Associates. Mahawah, NJ, USA, 1999.
- Enright, M., Morley, M., Sheehan, K., Items by design: The impact of systemic feature variation on item statistical characteristics, *Applied Measurement in Education*, **15**(1), 49-74, 2002.
- Filler, A. and Pollard, A., *The social world of pupil assessment*, London, Continuum, 2000.
- Firestone, W. A., Monfils, L., Mayrowetz, D. y Camilli, G., *The ambiguity of teaching to the test*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA, (en prensa).
- Goldin, G. A., Representations in mathematical learning and problem solving En L. English (ed.), *International handbook of research design in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA (en prensa).

- Kane, M., Current concerns in validity theory, *Journal of Educational Measurement*, **38**(4), 319, 342, 2001.
- Lesh, R. y Doerr, H. M., Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En: *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, R. Lesh and H. Doerr (eds.), Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA, 2003.
- Lesh, R.; Hoover, M.; Hole, B.; Kelly, A. and Post, T., Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. En: R. Lesh and A. Kelly (eds.), *Research design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA, 2000.
- Lesh, R. y Kelly, A., Multitiered teaching experiments. En: R. Lesh and A. Kelly (eds.), *Research design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA, 2000.
- McClain K., Task analysis cycles as tools for supporting students' mathematical development. En: *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, R. Lesh and H. Doerr (eds.), Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA, 2003.
- Morgan, C. Better assessment in mathematics education? A social perspective. En: I. Boaler (ed.), *Multiple perspectives in mathematics education and learning*, London, Ablex Publication, 2000.
- National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for school Mathematics*, Reston, VA, USA, 2000.
- Sakonidis, H. y Klothou, A., Assessment practices in school mathematics: acting and debating, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, vol. 4, College of Education, University of Hawaii, USA, 2003, p. 103-110.
- Schorr, R. Y. y Bulgar, S., The impact of preparing for the test on classroom practice, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, vol. 4, College of Education, University of Hawaii, USA, 2003, p. 135-143.
- Zawjeroski, J. S., Lesh, R. and English, L., A models and modelling perspective on the role of small group learning activities. En: *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, R. Lesh and H. Doerr (eds.), Lawrence Erlbaum Associates, Mahawah, NJ, USA, 2003.