

# La entonación justa en la acústica de Helmholtz

Luca Conti

Perspectiva

## Sinopsis

En el curso del siglo XIX, físicos y teóricos de la música realizaron sistemas e instrumentos en entonación justa, como una posible respuesta a la afirmación universal del sistema temperado. En su tratado, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* (1863, 1877) Hermann von Helmholtz dedica amplio espacio al problema de la entonación justa desde una perspectiva científica. Por otra parte, el físico alemán rechaza una concepción de los intervalos musicales demasiado vinculada a la aritmética, afirmando que el problema del sonido tiene que ser enfrentado desde el punto de vista de la sensación.

Un acontecimiento fundamental de la acústica musical del siglo XIX fue la publicación del tratado de Hermann von Helmholtz (1821-1894) *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* en 1863. El libro fue reeditado varias veces, la cuarta y última en 1877, y fue traducido al inglés y al francés. La traducción al inglés de Alexander Ellis (1814-1890) fue publicada en 1875 y reeditada en 1877. Esta edición del tratado constituye un caso muy especial, en cuanto a que las glosas y los apéndices del filólogo y matemático inglés, aprobados por el mismo Helmholtz, forman un texto paralelo, a tal punto que sería mejor considerar la edición en inglés como un tratado de Helmholtz-Ellis. La trama paralela que el teórico inglés desarrolla en las notas llega, en algunos casos, a ser diferente de lo afirmado en el texto principal por el mismo Helmholtz, como por ejemplo cuando Ellis plantea como hipótesis una afinación por cuartas y no por quintas en la teoría griega de los tiempos de Pitágoras.<sup>1</sup>

Todos saben que Ellis estableció una nueva unidad de medición de los intervalos musicales, el cent (1/100 del semitono temperado en el sistema de 12 sonidos) que por su practicidad se afirmó de manera gradual pero inexorable

en los estudios musicológicos y, sobre todo, etnomusicológicos. Fue un reflejo de la afirmación del gradual triunfo del sistema bien temperado, que en el curso del siglo XIX suplantó los varios sistemas mesotónicos utilizados anteriormente. Al contrario, Ellis, como Helmholtz, y otros más, esperaban que un sistema más cercano al sistema natural, establecido por medio de la reproducción de los intervalos naturales (derivados de la serie de los armónicos), se afirmase para una música mejor y más "natural". Ellis dedicó muchas investigaciones al problema e intentó demostrar que una aplicación de la escala natural a los instrumentos musicales era posible.<sup>2</sup>

En el curso del siglo XIX varios estudiosos se dedicaron al problema de la entonación justa, de los sistemas que permitieran utilizarla con mayor facilidad y de aplicarla a los instrumentos musicales. Entre otros, en el Reino Unido fueron Henry Liston,<sup>3</sup> Thomas Perronet Thompson<sup>4</sup> -que construyó un armonio con 40 sonidos en cada octava- Colin Brown,<sup>5</sup> William Lunn (también con el nombre de Arthur Wallbridge)

<sup>2</sup> Ellis, A. J., 1864.

<sup>3</sup> Liston, H., 1812.

<sup>4</sup> En 1834 Thompson construyó un "organo enarmónico", que se parece al archiorgano de Vicentino, con dobles teclas negras. Véase Thompson (1850).

<sup>5</sup> Brown, C., 1885. Brown hizo construir un "armonium vocale" con entonación justa.

<sup>1</sup> Helmholtz (von) H. L. 1875.

y Robert Holford Macdowall Bosanquet; en Estados Unidos Henry Ward Poole en 1850 publicó un proyecto de teclado enarmónico;<sup>6</sup> en Alemania, junto a Helmholtz, se dedicaron a estos problemas su alumno japonés Shohé Tanaka,<sup>7</sup> Moritz Drobisch, Carl Andreas Eitz,<sup>8</sup> Theodor Wittstein<sup>9</sup> y Gustav Engel. En los años sesenta del siglo XIX, siempre en Alemania, Georg Appunn (1816-1888), cuyo trabajo fue conocido y apreciado por Helmholtz, realizó un armonio con 36 y 53 sonidos en cada octava. También el físico Arthur Joachim von Oettingen se dedicó a la entonación justa en el marco de su más amplia teoría musical. Las causas de este renovado interés hacia cuestiones milenarias de acústica musical están fundamentadas en varias razones, de orden científico e histórico. El desarrollo de nuevos sistemas de medición del sonido (en particular, sirenas) llevó a la repetición de los antiguos experimentos que desde los tiempos de Pitágoras se hacían para sostener las varias teorías acústicas o sea, en último análisis, las varias subdivisiones *intervalares*. La pregunta fundamental es: ¿por qué el hombre percibe consonancias y disonancias? Y ¿qué tienen que ver las consonancias con las relaciones numéricas simples? Históricamente, por otra parte, la progresiva afirmación del sistema bien temperado en el siglo XIX -una afirmación vinculada a la producción industrial del piano y a la necesidad de una afinación estandarizada- hacía inevitable una crítica a este sistema demasiado artificial (desde una perspectiva física), por haber surgido de una subdivisión en cierto sentido mecánica de la octava en 12 partes iguales, con aproximaciones a veces intolerables de los intervalos fundamentales (en particular las terceras y las sextas, mayores y menores).

Convencido partidario de una "cientificidad" de la armonía y del temperamento, cuyo desarrollo era en cierto modo deducible de la historia en cuanto que estaba basado en el progreso de reglas científicas, como lo fue Helmholtz, Ellis desarrolló los problemas de la organización escalar de las alturas también en dirección comparativa.<sup>10</sup> Si el sistema

bien temperado constituye una fase de transición, con todos sus errores acústicos, Helmholtz y Ellis creen que un nuevo sistema, más natural, se afirmará en el futuro. No satisfecho de cuanto el científico alemán escribió acerca de la entonación justa, Ellis propuso su propio sistema, al que denominó *duodene*.<sup>11</sup>

La traducción al inglés tuvo éxito mundial hasta el siglo XX, no solamente en el Reino Unido, sino también en Estados Unidos. Fue el *baedeker* de acústica de varias generaciones de músicos: de hecho este libro, durante cerca de un siglo, fue el único recurso de quien quisiera profundizar en el estudio de las relaciones entre sonido, música y percepción. El de Helmholtz fue el último esfuerzo de síntesis en el campo de la acústica musical.

El trabajo de traducción de Ellis fue criticado por Llewellyn Lloyd, que lo acusó de una supuesta "traición" al texto original, en particular en algunos términos decisivos que fueron traducidos en favor de los teóricos ingleses de la entonación justa. Lloyd estaba convencido de que la traducción al inglés fue hecha por Ellis con la intención de ubicar al benévolo Helmholtz en el grupo de teóricos de la entonación justa. Lloyd relaciona algunos pasajes de la versión original con la versión de Ellis y con una propia traducción en la que no aparece el fatídico término *just intonation* utilizado por Ellis, substituido por *perfect intonation*, cuando se hace referencia a los instrumentos de cuerda que tocan perfectamente, mientras que para los teclados se adopta la definición *true tuning o tuning with true intervals*.<sup>12</sup> La crítica de Lloyd es directa explícitamente a las "pseudo-especulaciones de los 'teóricos' del siglo XIX"<sup>13</sup> de quienes fue el más implacable fustigador. También Helmholtz puso en guardia respecto de una visión demasiado sagrada, neopitagórica, que ubicara al centro el aspecto aritmético de los intervalos: "También en tiempos muy recientes pueden encontrarse teóricos amigos de la música que se deleitan con el misticismo aritmético más bien que intentar la escucha de los parciales superiores".<sup>14</sup> Sin embargo, el físico alemán se refiere a la falta de empirismo que caracteriza a algunas de las experiencias de la entonación justa, al culto matemático que después del Iluminismo sigue preocupando a matemáticos-aficionados de la música y músicos-aficionados de la acústica; en pocas palabras, a todos los que acababan poniendo en segundo plano las

<sup>6</sup> Poole, H. W., 1864. Véase Ellis, en Helmholtz (von) H. L. F., 1875.

<sup>7</sup> Tanaka, S., 1890. Discípulo de Helmholtz, Tanaka estudió la entonación justa y construyó un instrumento dotado de un teclado de 26 sonidos en la octava, transportable mecánicamente sobre los 12 semitonos y pudiendo producir en suma 312 sonidos en la octava (entre ellos muchos sonidos repetidos).

<sup>8</sup> Eitz, C. A., 1891. Eitz, alrededor de 1890, condujo experimentos sobre cuartos de tono. En 1891 escribió un libro sobre el armonio con entonación justa que había hecho construir en la Schiedmayer de Stoccarda. Ideó un sistema de solmización para el temperamento igual de 53 sonidos. Eitz y su instrumento son citados en la autobiografía de Max Plank (de 1893), quien se ocupó de la entonación justa en un artículo: Plank, M., 1893.

<sup>9</sup> En 1888 Theodor Wittstein publicó un texto basado en las ideas de Helmholtz, en el cual propone dos afinaciones diferentes con entonación justa (límite 5), una con 19 sonidos en la octava, la otra con 30. El libro contiene un nuevo tipo de notación y diseño del teclado para aplicar este sistema a la práctica musical.

<sup>10</sup> Véase Ellis, A. J., 1884, y "On the Musical Scales of Various Nations." *Journal of the Society of Arts*, 1884, 33.

<sup>11</sup> Ellis, A. J. 1874, 23. McLaren, B. *Microtonality. Past, Present, Future*. S.I., edic. priv., 1998, P.54, afirma que el concepto de *duodene* ha tenido una cierta influencia sobre muchos compositores, entre ellos Ben Johnston, Paul Rapoport y Wendy Carlos.

<sup>12</sup> Lloyd, L. "Just Intonation Misconceived." *Music and Letters*, 24/3, 1943, p. 140-141.

<sup>13</sup> *Ibid.*, p. 141.

<sup>14</sup> Helmholtz (von) H. L. F., 1875, p. 229.

*sensaciones del tono*.<sup>15</sup> El problema de fondo de todas las teorías musicales es la falta de una comprobación experimental. Lloyd está totalmente de acuerdo cuando afirma: "El verdadero método científico [...] verifica todas las especulaciones o las hipótesis acerca de la naturaleza a través de la experimentación [...]. Es sobre ésta que los músicos teóricos del siglo XIX se han atascado frecuentemente".<sup>16</sup> Además, muchas de las teorías "científicas" de la música se presentan de manera axiomática, sin la confrontación con la mínima prueba estética.

No queda sino volver la mirada al centro propulsor de la acústica musical del siglo XIX y, en lo que respecta a la música, tal vez del XX: *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* de Helmholtz.

¿Cuales fueron los autores preferidos por Helmholtz? La pregunta surge espontáneamente al momento de empezar un recorrido por sus ideas. ¿Llegó a ser condicionado, el científico, por el esteta que se escondía en cualquier hombre educado de la época romántica, en particular alemán? Para Helmholtz la gran música alcanzó probablemente su cumbre con Mozart, Beethoven y tal vez Mendelssohn, y es significativo que, cuando estaba escribiendo su *Teoría fisiológica de la música*, Chopin y Schumann habían muerto hacía varios años (1849 y 1856) sin ser apreciados, al parecer, de manera explícita por nuestro científico. En 1895, cuando fue publicada la quinta edición de la obra, Helmholtz había tenido la oportunidad de escuchar música de Brahms, Liszt y, quizá, las primeras composiciones de Mahler, Bruckner y Debussy; pero él no habla de estos autores en ninguna parte. A pesar de haber frecuentado asiduamente Bayreuth y la familia Wagner, la historia de la gran música parece haberse detenido para él a principios del siglo XIX.<sup>17</sup>

Una buena porción del tratado de Helmholtz está dedicada a la música; no parece extraño pues que las investigaciones del científico alemán, también gracias a los aportes de Ellis, hayan sido la fuente y el punto de partida, no siempre explícitamente declarado, de muchísimos teóricos de la música y compositores, incluyendo a Varèse y a Partch. Helmholtz ofrecía, no solamente a físicos y matemáticos, los procedimientos elementales para reflexionar sobre los conceptos de altura, intervalo,

escala, afinación y temperamento, poniendo en el centro la percepción humana. El trabajo de Ellis imprimía nueva fuerza a la vocación didáctica de la obra, aclarando desde un principio que estaba "adaptada al uso de los estudiantes de música". Aunque no se pueda obviar la necesidad de un empeño intelectual de tipo matemático para abordar el tratado de Helmholtz, es claro que esta obra puede ser leída en diversos niveles y también en la imaginación de su artífice fue probablemente concebida como un trabajo hecho de "estratos", apreciable tanto por los músicos como por los científicos.

En un nivel más general, es evidente que Helmholtz, enfrentando el problema del sonido desde un punto de vista de la sensación, puso las bases para una moderna concepción del hecho musical, hacia un relativismo que pusiera en discusión certezas viejas y nuevas, por ejemplo el temperamento igual. Los apéndices de Ellis incluyen uno de los primeros estudios comparativos sobre las escalas y los intervalos musicales en varias épocas y culturas. Por otro lado, las investigaciones de Helmholtz establecieron una correlación entre disonancia y presencia de los batimentos en la superposición de hipertonos; en otras palabras, la teoría de la consonancia y de la disonancia de Helmholtz se basa en los armónicos, en cuanto afirma que dos sonidos son tan consonantes entre ellos cuanto más armónicos tengan en común. De esta manera, se establece en términos científicos una relación dialéctica entre consonancia-disonancia y el factor tímbrico. Se rebasaba así la antigua concepción que, al menos en la teoría, tomaba como ejemplo y ponía en relación solamente las fundamentales del intervalo. Después de Helmholtz, con el perfeccionamiento de las técnicas de medición, el modelo del sonido se hace siempre más complejo y la serie de los armónicos, a pesar de mantener su carácter jerárquico, transforma su función dentro de una nueva concepción del fenómeno sonoro. Es oportuno observar más de cerca los contenidos del tratado de Helmholtz-Ellis que pertenecen a la entonación justa.

Sustentándose en datos experimentales, el científico alemán llega a construir un sistema basado en intervalos "naturales", para demostrar que no se trataba de una quimérica e inalcanzable hipótesis. Antes de concentrarnos en este aspecto será útil echar un vistazo a la estructura general del libro.<sup>18</sup> La primera y la segunda parte (pp. 7-233) están dedicadas a los aspectos físicos de la vibraciones sonoras: sensaciones de la escucha, causas físicas y fisiológicas de los fenómenos (sonidos parciales y de combinación, batimentos), a los que

<sup>15</sup> En el siglo XX sobran actitudes similares. Se recurre, con mucha, demasiada libertad y en varias formas, a una concepción místico-teológica del número, muchas veces relacionada con los intervalos naturales y con la serie de los armónicos. En el curso del siglo XIX el progreso de los estudios de acústica no alcanzó a colmar la variedad existente entre la esfera de la ciencia, en mérito a los métodos de investigación, y las extrapolaciones ofrecidas por los teóricos musicales, que, sin embargo, recogieron informaciones de aquel contexto reconfortante.

<sup>16</sup> Lloyd, L., 1943-44, 70, p.36.

<sup>17</sup> Meulders, M., 2005.

<sup>18</sup> El número de páginas entre paréntesis se refiere a Helmholtz (von) H. L. F., 1875.

el autor llama "los fenómenos naturales, que se presentan mecánicamente, sin excepción, en todos los seres vivos en los que el oído está construido con el mismo dibujo anatómico del nuestro".<sup>19</sup> La tercera parte (pp. 235-371) tiene como objeto la teoría de la música, que inevitablemente involucra, dice Helmholtz, también problemas estéticos e históricos. Por esto hay espacio también para un estudio de los sistemas griegos, persas, árabes, las escalas pentatónicas, diatónicas y eclesiásticas, el modo mayor y menor y su armonización. De todas estas escalas Helmholtz reconstruye la génesis. Sobre la afinación árabe, el físico alemán propone un sistema de 16 quintas consecutivas, cuyos valores son transferidos al interior de una octava.<sup>20</sup> Es tomada en cuenta la afinación temperada (pp. 310-315). Helmholtz presenta su armonio de entonación justa para investigar luego los límites de la afinación temperada desde una perspectiva física: el sistema temperado posee no pocas ventajas prácticas (pp. 320-327). Helmholtz examina (pp. 328-330) la subdivisión en 53 partes iguales propuesta por su contemporáneo Bosanquet. El capítulo XVII trata de los intervalos y los acordes disonantes (pp. 330-350), el XVIII de las leyes de conducción de las partes (pp. 350-362). El tratado concluye con una aclaración ineludible: la certeza de haber llevado su trabajo hasta los últimos límites de la filosofía natural, "hasta el punto en que las propiedades fisiológicas de la sensación del oído ejercen una influencia directa sobre las construcciones de un sistema musical".<sup>21</sup> Otros temas aparecen en los apéndices; entre ellos, algunos pertenecen al problema de la entonación justa en la práctica de la ejecución y en sus aplicaciones a instrumentos musicales. El problema de la entonación justa es considerado también en algunos de los apéndices escritos por Ellis.

Helmholtz está convencido de que la serie de los armónicos es "precisamente la misma para todos los sonidos musicales compuestos que corresponden a un movimiento uniformemente periódico del aire".<sup>22</sup> Pero, ¿cómo "suena" un sonido? El físico alemán presenta una descripción

sinéctica. Comparando un sonido (casi) sin parciales a uno compuesto, anota: "La serie de los primeros seis parciales de un sonido compuesto puede ser considerada musicalmente como un acorde mayor con un tono fundamental muy predominante".<sup>23</sup> Y añade, cuando explica el nacimiento de las relaciones de intervalos melódicos con base en el modelo de los parciales percibidos simultáneamente en un único sonido: "La percepción consciente en la vida cotidiana está limitada a oír el sonido compuesto por sobre el de sus parciales, como un todo y lo mismo, de la misma manera en que sentimos el gusto de un plato muy elaborado como algo entero, sin sentir claramente qué cosa se debe a la sal, a la pimienta u otras especias y condimentos".<sup>24</sup>

El punto de partida de las investigaciones de Helmholtz sobre los intervalos es la re-medición con la sirena de algunas veneradas proporciones respecto de la fundamental (=1): 1/2, octava; 2/3, quinta; 3/4, cuarta; 4/5, tercera mayor; 5/6, tercera menor. Cuando la fundamental de estos intervalos se traslada a la octava superior se obtiene la *inversión*. Con las proporciones debe invertirse el orden de los términos y duplicar el número más pequeño de la relación, de modo que 2/3 (quinta); 3/4 (cuarta); 4/5 (tercera mayor); 5/8 (sexta menor); 5/6 (tercera menor); 6/10=3/5 (sexta mayor), etc. Las consonancias no están garantizadas por la sencillez de las relaciones numéricas, sino por el fenómeno físico inducido en el oído humano por los intervalos que poseen estas relaciones. En otras palabras, la explicación científica de la consonancia no reside en los números; sólo en un segundo momento Helmholtz nota que "[a] parte la sexta menor, que es por cierto la más imperfecta de estas consonancias, las relaciones de sus 'números vibratorios' están todos expresados por medio de los números enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6".<sup>25</sup> Después de haber mostrado la escala mayor justa, el físico alemán presenta los varios registros de octava y la frecuencia de las notas de la escala natural en las diversas octavas (tabla 1):<sup>26</sup>

Notas	Do1-Si1	Do2-Si2	Do3-Si3	Do4-Si4	Do5-Si5	Do6-Si6	Do7-Si7
Do	33	66	132	264	528	1056	2112
Re	37,125	74,25	148,5	297	594	1188	2376
Mi	41,25	82,5	165	330	660	1320	2640
Fa	44	88	176	352	704	1408	2816
Sol	49,5	99	198	396	792	1584	3168
La	55	110	220	440	880	1760	3520
Si	61,875	123,75	247,5	495	990	1980	3960

tabla 1

<sup>19</sup> *Ibid*, p. 235.

<sup>20</sup> *Ibid*, p. 282.

<sup>21</sup> *Ibid*, p. 371.

<sup>22</sup> *Ibid*, p. 22.

<sup>23</sup> *Ibid*, p. 69.

<sup>24</sup> *Ibid*, p. 368.

<sup>25</sup> *Ibid*, p. 14.

<sup>26</sup> *Ibid*, p. 17a.

Con un discreto efecto "polifónico", en las notas al pie de la página, que a veces llegan a ocupar hasta tres cuartos del espacio disponible, Ellis ofrece la descripción de un instrumento musical suyo, el *harmonical*, un armonio que aplica la entonación justa propuesta por Helmholtz.<sup>27</sup> De hecho, el mismo científico alemán propone más adelante un instrumento: Ellis lo anticipa, con el propósito de indicar cómo escuchar los intervalos naturales a los *music students* a quienes la traducción está dirigida, como aclara desde la portada. El teclado del instrumento es convencional. Diez de los doce sonidos corresponden físicamente a las teclas de un armonio normal, pero tienen una entonación distinta. La tecla del DO#/REb es utilizada por Ellis para entonar el tono pequeño -otro "RE", 9/10 de la fundamental=1- mientras el FA#/SOLb, un poco fuera de lugar, como reconoce el mismo autor, sirve para el séptimo armónico (4/7 de la fundamental). Ellis presenta los valores en Hz de los sonidos de las primeras cuatro octavas (véase la tabla 2).<sup>28</sup> La entonación de la quinta octava es tratada por el autor en otro lugar.<sup>29</sup>

Con respecto al sistema bien temperado, de 12 sonidos equidistantes en la octava, el problema principal de una secuencia de entonación justa con pocos sonidos es el de no poder modular. Las únicas tonalidades que pueden emplearse con el instrumento de Ellis son el DO mayor y el DO menor.<sup>30</sup> Entonces ¿Qué música puede ser tocada con el llamado *harmonical*? El autor inglés hace un listado de algunas piezas que define como "ejercicios". Para algunos de ellos es necesario efectuar algunos ajustes con el fin de evitar modulaciones aparte del cambio mayor-menor sobre la misma tónica. Los fragmentos son: *God save the Queen* (en DO mayor), *The Heavens are telling* (DO mayor con modulación a DO menor); *Glorious Apollo, The Old Hundredth* (DO mayor); *John Anderson* (DO menor); *Adeste Fideles* (evitando la modulación a la dominante); *Auld Lang Syne* (DO mayor); *Dies irae* (en parte, DO menor que modula a DO mayor); *Leise, leise* (desde Der Freischütz de Weber); *Crudel perché* (de las *Nozze di Figaro* de Mozart, en DO menor, alterado, pero manteniendo la modulación temporal a DO mayor); *Wanderers Nachtlied D224* de Schubert; *The*

Notas	Do2-Si2	Do3-Si3	Do4-Si4	Do5-Si5	Relación nota a nota	Relación de Do2 a nota	Nota a nota (en cents)	De Do2 a nota (en cents)
Do	66	132	264	528	9:10	1:1	182	0
Re1	73 1/3	146 2/3	293 1/3	586 2/3	80:81	9:10	22	182
Re	74 1/4	148 1/2	297	594	15:16	8:9	112	204
Mi1b	79 1/5	158 2/5	316 4/5	633 3/5	24:25	5:6	70	316
Mi	82 1/2	165	330	660	15:16	4:5	112	386
Fa	88	176	352	704	8:9	3:4	204	498
Sol	99	198	396	792	15:16	2:3	112	702
La1b	105 3/5	211 1/5	422 2/5	844 4/5	24:25	5:8	70	814
La	110	220	440	880	20:21	3:5	85	884
Si1b	115 1/2	231	462	924	35:36	4:7	49	969
Si1b	118 4/5	237 3/5	475 1/5	950 2/5	24:25	5:9	70	1018
Si	123 3/4	247 1/2	495	990	15:16	8:15	112	1088
Do	132	264	528	1056		1:2		1200

tabla 2

<sup>27</sup> *Ibid*, p. 17n y pp. 466-468.

<sup>28</sup> *Ibid*, p. 17b.

<sup>29</sup> *Ibid*, p. 468.

<sup>30</sup> *Ibid*, p. 17n.

*Manly Heart*, o sea "*Bei Männern, welche Liebe fühlen*" desde *Die Zauberflöte* de Mozart. No se trata de un repertorio muy amplio.

Regresando al recorrido principal del tratado de Helmholtz, para encontrar observaciones inherentes a la organización de los intervalos y su aplicación escalar es necesario llegar hasta los apéndices. Después de haber examinado el problema de los batimientos en los sonidos simples y luego de los batimientos de los parciales superiores, Helmholtz analiza estos dos problemas en relación con el grado de "armoniosidad" de los intervalos. El nivel de consonancia de los intervalos es medido, además de emplear las fracciones convencionales, también con la "fuerza de los batimientos resultantes de la desafinación del intervalo correspondiente calculada para la calidad del timbre del violín".<sup>31</sup> Este nuevo parámetro, en el cual el factor tímbrico desempeña un papel importante, aparece en la última columna a la derecha de la tabla 3.<sup>32</sup>

La cuestión del temperamento igual es afrontada por Helmholtz antes y después de haber propuesto su armonía con entonación justa. El problema principal de la afinación bien temperada no son tanto las quintas, sino más bien las terceras. El "error" de las terceras surge para Helmholtz del viejo error pitagórico de crear las terceras a partir de una serie ascendente de cuatro quintas, porque en este caso las quintas justas dan un resultado peor de que las quintas bien temperadas.<sup>33</sup> Las observaciones de Helmholtz abordan también la relación entre sistema bien temperado y teoría musical tradicional, que tiende a establecer una clara división entre intervalos consonantes y disonantes, sin medidas intermedias; esto hace difícil establecer una nueva teoría en este campo basada en las relaciones fraccionarias.<sup>34</sup> El físico alemán reconoce que el sistema bien temperado surgió para el piano, en el que muchos de los efectos que se verifican en los patrones sonoros son aplacados y transitorios. Respecto de la innegable mayor facilidad de modular en el

Intervalos	Notación	Relación de alturas	Distancia relativa	Cents en los intervalos	Diferencia en cents	Intensidad de influencia
Unísono	Do	1:1	8:9	0	204	100,0
Segunda	Re	8:9	63:64	204	27	1,4
Supersegunda	Re+	7:8	48:49	231	36	1,8
Tercera "submenor"	Mib-	6:7	35:36	267	49	2,4
Tercera menor	Mib	5:6	24:25	316	70	3,3
Tercera mayor	Mi	4:5	35:36	386	49	5,0
Tercera supermayor	Mi+	7:9	27:28	435	63	1,6
Cuarta	Fa	3:4	20:21	498	85	8,3
Quinta "submenor"	Solb-	5:7	14:15	583	119	2,8
Quinta	Sol	2:3	15:16	702	112	16,7
Sexta menor	Lab	5:8	24:25	814	70	2,5
Sexta mayor	La	3:5	20:21	884	85	6,7
Séptima "submenor"	Sib-	4:7	35:36	969	49	3,6
Séptima menor	Sib	5:9	9:10	1018	182	2,2
Octava	Do	1:2	-	1200	-	50,0

tabla 3

<sup>31</sup> *Ibid.*, p. 187.

<sup>32</sup> *Ibidem.*

<sup>33</sup> *Ibid.*, p. 315.

<sup>34</sup> *Ibid.*, p. 227.

temperamento igual, no obstante la perspectiva, muchas veces declarada, de investigar la música como filósofo natural, Helmholtz no puede impedirse varias consideraciones de orden estético, como cuando estigmatiza el exceso de modulaciones en la música moderna, retomando la metáfora gastronómica: "Un hombre no puede vivir sólo de especias; la consecuencia de una incesante modulación implica casi siempre la cancelación de la conexión artística".<sup>35</sup> Así, ¿cuál sería la opción posible al sistema bien temperado? El punto de partida de Helmholtz es el sistema propuesto por Moritz Hauptmann (1792-1868), que había pensado en resolver la cuestión afinando las quintas y las terceras mayores independientemente las unas de las otras.<sup>36</sup> La sucesión de quintas DO ± SOL ± RE ± LA ± etc., resulta más aguda en una coma (81/80 = 22 cent) respecto de las notas homónimas obtenidas de sucesiones de terceras mayores DO1 ± SOL1 ± RE1 ± LA1 ± MI1 ± etc. Si se desciende por quintas a partir de SI en una serie de 12 quintas hasta el DOB, la última nota, reconducida en la octava, es aproximadamente 74/73 (= 24 cent) más baja que el SI. Las dos relaciones son: SI : SI1 = 81 : 80 y SI : DOB = 74 : 73. Estos dos intervalos, subraya Helmholtz, son casi iguales. El SI1 es la tercera mayor natural de SOL: descendiendo 8 quintas de SOL se llega a DOB con la siguiente sucesión: SOL ± DO ± fa ± Sib ± Mib ± Lab ± Reb ± SOLb ± DOB. El DOB es más bajo que el SI1, pero si se disminuye cada una de las 8 quintas 1/8 del intervalo 886/885 se llega al SI1 en lugar de al DOB. Dado que la relación 886/885 es por sí misma omisible, con mayor razón, dice Helmholtz, se puede omitir su octava parte. Así, la sucesión de Hauptmann puede hacerse coincidir con la nueva serie de quintas.

Fab ± DOB ± SOLb ± REb ± Lab ± Mib ± Sib =  
MI1 ± SI1 ± FA#1 ± DO#1 ± SOL#1 ± RE#1 ± LA#1

Esta es la base teórica que Helmholtz utilizó para el proyecto de un armonio modificado, que hizo realizar por la J. & P. Schiedmayer de Stuttgart.<sup>37</sup> El instrumento posee dos manuales y puede tocar todos los acordes mayores de FAb mayor hasta FA# mayor.<sup>38</sup> Además, el instrumento puede tocar muchos acordes menores.<sup>39</sup> Las 12 alturas mostradas a la izquierda se encuentran en el teclado superior, las 12 indicadas a la derecha sobre el inferior. No hay notas pertenecientes a tríadas de entonación justa fuera de las indicadas en el diagrama (15 tríadas mayores, en total), pero las tres notas del lado derecho LA, DO#/REb, MI producen tríadas justas con las de la extrema izquierda MI, SOL#/LAB y DO. Las tríadas

mayores y menores de FA, LA y DO#/REb requieren el uso de ambos teclados. Cada una de las 12 alturas mostradas en la mitad superior del diagrama son una coma más bajas que las equivalentes en la parte baja del dibujo. Cada quinta excepto DO#/REb-SOL#/LAB está disponible a dos alturas diferentes a la distancia de una coma; lo mismo vale para seis tríadas: las mayores de MI, SI y FA#, y las menores de SOL#, RE#/Mib y Sib. En el caso de las tríadas de DO, RE, FA, SOL y LA, la tríada mayor está siempre afinada una coma más alta respecto de su relativa menor.

El instrumento de Helmholtz puede producir en el teclado inferior las tonalidades de DOB mayor y SOL mayor y en el superior las tonalidades de Mib mayor y SI mayor. Las tonalidades menores justas posibles son SI1 (DOB) en el teclado inferior y RE1# (Mib) en el inferior.

El científico alemán vuelve a hablar de la entonación justa en los apéndices, en los que presenta dos soluciones, 24 y 30 sonidos en la octava, para poder tocar intervalos (casi) justos en todas las tonalidades.<sup>40</sup> El problema de la entonación justa en el canto es otro;<sup>41</sup> se trata de un argumento que en el siglo XX regresará en muchas discusiones acerca de la *just intonation*. El punto de partida de Helmholtz es el órgano enarmónico construido por Perronet Thompson y su instalación en una iglesia de Londres donde se hacía música coral. El instrumento poseía 40 cañones para cada octava y tenía tres manuales con 65 teclas por octava (algunas teclas repetían el mismo sonido para facilitar la digitación). A este órgano le fueron hechos algunos arreglos por sugerencia del estadounidense Henry Ward Poole (1826-1890).<sup>42</sup> El instrumento podía producir quintas y terceras justas y también séptimas armónicas (7/4). Helmholtz tuvo la oportunidad de escuchar este instrumento en el curso de un viaje a Londres, y de escucharlo también acompañando a una cantante y a un violinista. El físico alemán pudo también oír el órgano acompañando a algunos cantantes que cantaban con entonación justa.<sup>43</sup> De esta y otras experiencias, Helmholtz deduce que:

<sup>40</sup> *Ibid.*, pp. 421-422.

<sup>41</sup> *Ibid.*, pp. 422-428.

<sup>42</sup> Sobre la actividad de Poole, véase Ellis, en Helmholtz, 1875, pp. 195n, 228n, 329n, 423 y en especial pp. 474-476 y 478.

Véase también Partch, 1974, pp. 392 y 443.

Poole, activo en Boston, ideó alrededor de 1850 un órgano con entonación justa y algunos años más tarde proyectó un teclado con 100 teclas por octava. Poole, relata Ellis - en Helmholtz, 1875, p. 478n - emigró a México, en donde se convirtió en profesor y realizó el proyecto de su último teclado. Ellis coincide con los estudiosos estadounidenses y presenta en su traducción una carta suya que se remonta al 9 de marzo de 1885.

<sup>43</sup> Se trataba de un grupo que formaba parte de la "Society of Tonic Sol-faist", una asociación que promovía un sistema simple de notación basado en las sílabas italianas y en la entonación no temperada. La actividad didáctica de la asociación era muy intensa: entre los años de 1858 y 1884 entregó en total 275.070 diplomas. Véase Ellis, en Helmholtz, 1875, p. 424n.

<sup>35</sup> *Ibid.*, p. 319.

<sup>36</sup> Cfr. Hauptmann, M. *Die Lehre von der Harmonik*. Leipzig, 1868.

<sup>37</sup> Helmholtz, 1875.

<sup>38</sup> *Ibid.*, p. 316.

<sup>39</sup> *Ibidem*.

"Los intervalos que están determinados teóricamente en las páginas precedentes, y allí llamados naturales, son por cierto naturales para orejas incorruptas; que las desviaciones de la entonación temperada son perceptibles y desagradables para un oído incorrupto; y, en fin, que a pesar de las sutiles diferencias de algunos intervalos, cantar correctamente en intervalos naturales es mucho más fácil que cantar en entonación temperada".<sup>44</sup>

La adopción de los intervalos naturales en el canto es muy oportuna para Helmholtz también porque al hacerlo no son necesarios los complicados cálculos que se requieren para realizar instrumentos musicales con entonación fija. Las cosas no eran realmente así, porque desde hace mucho tiempo se había demostrado que una aplicación incondicionada de la entonación justa a la música a *cappella* producía problemas insalvables. En su texto, Helmholtz revela la existencia de un debate entre partidarios de la entonación justa y de los que prefieren la entonación temperada o pitagórica. En este último grupo se hallaban sobre todo músicos. Helmholtz pide una mayor apertura mental, luego lanza una acusación directa en contra del piano, lo que hoy podría sorprendernos;

probablemente se trata de la respuesta a un ataque en cuanto, como nos informa Ellis en sus notas, el pasaje fue añadido en la cuarta edición alemana: "[Es] sin duda un instrumento muy útil para conocer la literatura musical, para diversión doméstica o para acompañar a los cantantes. Mas para propósitos artísticos, su importancia no es tan grande como para hacerle la base de todo el sistema musical".<sup>45</sup>

Para el oído del físico alemán, el piano representaba la aplicación de un sistema de afinación muy imperfecto, en cierto sentido equivocado; su difusión incontrolable no podía encontrar mucho favor. La suerte del temperamento igual aparece asociada al éxito del instrumento más importante del siglo XIX. Las palabras de Helmholtz preparan el terreno a las de Varèse, no por casualidad lector de *On the sensations of sound*, para una "liberación del sistema temperado, arbitrario y paralizante".<sup>46</sup> También el compositor franco-estadounidense se declaró un "enemigo" del piano. Para todos los teóricos del siglo XIX el piano era el símbolo de la civilización corrupta y arbitraria. La entonación justa es mucho más compleja de aplicar, pero también mucho más cierta y verdadera (véase la figura 4: los intervalos con entonación justa definidos por Ellis).<sup>47</sup>

Nota	Cent cíclicos	Cent justos	Valor logarítmico	Altura en Hz
La	906	905,9	22724	445,5
La <sup>l</sup>	928	927,4	23264	451,1
La <sub>I</sub>	884	884,4	22185	440,0
La <sub>II</sub>	862	862,9	21645	434,6
La <sub>I</sub> #	998	998,0	25037	469,9
La <sub>II</sub> #	976	976,5	24497	464,1
La <sub>III</sub> #	954	955,1	23958	458,3
La <sub>III</sub> ##	1068	1068,7	26809	480,4
La <sub>IV</sub> ##	1046	1047,2	26270	483,4
Lab	792	792,0	19873	417,2
La <sup>l</sup> b	814	813,7	20412	422,4
La <sup>ll</sup> b	836	835,2	20952	427,7
La <sup>lll</sup> bb	722	721,5	18100	400,5
La <sup>lll</sup> bb	744	743,0	18639	405,5
La <sup>IV</sup> bb	766	764,5	19179	410,6
La <sup>IV</sup> bbb	652	650,8	16327	384,5
Si	1110	1109,8	27840	501,2
Si <sub>I</sub>	1088	1088,3	27300	495,0
Si <sub>II</sub>	1066	1066,8	26761	488,9
Si <sub>II</sub> #	1180	1180,4	29613	522,1
Si <sub>III</sub> #	1158	1158,9	29073	515,6
Si <sub>IV</sub> #	1136	1137,4	28534	509,3

<sup>45</sup> *Ibid*, p. 428.

<sup>46</sup> Varèse, E., 1985, p.116.

<sup>47</sup> Ellis, en Helmholtz, 1875.

<sup>44</sup> Helmholtz, 1875, p. 428.



Nota	Cent cíclicos	Cent justos	Valor logarítmico	Altura en Hz
Si <sub>III</sub> ##	72	72,5	01822	275,3
Si <sub>IV</sub> ##	50	50,4	01282	271,8
Sib	996	996,1	24988	469,3
Si <sup>l</sup> b	1018	1017,6	25527	475,2
Si <sup>ll</sup> b	1040	1039,1	26067	481,1
Si <sup>lll</sup> b	904	903,9	22675	445,0
Si <sup>llll</sup> b	926	925,4	23215	450,6
Si <sup>lllll</sup> b	948	946,9	23754	456,2
Si <sup>llllll</sup> b	970	968,4	24294	461,9
Si <sup>lllllll</sup> b	834	833,2	20902	427,2
Si <sup>llllllll</sup> b	856	854,7	21442	432,5
Do	0	0	0	264,0
Do <sup>l</sup>	22	21,5	00540	267,3
Do <sup>ll</sup>	1178	1178,5	29564	521,5
Do <sup>lll</sup>	114	113,7	02852	281,9
Do <sup>llll</sup>	92	92,2	02312	278,4
Do <sup>lllll</sup>	70	70,7	01770	275,0
Do <sup>llllll</sup>	48	49,2	01233	271,6
Do <sup>lllllll</sup>	184	184,4	04625	293,7
Do <sup>llllllll</sup>	162	162,9	04085	290,0
Do <sup>lllllllll</sup>	140	141,3	03546	286,6
Do <sup>llllllllll</sup>	254	255,0	06398	305,9
C <sup>l</sup> b	1108	1107,8	27791	500,6
C <sup>ll</sup> b	1130	429,3	28330	506,9
C <sup>lll</sup> b	1152	1150,0	28870	513,2
C <sup>llll</sup> b	1038	1037,1	26018	480,7
C <sup>lllll</sup> b	1060	1058,7	26557	486,6
C <sup>llllll</sup> b	946	945,0	23705	455,7
Re	204	203,9	05115	297,0
Re <sup>l</sup>	226	225,4	05655	300,7
Re <sup>ll</sup>	182	182,4	04576	293,3
Re <sup>lll</sup>	296	296,1	07427	313,2
Re <sup>llll</sup>	274	274,6	06888	309,4
Re <sup>lllll</sup>	252	253,1	06349	305,6
Re <sup>llllll</sup>	366	366,8	09201	326,3
Re <sup>lllllll</sup>	344	345,3	08661	322,3
Re <sup>llllllll</sup>	458	458,9	11513	344,1
Re <sup>l</sup> b	90	90,2	02263	278,1
Re <sup>ll</sup> b	112	111,7	02803	281,6
Re <sup>lll</sup> b	134	132,5	03342	285,0
Re <sup>llll</sup> b	156	154,7	03882	288,7
Re <sup>lllll</sup> b	20	19,6	00490	267,0
Re <sup>llllll</sup> b	42	41,1	01030	270,3
Re <sup>lllllll</sup> b	64	62,6	01569	273,7
Re <sup>llllllll</sup> b	1150	1148,9	28821	512,6
Mi	408	407,8	10231	334,1
Mi <sup>l</sup>	386	386,3	09691	330,0
Mi <sup>ll</sup>	364	364,8	09152	325,9
Mi <sup>lll</sup>	500	500,0	12542	343,8

Perspectiva

Nota	Cent cíclicos	Cent justos	Valor logarítmico	Altura en Hz
Mi <sub>I</sub> #	478	478,5	12003	352,4
Mi <sub>III</sub> #	456	457,0	11464	348,0
Mi <sub>V</sub> #	434	435,5	10924	339,5
Mi <sub>III</sub> ##	570	570,7	14316	367,7
Mi <sub>V</sub> ##	548	549,2	13776	362,6
Mib	294	294,1	07379	312,9
Mi <sup>l</sup> b	316	315,6	07918	316,8
Mi <sup>ll</sup> b	338	337,1	08458	320,8
Mi <sup>lll</sup> bb	224	223,5	05606	300,4
Mi <sup>llll</sup> bb	246	245,0	06145	304,1
Mi <sup>lV</sup> bb	268	266,5	06688	307,9
Mi <sup>lllV</sup> bbb	132	131,3	03293	284,8
Mi <sup>lVl</sup> bbb	154	152,8	03833	288,4
Fa	498	498,0	12493	352,0
Fa <sup>l</sup>	520	519,6	13033	356,4
Fa <sup>ll</sup>	542	541,1	13573	360,9
Fa <sub>I</sub>	476	476,5	11954	347,7
Fa#	612	611,7	15346	375,9
Fa <sub>I</sub> #	590	590,2	14806	371,3
Fa <sub>II</sub> #	568	568,7	14267	366,7
Fa <sub>II</sub> ##	682	682,4	17119	391,6
Fa <sub>III</sub> ##	660	660,9	16579	386,7
Fa <sub>V</sub> ##	638	639,4	16040	381,9
Fa <sub>V</sub> ###	752	753,1	18892	407,9
Fa <sup>l</sup> b	406	405,9	10181	333,7
Fa <sup>ll</sup> b	428	427,4	10721	337,9
Fa <sup>lll</sup> b	450	448,9	11261	342,1
Fa <sup>llll</sup> bb	336	335,2	08409	320,4
Fa <sup>lV</sup> bb	358	356,7	08948	324,4
Sol	702	702,0	17609	396,0
Sol <sup>l</sup>	724	723,5	18149	401,0
Sol <sub>I</sub>	680	680,4	17070	391,1
Sol <sub>I</sub> #	794	794,1	19922	417,7
Sol <sub>II</sub> #	772	772,6	19382	412,5
Sol <sub>III</sub> #	750	751,1	18843	407,2
Sol <sub>II</sub> ##	886	886,3	22234	440,5
Sol <sub>III</sub> ##	864	864,8	21694	435,1
Sol <sub>V</sub> ##	842	843,3	21155	429,7
Sol <sub>V</sub> ###	956	957,0	24007	458,9
Sol <sup>l</sup> b	610	609,8	15297	375,5
Sol <sup>ll</sup> b	632	631,3	15836	380,2
Sol <sup>lll</sup> b	654	652,8	16376	384,9
Sol <sup>llll</sup> bb	518	517,6	12984	356,0
Sol <sup>lllll</sup> bb	540	539,1	13524	360,4
Sol <sup>lV</sup> bb	562	560,6	14063	365,0
Sol <sup>llV</sup> bbb	448	446,9	11210	341,8

figura 4

En su tratado, Helmholtz no deja de recorrer el camino histórico que llevó al nacimiento de las afinaciones y de los temperamentos. Afirma, por ejemplo, que Rameau, antes de propugnar el temperamento igual, en 1726, en el *Nouveau Système de Musique*, capítulo XXIV, defendió otro sistema cuyas terceras más utilizadas eran más puras que las menos empleadas. En 1762, refiere Helmholtz, este sistema irregular para d'Alembert era el más utilizado en Francia, a pesar de que se afirmase progresivamente el sistema bien temperado.<sup>48</sup> De todos modos, añade Helmholtz, "los músicos más viejos recomiendan el temperamento igual sólo para los pianos".<sup>49</sup> El físico alemán pone en evidencia el hecho de que el piano y su afinación generalizada se está transformando en un modelo universal para todos los instrumentos; es claro que él no está de acuerdo con esta actitud, porque la aplicación del temperamento igual al órgano y al armonio es particularmente perturbadora. Helmholtz extiende sus consideraciones a los instrumentos de la orquesta, afirmando que ellos pueden alterar su entonación. Las cuerdas tienen una base "pura" o pitagórica (las cuerdas "vacías"), a pesar de que desde Spohr se les prescribe a entonar en temperamento igual (o casi, dada la presencia de quintas puras en la afinación); los instrumentos de émbolo pueden modificar ligeramente la altura con ajustes de la boca.<sup>50</sup> Pero, según el físico alemán, los grandes intérpretes de instrumentos de cuerda tocan con entonación justa y producen terceras y sextas puras, ni pitagóricas ni temperadas. Como prueba, describe un experimento que hizo con el célebre violinista Joseph Joachim (1831-1907), que había afinado su instrumento con base al armonio de Helmholtz. Al tocar intervalos de tercera y sextas sobre una escala mayor, pudo verificarse el uso de intervalos justos. Entre las varias anotaciones relativas al temperamento igual, Helmholtz no deja de notar un importante aspecto relativo a la composición, develando así sus gustos musicales y alejándose mucho del marco de la ciencia:

No podemos, yo creo, hacer menos que reconocer la influencia de la entonación temperada en el estilo de la composición. El primer efecto de esta influencia fue positivo. Ella permitió a los compositores así como a los intérpretes moverse libremente y fácilmente a través de las tonalidades, abriendo así el camino a una nueva riqueza de modulaciones. Por otra parte, de la misma manera tenemos que reconocer que la alteración

de la entonación ha obligado también a emplear esta riqueza de modulaciones. Cuando la pureza de la entonación de los acordes consonantes dejó de ser perfecta, y las diferencias entre las diversas posiciones e inversiones, en consecuencia, fue casi anulada, fue necesario utilizar medios más poderosos, haciendo uso de un empleo frecuente de disonancias ásperas e intentar a través de modulaciones insólitas de reemplazar la característica expresión que las armonías propias de la tonalidad misma habían dejado de poseer. Por esto, en muchas composiciones modernas los acordes disonantes de séptima de dominante forman la mayoría, y los acordes consonantes la menor parte, a pesar de que ninguno puede dudar de que esto es el contrario de lo que debería ser; e ininterrumpidos pasajes modulantes amenazan con destruir completamente la sensación de la tonalidad. Éstos eran los desagradables síntomas del futuro desarrollo artístico. El mecanismo de los instrumentos musicales y la atención a lo que les resultaba más cómodo a ellos, amenazando con tiranizar la tonalidad en contra de las naturales exigencias del oído y de destruir una vez más el principio sobre el que se funda el moderno arte musical, la fuerte predominancia del grado de tónica y del acorde de tónica. Entre los grandes compositores, Mozart y Beethoven estaban todavía al principio del reino del temperamento igual. Mozart tenía todavía la posibilidad de hacer estudios extensos en la composición de cantos. Él es maestro de la armoniosidad más dulce posible, cuando la desea, pero es prácticamente el último de estos maestros. Beethoven, apasionada y ardientemente, tomó la riqueza ofrecida por la música instrumental, y en sus manos poderosas ésta se hizo el instrumento apropiado y disponible para producir efectos que nadie hasta entonces había intentado. Pero él utilizó la voz humana como una simple doncella, y como consecuencia ésta no le ha donado generosamente la alta magia de su belleza.<sup>51</sup>

Helmholtz no está plenamente convencido de la necesidad de sacrificar la exactitud de la entonación a favor de una más práctica posibilidad de aplicarla a los instrumentos musicales. Cuando los violinistas se hayan decidido a tocar cada escala con entonación justa, los otros músicos se adaptarán a esta

<sup>48</sup> Helmholtz, 1875 p. 321.

<sup>49</sup> *Ibid.*, p. 323.

<sup>50</sup> *Ibid.*, p. 324.

<sup>51</sup> *Ibid.*, p. 327.

más correcta entonación.<sup>52</sup> Si las modulaciones se hacen muy difíciles con la entonación justa, puede emplearse el temperamento igual de 53 sonidos en la octava propuesto en otros tiempos por Mercator y Bosanquet.<sup>53</sup> De este modo pueden imitarse con aceptable aproximación los intervalos naturales: una música nueva, toda por inventarse. La ciencia, para Helmholtz, ha demostrado que los intervalos naturales y también la tonalidad son una ley de la naturaleza.

## Referencias bibliográficas

Brown, C. *Music in a Sound and Music in Figures*. London: William Collins & Sons Ltd, 1885.

Eitz, C. A. *Das mathematisch-reine Tonsystem*. Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1891.

Ellis, A. J. "On the Conditions, Extent, and Realization of a Perfect Musical Scale on Instruments with Fixed Tones." *Proceedings of the Musical Society of London*, 1864.

Ellis, A. J. "On Musical Duodenes: or The Theory of Constructing Instruments with Fixed Tones in Just or Practically Just Intonation". *Proceedings of the Royal Society of London*, 23, 1874.

Ellis, A. J. "Tonometrical Observation on Some Existing Non-harmonic Musical Scales." *Proceedings of the Royal Society of London*, 27, 1884.

Ellis, A. J. "On the Musical Scales of Various Nations." *Journal of the Society of Arts*, 33, marzo 1885.

Hauptmann, M. *Die Lehre von der Harmonik*. Leipzig: Breitkopf & Härtel, 1868.

Helmholtz (von) H. L. F. *On The Sensations Of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*. London: Longmans & Co., 1875. [New York: Dover Publications, 1954].

Liston, H. *An Essay on Perfect Intonation*. Edinburgh: J. Ballantine & Co., 1812.

Lloyd, L. "Just Intonation Misconceived." *Music and Letters*, 24/3, 1943.

Lloyd, L. "Pseudo-Science in Musical Theory." *Proceedings of the Musical Association*, 70, 1943-44.

McLaren, B. *Microtonality. Past, Present, Future*. edic. priv., 1998.

Meulders, M. *Helmholtz. Dal secolo dei Lumi alle neuroscienze*. Turín: Bollati Boringhieri, 2005.

Partch, H. *Genesis Of A Music: an account of creative work, its roots and its fulfillments*. New York: Da Capo Press, 1974.

Plank, M. "Die natürliche Stimmung in der modernen Vokalmusik." *Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft*, 9, 1893.

Poole, H. W. "On Perfect Musical Intonation, and the fundamental Laws of Music on which it depends, with remarks showing the practicability of attaining this Perfect Intonation in the Organ." *American Journal of Science and Arts*, 2a serie, 9, 1850.

Tanaka, S. "Studien im Gebiete der reinen Stimmung". *Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft*, 6, 1890.

Thompson, T. P. *On the Principles and Practice of Just Intonation*. London: Effingham Wilson, 1850.

Varèse, E. *Il suono organizzato*. Scritti sulla musica, Milano: Ricordi-Unicopli, 1985.

Wittstein, T. *Grundzuege der matematisch-physikalischen Theorie der Musik*, 1888.

<sup>52</sup> *Ibid*, p. 327.

<sup>53</sup> *Ibid*, pp. 328-329.