

# La investigación en matemáticas: instrumento de aprendizaje para hacer realidad el Modelo Educativo del CCH

Research in Math: a Learning Tool to Contribute to the Educational Model of Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM

Texto recibido: 2 de febrero de 2018  
Texto aprobado: 7 de marzo de 2018

Bertha Medina Flores, Dulce María Peralta González Rubio,  
Daniel Flores Ibarra y Silvia Karina López Valdez.



**Resumen:** El Programa de Aprendizaje por Proyectos de Investigación (PAPI) en equipos surgió de la necesidad de hacer realidad en el Área de Matemáticas el Modelo Educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades, cuyos principios filosófico-pedagógicos son Aprender a ser, Aprender a aprender, Aprender a hacer y Aprender a convivir. Hemos comprobado que se aprende mediante la elaboración de investigaciones. En este ejercicio de experiencia vivencial de aprendizaje, los alumnos tienen que usar las matemáticas como herramienta fundamental para realizar sus investigaciones, construir modelos matemáticos como resultado del estudio de situaciones cercanas a su vida y a las matemáticas mismas, procediendo con el rigor científico correspondiente al nivel medio superior de educación.

**Palabras clave:** Proyectos de investigación, estrategias de aprendizaje, investigación en matemáticas, trabajo en equipo e interdisciplina.

**Abstract:** *The Learning by Investigation Program Project (PAPI which stands for Programa de Aprendizaje por Proyectos de Investigación, in Spanish) was founded to agree with the Educational Model accepted by the Colegio de Ciencias y Humanidades, whose philosophical and pedagogical principles are Learning to be, Learning to learn, Learning to do and Learning to co-exist. We have established that learning mathematics is possible thanks to investigation. In this exercise of life experience, students must use mathematics as a fundamental tool to complete their investigations and to build mathematic models as a result of close study in day to day experiences and adhering to mathematic fundamentals, if proceeding with rigorous scientific examination, in obedience to baccaureate level.*

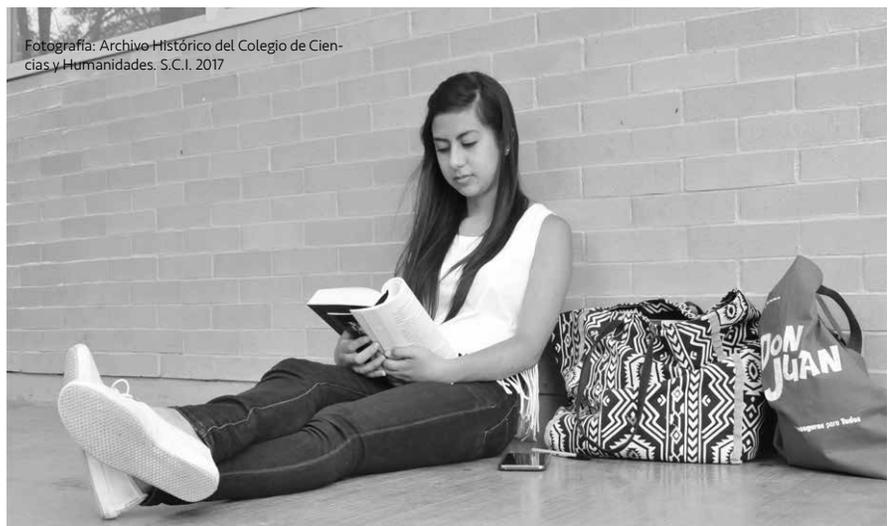
**Keywords:** *Research projects, learning strategies, research in mathematics, working in team and interdisciplinary.*

## Introducción

El Programa de Aprendizaje por Proyectos de Investigación (PAPI) es una estrategia didáctica que pretende que el alumno investigue a la vez que aprende matemáticas; es empleada exitosamente en varias partes del mundo (Sánchez, 2013). Esta enseñanza promueve la preparación de estudiantes en la resolución de problemas y lo inicia en la investigación científica en el nivel medio superior.

La instrumentación del PAPI se desarrolla en concordancia con las exigencias presentes y del futuro inmediato en nuestro globalizado mundo que demanda individuos críticos, creativos, capaces de realizar conjeturas, tomar decisiones, aprender por su cuenta, tener control sobre sus emociones, generar conocimiento nuevo, trabajar en equipo, cultivar valores y actitudes, es decir, seres útiles a la sociedad.

Consideramos al PAPI una experiencia exitosa de aprendizaje en equipo porque en los doce años que llevamos instrumentándolo, hemos tenido estudiantes que lo representan desde el inicio, en el concurso Feria de las Ciencias y en los últimos años, también en el Foro los Jóvenes y la Ciencia. Pero queremos enfatizar que no es el hecho de ser finalistas en los eventos el resultado más relevante; lo realmente importante es que el Programa se instrumenta para todos nuestros alumnos y prácticamente la totalidad de ellos realizan un trabajo de investigación, intentando el mayor rigor científico que pueden lograr en este nivel educativo, gracias al cual cobra sentido el uso de las nuevas tecnologías para poder llevar a cabo esta experiencia. Se pueden ver algunos ejemplos de investigaciones logradas en el PAPI publicadas en el portal del concurso Feria de las Ciencias (varias ediciones). Como trabajo representativo tomamos la investigación *Pendientes incluyentes*, realizada en 2013 por Karina Guadalupe González Moreno, Diego Jiménez González, Bertha Medina Flores, Alma Miguel Cruz, Luis Antonio Morales Vázquez, Dulce María Peralta González Rubio y Tania Yurid Trejo Chavarría.



Fotografía: Archivo Histórico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I. 2017

Nuestro trabajo pedagógico y didáctico tiene orientación constructivista y de resolución de problemas, así como bases conceptuales y prácticas en el ABP (Aprendizaje Basado en Proyectos); también nos hemos apoyado en autores como Mora (2002, 2004), Puig (1996), Cubero (2000), Pozo y otros (2006), De Guzmán (2003) y Gil (2001).

Exponemos aquí, de forma breve, cómo ha evolucionado la experiencia y lo que hemos obtenido de ella, la manera en la que trabajamos (metodología docente) y su evaluación.

## Nuestro aprendizaje a través del tiempo

El Programa de Aprendizaje por Proyectos de Investigación (PAPI), como parte de la estrategia de enseñanza integral en nuestros cursos, requiere que los alumnos pongan en juego todos sus conocimientos, habilidades, creatividad, cualidades de socialización para trabajar en equipo y capacidad de valoración en un trabajo de investigación para resolver un problema real. En esta forma integral de enseñanza aprendizaje, los alumnos son continuamente evaluados conforme van construyendo y aplicando su aprendizaje de las matemáticas.

El PAPI lleva ya más de una década concretándose. Los alumnos son atendidos de forma personalizada, tanto en clase como fuera del aula. El trabajo implica actividades de diseño, organización, asesoramiento, retroalimentación en los avances que reportan los alumnos, orientación, supervisión y evaluación de la ejecución de las investigaciones y de los reportes, por lo que esta labor requiere de un esfuerzo y tiempo adicional, fuera del aula, por parte de los estudiantes y profesores que participamos en él.

Los alumnos elaboran sus proyectos de investigación a partir de protocolos diseñados por el equipo docente PAPI, los cuales se refieren a situaciones y problemas cercanos a la vida de los estudiantes o bien a temas dentro de las matemáticas. Los proyectos consisten en hacer una investigación, los alumnos eligen el tema —incluido en los protocolos propuestos— para tener sus propias motivaciones, lo que resulta útil para estimular la creatividad mientras se promueve la resolución de problemas. Llevar a cabo este trabajo resulta ser un ejercicio de experimentación vivencial en donde los alumnos tienen que utilizar —o hacer— matemáticas para realizarlo.

## Configuración de la estrategia de aprendizaje del PAPI: elementos y metodología

Orientación de los trabajos de investigación. Se explica a los estudiantes lo que significa investigar en matemáticas en este nivel educativo y su valor, así como cada uno de los elementos que conforman una investigación, la cual comprende objetivos, planteamiento del problema, justificación, modalidad o tipo de investigación, hipótesis si es el caso, marcos teórico y contextual, metodología, análisis de resultados, modelo matemático, alcances y perspectivas, fuentes de información y la presentación de sus reportes finales.

**Temas, contenidos y materiales.** Los alumnos, organizados por equipos, eligen uno de los protocolos de investigación que se les proponen, los cuales atienden a diversas temáticas: pobreza, energía, agua, nutrición, números importantes, sistemas, arte, música, medición indirecta, teoría de juegos, simetría, economía y más, todos ellos susceptibles de ser estudiados y modelados con matemáticas para ser representados e interpretados con la finalidad de hacer pronósticos y análisis, proponer soluciones y tomar decisiones. Los alumnos se encargan de conseguir todos los datos e información teórica posible acerca del tema de su interés.

**Propósito de la investigación.** Los estudiantes deciden qué investigar y eligen los objetivos de su trabajo. Plantean el problema y formulan, de ser el caso, sus hipótesis.

**Metodología de investigación, supervisión y orientación.** En concordancia con el tema y objetivos elegidos, los alumnos deciden, en libertad, la metodología que consideran pertinente para llevar a cabo su proyecto y nosotros supervisamos que lo ejecuten con el rigor y la formalidad científica acordes con este nivel educativo. El trabajo se realiza por etapas; los estudiantes deben reportar semanalmente a los profesores sus avances y obstáculos por superar hasta la entrega del trabajo final.

**Evaluación formativa.** Los estudiantes están en un proceso continuo de valoración de sus propios esfuerzos, avances y retrocesos que implica su trabajo; se apoyan en los juicios y retroalimentaciones que sus profesores les damos y las que ellos mismos se hacen en ejercicios de autocrítica. Al final, realizan una autoevaluación y valoración del desempeño de sus compañeros. Por último, los profesores también evaluamos los reportes finales de sus investigaciones.

**Resultados y productos.** Los resultados son alentadores para continuar con el PAPI, pues desde sus inicios hemos tenido equipos finalistas y ganadores en la Feria de las Ciencias, seleccionados en el Foro Jóvenes a la Ciencia, y últimamente mención honorífica en el Premio Nacional Juvenil del Agua. Pero lo más importante es que todos los alumnos que concluyen sus investigaciones logran integrar sus conocimientos en matemáticas aplicándolos a situaciones y problemas en diferentes contextos, y pierden el miedo de usarlos o desarrollarlos, como se puede apreciar claramente en sus reportes finales.

**Evaluación integral del programa.** Al final del año, el PAPI es evaluado como tal, por profesores y alumnos. De esta evaluación tomamos nota de las dificultades y obstáculos a sortear que nos orientan para mejorar nuestro desempeño.

## Desarrollo del proceso de investigación para el aprendizaje

El trabajo se realiza colectivamente. La organización de los equipos de investigación es responsabilidad de los estudiantes que escogen con quienes de sus pares desean trabajar. Eligen el protocolo de investigación que les haya interesado. Los protocolos de investigación plantean problemas abiertos que pueden realizarse de varias formas, donde los contenidos de los cursos de matemáticas juegan un papel esencial para su investigación.

Para que los estudiantes obtengan el mejor provecho de su esfuerzo, deben tener muy claro qué significa trabajar y aprender en equipo, lo que se puede ganar y las características y utilidades que esta forma de trabajo produce; esto implica que entiendan que su labor colectiva sirve para:

- Armonizar las energías individuales y del grupo.
- Evitar el desperdicio de energía.
- Ser eficaces colectivamente, ya que el nivel intelectual del equipo se eleva.
- Tomar decisiones importantes.
- Crear organizaciones inteligentes.
- Transformar sus destrezas de pensamiento colectivo y comunicarlo.
- Revelar la incoherencia de su pensamiento.

Al final del curso los alumnos presentan sus reportes con las partes que conforman una investigación, es decir, introducción, hipótesis, descripción del problema, marcos conceptual y contextual, metodología, análisis de resultados, modelo matemático (de ser el caso), conclusiones, alcances y perspectivas (validación del modelo construido), fuentes de información.

## Perfil del asesor PAPI

Para ser profesor u orientador en el PAPI, se requiere:

- a) Tener interés genuino en que los alumnos generen conocimiento nuevo y estar convencidos de que pueden hacerlo.
- b) Ser capaces de otorgar la suficiente autonomía a los estudiantes en su proceso de formación matemática y científica, lo que implica poner en sus manos el control de su propio aprendizaje.
- c) Actuar en el PAPI al servicio de los estudiantes.

El perfil del asesor PAPI se compone de dos elementos: el cognitivo y el afectivo. En el cognitivo está el dominio de la asignatura y de la metodología para la investigación científica, así como la experiencia en el asesoramiento y la retroalimentación (dirigir la investigación). El componente afectivo consiste en que el mentor de PAPI aplique técnicas eficaces de escucha, mostrando empatía; respeto a las ideas, emociones y sentimientos de los alumnos; disposición de servicio y acompañamiento, así como una valoración objetiva de los esfuerzos de sus pupilos que ampare su asesoramiento y dirección, además de modelar el trabajo en equipo.

## Alcances y perspectivas del PAPI

Con los alumnos, se pretende continuar trabajando como hasta ahora; con los profesores, se quiere compartir a quienes les interese participar en la experiencia. Proyectamos continuar con la presentación de nuestros resultados en foros académicos generales como el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEN) y el Congreso de Estrategias Didácticas, entre otros.

El PAPI es un programa que brinda la oportunidad de crear comunidades de aprendizaje entre profesores, alumnos, investigadores y cuanta persona participe en la experiencia porque es una actividad multidisciplinaria.

## Obstáculos y resistencias

La investigación, como trabajo colectivo, es una herramienta de aprendizaje que permite observar una variedad de actitudes y desempeños de los estudiantes que son difíciles de percibir en el aula. En un principio, aparecen en algunos estudiantes resistencias al trabajo —miedos, creencias de insuficiente capacidad, ideas que obstaculizan el aprendizaje— pues se van perfilando las investigaciones y se va visualizando lo que realmente se quiere hacer.

Entre los obstáculos, observamos que la evasión al trabajo por parte de algunos miembros en varios de los equipos se debe en parte a su incomprensión sobre la tarea por realizar. Hay quienes participan afanosamente en la búsqueda de información pero tienen muchas dudas y angustia para traducir todo lo que encuentran en un modelo matemático y no se atreven a preguntar a los profesores porque, al mismo tiempo, tratan de seguir y resolver sus deficiencias con sus compañeros de equipo.

Buscan a los profesores para que les ayudemos a comprender el contenido que requieren para concretar su abstracción matemática en un modelo que represente lo que están investigando. Esto implica algunas veces que los asesores tengamos que estudiar, a la par con ellos y de manera más profunda, algunos temas del núcleo del proyecto que están presentando para poderlos orientar mejor, cuando, por ejemplo, escogen temas, como fotografía, telescopios, metalurgia, energías, agua, entre otros muchos de su interés y en los cuales no somos especialistas.

Por lo que se refiere al trabajo en equipo, al inicio algunos grupos se reparten el trabajo creyendo que lo pueden hacer uniendo pedacitos, lo que les impide concretar ideas; lo intentan y se tropiezan para terminar convencidos de que deben ocuparse juntos, como uno, integrando el trabajo y los conocimientos aportados por todos.

Hay desacuerdos y finalmente llegan a coordinarse, lo que impacta en su desarrollo de habilidades de comunicación y negociación interpersonal, resultado del aprendizaje que los profesores pretendemos producir. Por ejemplo, hay situaciones de incomprensión y actitudes de soberbia por parte de algún o algunos miembros del equipo, generalmente por ignorancia, que estorban al avance y aprendizaje de los demás; al final, logran ponerse de acuerdo en aras de conseguir un objetivo común: concluir bien la investigación.

Puede existir —y con frecuencia sucede— un manejo deficiente de sus tiempos (mala planeación y exceso de confianza). En un principio creen que el tiempo es enorme porque falta todo el semestre y se confían; conforme se acerca la fecha de entrega se dan cuenta de que el trabajo es todo un reto; esto se complica con la saturación de tareas de todas las asignaturas al final del período escolar. Por fortuna, nuestra planeación contempla este fenómeno; para resolverlo hacemos un corte en el primer semestre y en el siguiente continuamos trabajando el proyecto de investigación, pues tenemos la mitad del segundo semestre para concluirlo.

## Resultados y avances

El PAPI hace realidad el Modelo Educativo del Colegio. Hemos obtenido grandes satisfacciones con él, porque hemos visto concretados en la realidad los principios filosófico-pedagógicos que lo sustentan. Asimismo, contribuimos cada año a formar estudiantes de acuerdo con el perfil de egreso del CCH, esto es, ayudamos a que nuestros discípulos hayan adquirido aprendizajes que seguramente les servirán en su vida.

El Aprender a hacer se refleja en que los alumnos logran obtener claridad en que el quehacer matemático se sustenta en actividades como medir, contar, clasificar, ordenar, inferir, estimar, representar, estructurar espacialmente, modelar matemáticamente, relacionar funcionalmente, elaborar algoritmos, optimizar y comunicar. Es mejor o más fácil hacerlo si estas actividades se realizan en colectivo y se conectan con su cultura y eventos conocidos, pues logran comunicar resultados en forma matemática.

Fotografía: Archivo Histórico del Colegio de Ciencias y Humanidades. S.C.I. 2017



**Aprender a ser y a convivir** se desarrollan en equipo, lo cual les permite apreciar la tolerancia y el respeto hacia los otros; a conocerse mejor, valorar y estimar a sus compañeros gracias a que se escuchan unos a otros (cercanía).

**Aprender a aprender** se relaciona con buscar conocimientos y datos para realizar su proyecto de investigación. Los estudiantes se enfrentan a un mundo de información variada que les permite visualizar los múltiples caminos y respuestas alternativas a su trabajo, por lo que tienen que acotar su universo de datos y decidir en consecuencia, enfocándose en una pregunta a la vez para responderla. Ante la variedad de posibilidades de estudio que los deslumbra, deben ser capaces de concentrarse en lo que pueden atender, aun cuando su objeto de estudio sea complejo (interdisciplina).

La siguiente tabla muestra los títulos de algunas investigaciones que han participado en los concursos Feria de las Ciencias y en el Foro Los Jóvenes y la Ciencia, desde el año en que iniciamos esta experiencia hasta la fecha. Algunos trabajos ganadores están publicados en el portal de la Feria de las Ciencias: <<http://www.feriadelasciencias.unam.mx/>>.

Concursos Feria de las Ciencias, la Innovación y la Tecnología de 2006 al 2017			Foro Los Jóvenes y la Ciencia
Año	Título de la investigación	Logro	Trabajo aceptado
2006	Costos a largo plazo	Primer lugar	Sinfonía de las Matemáticas (2008)
2007	A pares y nones vamos a jugar	Segundo lugar	
2008	Afinación de una guitarra desde un punto de vista matemático y de la física	Primer lugar	
2009	Lo que perdió Peter Pan	Finalista (Feria suspendida por influenza)	Del 2015 al 2017 Análisis matemático de una obra expresionista. Selección de carreras Tesemáticas Análisis de teselados Descubre la verdad detrás de la luz con las matemáticas El arte y las matemáticas Tocando simétricamente para Elisa Simetría en el arte de Leonardo Da Vinci Energía Solar en CCH. Proyecciones a largo plazo Calentador de agua a base de biomasa Las matemáticas en la música
2010	Medición de montañas	Tercer lugar	
2011	Phi, impacto visual y económico	Primer lugar	
2012	Matemáticas para desmitificar al número áureo como criterio de belleza	Primer lugar	
2013	Pendientes incluyentes	Primer lugar	
2014	Estructuras siempre firmes	Segundo lugar	
2015	Graficando el desarrollo del Modelo Educativo en los alumnos del CCH	3er lugar	
2016	Luz incógnita	1er lugar	
2017	No todo lo dorado es oro Las matemáticas lo demuestran	1er lugar	
<b>Año</b>	<b>Premio Nacional Juvenil del Agua</b>	<b>Logro</b>	
2017	Calentador de agua a base de biomasa	Mención honorífica	

Tabla 1. Algunas participaciones en foros académicos.

A la fecha, llevamos más de treinta equipos que han sido finalistas en la Feria de las Ciencias, además de diez trabajos presentados en el Foro Los Jóvenes y la Ciencia. Es importante destacar que estos números son posibles porque el Programa es para todos los alumnos de nuestros grupos, sin distinción.

## Conclusiones

Estos resultados siguen motivándonos a continuar trabajando en esta línea, pues estamos convencidos de que los estudiantes pueden aprender haciendo investigaciones en matemáticas y con matemáticas, lo que vuelve realidad el Modelo Educativo del Colegio.

La tarea fundamental de la ciencia es desarrollar descripciones y explicaciones organizadas en teorías que se validan mediante la demostración de sus capacidades de predicción y control. La propuesta pedagógica para el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) es una teoría que también se conecta con filosofías y metateorías más amplias; es buena porque explica fenómenos y permite entender procesos de mediación que son trascendentales en experimentos e intervenciones sobre educación, pues indica principios que pueden orientar la práctica social efectiva —en nuestro caso la docencia— con rasgos que sirven de guía confiable para la acción. Uno de nuestros propósitos como enseñantes de la ciencia es convertir el conocimiento conceptual en práctica y viceversa. El PAPI es nuestra manera de concretar y conectar la teoría con la realidad a la vez que desarrollamos una docencia científica en la labor humana de gestionar y apoyar desde el aula la formación de individuos útiles a la sociedad.

## Referencias

- Cubero, R. (2000). *Cómo trabajar con las ideas de los alumnos*. Sevilla: Diada.
- De Guzmán, M. (2003). *Como hablar, demostrar y resolver en matemáticas*. Madrid: Editorial Anaya.
- Gil, D. y De Guzmán, M. (2001). *La enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias y experiencias innovadoras*. Barcelona: Popular.
- González, K., Jiménez, D., Medina, B., Miguel, A., Morales, L., Peralta D. y Trejo, T. (2013). *Pendientes incluyentes*. [Versión electrónica]. Recuperado de [http://www.feriadelasciencias.unam.mx/antteriores/feria21/feria339\\_01\\_pendientes\\_incluyentes.pdf](http://www.feriadelasciencias.unam.mx/antteriores/feria21/feria339_01_pendientes_incluyentes.pdf)
- Mora, D. (2002). *Didáctica de las matemáticas desde una perspectiva crítica, investigativa, colaborativa y transformadora*. Venezuela: Ipasme.
- Mora, D. (2004). *Aprendizaje y enseñanza. Proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro*. La Paz: Campo Iris.
- Pozo, J. y otros. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Graó.
- Puig, L. y Calderón, J. (1996). *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Madrid: Solana e Hijos.
- Sánchez, J. (2013). *Qué dicen los estudios sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos*. Recuperado de [http://actualidadpedagogica.com/estudios\\_abp/](http://actualidadpedagogica.com/estudios_abp/)