

HABILIDADES matemáticas y sentido

ESTADÍSTICO

Juan de Dios Hernández Garza,
Adolfo Sánchez López

Recibido: 11/02/2016
Aprobado: 15/03/2016

Resumen:

Dentro de los enfoques innovadores en la enseñanza de la Matemática, se ha planteado que los objetivos prioritarios incluyan aquellos que se refieren al desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con la capacidad de resolver problemas no rutinarios. La idea central en estos planteamientos consiste en darle más importancia a las estrategias de enseñanza y de aprendizaje que permitan mejorar el desempeño intelectual de los estudiantes, en vez de almacenar información que luego reproducen mecánicamente en situaciones análogas.

En este enfoque innovador también se considera la consolidación de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística con el propósito de desarrollar el sentido estadístico y sus componentes como el pensamiento y razonamiento estadístico, así mismo, la comprensión de la presencia de la variabilidad en los datos.

Palabras claves: habilidades matemáticas, problemas no rutinarios, estrategias de enseñanza y aprendizaje, desempeño intelectual, sentido estadístico, pensamiento estadístico, razonamiento estadístico, variabilidad.

Abstract:

Within the innovative approaches in the teaching of mathematics has been raised that the priority objectives include those relating to the development of mathematical skills related to the ability to solve non-routine problems. The central idea in these approaches is to give more importance to the teaching and learning strategies that improve intellectual performance of students, rather than store information that is then mechanically reproduced in similar situations.

The consolidation of the teaching and learning of statistics with the purpose of developing the statistical sense and its components such as thinking and statistical reasoning, likewise, is also considered in this innovative approach to the understanding of the presence of the variability in the data.

Key words: mathematical skills, non-routine problems, teaching and learning strategies, intellectual performance, statistical sense, statistical thinking, statistical reasoning, variability.

Consideraciones iniciales

En la enseñanza de las Ciencias en el nivel bachillerato y, en particular, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, no basta con dominar los contenidos específicos que se enseñan, sino que también es necesario tener conocimientos sobre aspectos didácticos de los temas y de los errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura con el objetivo de desarrollar el razonamiento matemático y las habilidades matemáticas.

En este sentido, Salinas (2014) en su ponencia "¿Qué Matemáticas en el bachillerato?", se pronuncia por una formación matemática que desarrolle habilidades y actitudes.

El razonamiento matemático ha sido explorado por diversos autores como el psicólogo soviético V. A. Krutetskii (1976), quien se centra en el análisis de los procesos de solución de problemas matemáticos con el propósito de caracterizar las habilidades matemáticas presentes en los alumnos.

De acuerdo con Krutetskii y considerando que prácticamente cualquiera de los contenidos matemáticos puede ser utilizado para fomentar en los alumnos el desarrollo de habilidades matemáticas, un buen inicio consiste en cambiar el aspecto didáctico para la ejecución de un ejercicio, por ejemplo, es muy común que se le indique al alumno resolver una ecuación como $4(x+1)+2(x+1)=12$, de manera que si éste desarrolla un procedimiento típico y obtiene $x=1$, se piensa que es hábil. Aquí lo que se muestra es que el estudiante tiene destreza para aplicar una serie de procedimientos que le llevan a encontrar el valor de la incógnita y la correspondiente comprobación.

Como menciona Itelson (1985): cambiando el enfoque de la actividad se puede mostrar al alumno el mismo material bajo diferentes aspectos y educar en él distintos tipos de pensamiento.

Para desarrollar una habilidad matemática se debe cambiar el objetivo, por ejemplo, encontrar el valor de $(x+1)$ y guiar a los alumnos para que encuentren un procedimiento alternativo como: $6(x+1)=12$, por lo que $(x+1)=2$.

Los alumnos que hacen uso de procedimientos alternativos piensan en estructuras abreviadas, hacen abstracción del material matemático relevante y son flexibles de pensamiento porque muestran la capacidad para librarse de procedimientos comunes (Krutetskii, 1976).

Habilidades matemáticas en Estadística

La investigación realizada por Hernández (2006) permite decir que es posible la manifestación de las habilidades matemáticas señaladas por Krutetskii (1976): flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento y generalización, en Estadística y Probabilidad, ya que los alumnos mostraron ser potencialmente capaces al resolver problemas no rutinarios, evidenciando la presencia de habilidades matemáticas en Estadística y Probabilidad, aun cuando no se les enseñó de manera sistemática a desarrollar habilidades.

Matemática Aplicada

En este punto es importante señalar que aunque el currículo tradicional considera a la Estadística como parte de la Matemática, algunos investigadores como Méndez (2005) la consideran como Matemática Aplicada (en diversos contextos). Del Pino y Estrella (2012) mencionan que la Estadística se puede aplicar en la enseñanza de conceptos matemáticos y exponen la idea de que la Estadística proporciona un contexto para dar sentido a los números, gráficas y operaciones.

De la Didáctica de la Matemática a la Didáctica de la Estadística

Una reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la Estadística es que la Didáctica de la Estadística o Educación Estadística es un área emergente, por lo que hace falta investigar más acerca de los errores y dificultades que enfrentan profesores y alumnos. Para tener una aproximación a éstos, consideramos importante cuidar los acercamientos a la relación entre los conceptos matemáticos y los estadísticos.

Por ejemplo, en el tratamiento de las funciones lineales, a partir de una tabla de valores para las variables X y Y se puede obtener el modelo lineal correspondiente; de manera reversible, partiendo del modelo lineal, es posible obtener los valores tabulados. En contraparte, en una situación estadística con datos bivariados, no es posible obtener los valores tabulados a partir del modelo estimado. Esta contrastación permitiría a los alumnos reflexionar sobre las características de los problemas matemáticos y las características de los problemas estadísticos.

Esta situación ha sido señalada por Flores y Hernández (2012): un aspecto en la enseñanza de la Matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), al que no se le ha dado el cuidado que merece en el llamado “tronco común” (Matemáticas I-IV), es la enseñanza de contenidos de Estadística y Probabilidad, cuando la tendencia mundial es darles cada vez mayor relevancia.

Dificultades en el aprendizaje de la Estadística

Algunas dificultades comunes en el aprendizaje de la Estadística tienen que ver con la fijación que tienen los alumnos por el tratamiento individual que le dan a los datos en Matemáticas. En Estadística, es necesario construir datos representativos que no necesariamente coinciden con los datos observados. Aunado a esto, además, consideran al promedio aritmético como el valor más representativo, pasando por alto los datos atípicos.

Un obstáculo frecuente que es necesario superar es la fijación del pensamiento matemático frente al cambio hacia el pensamiento estadístico que se presenta cuando se le pide al alumno interpretar el modelo de regresión lineal obtenido con datos bivariados en un determinado contexto. Algunos estudiantes mencionan que “no es correcto” porque al sustituir un valor de la variable independiente no se obtiene el valor observado en la variable dependiente.



Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Nosotros

Otro obstáculo que enfrentan los alumnos es el de discernir ante un contexto probabilístico cuál definición de probabilidad (teórica o frecuentista) es la adecuada.

Del Pino y Estrella (2012) escriben que las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de la Estadística son del tipo conceptual, para ejemplificar esta situación mencionan la dificultad que tienen al pasar de los datos individuales a un comportamiento conjunto, lo que se traduce en obstáculos para comprender tablas y gráficas.

Probablemente, algunos factores explicativos en la disminución de la comprensión de los conceptos estadísticos se deben a que los docentes tomaron los cursos de Estadística bajo un método formal y así lo están impartiendo, por lo que es necesario cambiar los enfoques de enseñanza, con el fin de no continuar con este ciclo. Asimismo es posible que los docentes se basen en algún libro de texto que, en ocasiones, define los conceptos de manera general y al ser también éste la referencia para los alumnos, resulta insuficiente para que éstos logren la comprensión de las ideas estadísticas básicas como la variabilidad.

Opiniones de algunos educadores sobre la necesidad de replantear la docencia en la enseñanza de la Estadística

Hernández (2010) considera que la enseñanza de esta asignatura debe concebirse como un proceso que va desde el nivel empírico hasta el teórico, pasando por el puente de la Probabilidad, pero enfatizando el desarrollo de estrategias en la solución de problemas estadísticos. Esto, permite al alumno desarrollar habilidades matemáticas como encontrar dos métodos de solución en un problema y reglas generales a partir del análisis de casos particulares, resolver problemas directos e inversos y explicar cómo surge un resultado y darle sentido estadístico relacionándolo con el contexto. Esta consideración se refiere a la solución de problemas no rutinarios para observar la manifestación de habilidades matemáticas y el pensamiento estadístico.

Ejemplificaremos la manifestación de habilidades matemáticas con el siguiente problema: "En un equipo de fútbol, el promedio de altura de los 11 jugadores es de 165 cm, pero se pretende aumentar el promedio a 168 cm, para ello en el próximo torneo se incorporarán tres jugadores suplentes. ¿Cuáles deben ser las estaturas de los jugadores incorporados?"

En esta experiencia docente, los alumnos mostraron las siguientes habilidades:

- Reversibilidad de pensamiento, al aplicar el procedimiento para la media aritmética de manera inversa: $(8)(165)=1320$ y $(11)(168)=1848$.

La diferencia entre 1848 cm y 1320 cm es de 528 cm, por lo que cada uno de los jugadores incorporados tiene 176 cm de estatura.

- Flexibilidad de pensamiento y consideración de la variabilidad (pensamiento estadístico), al proponer que la estatura de los tres jugadores es diferente: 175, 176 y 177 cm

- Generalización, al comprender que la estatura promedio de los jugadores incorporados es una incógnita que simbolizan con x , algunos alumnos propusieron la siguiente representación: $165+165+165+165+165+165+165+165+x+x+x$, que corresponde a la ecuación $\frac{1320 + 3x}{11} = 168$

Dos aspectos importantes que el docente debe conocer en la enseñanza de la Estadística son, por una parte, que los números que se manejan en las variables numéricas tienen significado y conexión con una porción de la realidad (por ejemplo, si el promedio del número de hijos en 10 familias es de 2.5 hijos, entonces se puede estimar que por cada 100 familias el número de hijos es de 250) y, por otra, que los modelos utilizados (gráficas, tablas, modelos lineales bivariados) son aproximaciones o estimaciones del comportamiento de un fenómeno real, dado que hay errores inherentes a la variabilidad. Estos aspectos se pueden vincular con el modelo lineal bivariado: $Y=2.5X$, donde Y representa el número de hijos y X el número de familias.

Charría *et al.* (2005) mencionan que la enseñanza de la Estadística es un tema que ha logrado la preocupación de un colegiado de docentes e investigadores en el ámbito mundial. Al respecto Behar y Ojeda (2000) afirman que, dada la importancia que esta área reclama en la formación de los universitarios, por las decisiones a las que se ven enfrentados diariamente y la relevancia que la Estadística reviste para la investigación, se considera que muchas de las dificultades de la apropiación de conceptos en la aplicación de los métodos estadísticos y en el uso adecuado de los mismos, se debe a la falta de prácticas pedagógicas apropiadas para la superación de estas dificultades. En efecto, algunas instituciones y profesores sólo se han preocupado por presentar la Estadística como un curso más en el área de la Matemática y no han resaltado la verdadera importancia de una disciplina que tiene fundamentos matemáticos y es una invaluable herramienta para la toma de decisiones y la cuantificación de riesgos.

Propuestas de docentes y especialistas encaminadas a superar las dificultades en la enseñanza de la Estadística

Behar y Grima (2001) plantean que diversos autores (Green, 1992; Moore, 1997; Snee, 1993), proponen como objetivos relevantes para un curso el desarrollo de las siguientes competencias:

- Habilidad para ligar la Estadística con situaciones del mundo real.
- Conocer los conceptos básicos de la Estadística.
- Habilidad para sintetizar los componentes de un estudio estadístico.
- Comunicar los resultados de una manera clara.

Aunque existen diferencias en los cursos introductorios que dependen de la disciplina específica a la cual se dirigen, la tendencia en las propuestas que se realizan en las distintas publicaciones sobre enseñanza de la Estadística, están orientadas a *fortalecer el pensamiento estadístico, más que el aprendizaje de fórmulas y ecuaciones*. Los contenidos de la teoría estadística y de la Matemática se supeditan a la necesidad de fortalecer el entendimiento de una estrategia conceptual para la resolución de problemas contextualizados, reforzados con simulaciones que ilustren de una manera más vivencial el significado de la teoría (Behar y Grima, 2001).

En este fortalecimiento del pensamiento estadístico se puede enseñar la variabilidad de manera cualitativa por medio de la observación y el comportamiento gráfico, dirigiendo la atención de los alumnos sobre las percepciones de cambios que sugieren los datos y sus tendencias. Lo deseable es que los alumnos le den un sentido estadístico a los datos y a los resúmenes estadísticos o a las gráficas.

Los alumnos deben comprender que la Estadística es un área ideal para hacer preguntas y realizar encuestas que les proporcionen respuestas aproximadas debido a la variabilidad que presentan los datos.

Resumiendo las propuestas anteriores, se trata de que los alumnos trabajen con datos obtenidos de su entorno y que resuelvan problemas reales que les permitan desarrollar el pensamiento estadístico.



Propuesta de experiencia docente alternativa utilizada en el aula por los autores

Otra experiencia docente fue el planteamiento a los alumnos del siguiente problema.

De acuerdo con los datos del clima que se muestran a continuación, en la región de Cd. Mante, Tamaulipas, determinar cuál es la época más apropiada para la cosecha de la caña de azúcar (zafra), teniendo en cuenta las siguientes condiciones formuladas por los investigadores Martínez, A. y Martínez, M. A. (1996): a) La lluvia y la temperatura de la zona cultivada influyen en el contenido de azúcar de la caña cosechada; b) Cuando hay mucha variación de la temperatura un mes antes de la cosecha, se produce un efecto positivo en el rendimiento del azúcar, la lluvia registrada en un período de dos meses antes de la cosecha reduce el rendimiento del azúcar; y c) En el caso de la región de Cd. Mante, la duración de la zafra es aproximadamente de 14 semanas.

La información que se presenta a continuación es una reducción de los registros de temperatura máxima y mínima (grados centígrados) de 38 años en la zona de Cd. Mante (proviene de 41610 datos originales):



Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del
Colegio de Ciencias y Humanidades,
S.C.I., 2013

No. de semana	máxima	mínima	No. de semana	máxima	mínima
1. 1-7 enero	26.26	13.79	27	33.52	22.54
2	25.91	12.08	28	33.97	22.52
3	26.29	12.07	29	34.00	22.56
4	26.63	12.16	30. 23-29 julio	34.08	22.52
5. 29-4 enero-febrero	26.96	13.29	31	34.56	22.51
6	27.52	13.11	32	35.84	22.36
7	28.49	13.69	33	35.59	22.42
8	28.66	14.48	34	35.60	22.45
9	30.13	14.54	35. 27-2 agosto-sept.	35.11	22.49
10. 5-11 marzo	30.35	15.08	36	34.20	22.21
11	31.71	15.83	37	33.06	21.81
12	32.29	16.33	38	33.22	21.75
13	32.76	17.42	39	33.11	21.06
14	34.12	17.68	40. 1.7 octubre	31.88	19.77
15. 9-15 abril	33.84	18.47	41	32.26	19.59
16	34.30	19.38	42	31.93	18.78
17	35.51	20.92	43	31.58	18.33
18	35.41	21.21	44	30.64	17.61
19	34.94	21.64	45. 5-11 noviembre	29.28	15.93
20. 14-20 mayo	35.53	21.82	46	29.16	16.06
21	35.72	22.28	47	28.32	14.79
22	35.45	22.35	48	27.10	13.45
23	35.97	22.89	49	27.10	13.79
24	35.87	22.87	50. 10-16 diciembre	26.94	12.75
25. 18-24 junio	34.91	22.86	51	25.98	12.02
26	34.24	22.66	52	26.30	12.34

La información que se presenta en la siguiente tabla son los valores correspondientes a la precipitación promedio por semana del año, durante los 38 años considerados en los datos iniciales (Martínez y Martínez, 1996):

Nosotros

No. de semana	mm	No. de semana	mm
1-7 enero	0.6755	27	7.4004
2	0.2461	28	7.1049
3	0.4645	29	5.9931
4	0.6531	30	4.9878
5	0.7569	31	4.2460
6	0.2441	32	3.7159
7	0.3181	33	3.6131
8	0.6538	34	7.8508
9	0.3292	35	7.4876
10	0.3976	36	5.5208
11	0.3690	37	7.2976
12	0.1841	38	4.7313
13	0.4317	39	6.0675
14	0.6849	40	4.1747
15	0.7980	41	2.0220
16	2.0464	42	3.2057
17	1.8825	43	1.1971
18	1.6012	44	1.5072
19	2.3253	45	1.3214
20	2.3955	46	0.6933
21	4.2678	47	0.4464
22	4.4641	48	0.5764
23	3.9771	49	0.8314
24	5.6788	50	0.5400
25	8.7041	51	0.5506
26	9.2033	52. 24-31 dic.	0.4029

En esta experiencia docente observamos las siguientes manifestaciones del pensamiento estadístico:

a) A partir de la construcción de la gráfica de la variable temperatura, la mayoría de los alumnos concluye que la época más adecuada para la zafra es desde la primera semana del año hasta la semana 20 aproximadamente.

b) Pocos estudiantes observaron la influencia de la variable precipitación pluvial en el rendimiento de la caña de azúcar. Los alumnos que consideraron esta variable, concluyen que el período adecuado para la zafra es aproximadamente en las primeras 14 semanas del año.



Conclusiones

Si las actividades que se realizan son rutinarias, entonces se desarrollan habilidades básicas o destrezas de pensamiento, por otra parte, el desarrollo de actividades no rutinarias fomentará el logro de habilidades más complejas.

Las habilidades matemáticas se pueden formar y desarrollar si presentamos a nuestros alumnos problemas que involucren conceptos no tratados directamente en clase, de manera que en el proceso de solución se puedan observar y juzgar las ideas que utilizan. Independientemente de la solución es importante analizar las estrategias que se ponen en juego para resolver una situación planteada. Si se observan las herramientas conceptuales que usan se tendrán indicios de sus potencialidades.

Es posible proponer problemas no rutinarios para desarrollar habilidades matemáticas, el pensamiento y el razonamiento estadístico en los estudiantes como alternativa al cambio de visión de la Estadística y de la Probabilidad hacia un desarrollo de capacidades cognitivas y del sentido estadístico como objetivos prioritarios. Esto permitiría relacionar el Modelo Pedagógico del CCH con las exigencias internacionales.

Referencias

- Behar, R. y Ojeda, R. (2000). El proceso de aprendizaje de la Estadística: ¿qué puede estar pasando? En *Heurística*. No.10.
- Behar, R. y Grima, P. (2001). Mil y una dimensiones del Aprendizaje de la Estadística. En *Estadística Española*. No.148. Vol. 43.
- Charría, V. et al. (2005). La enseñanza de la Estadística Inferencial. Un estudio de caso en la Pontificia Universidad Javeriana de Cali. En *Pensamiento Psicológico*. No. 5, Vol.1.
- Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación Estadística: relaciones con la Matemática. En *Investigación Educativa Latinoamericana*, núm. 49.
- Flores, A. H. y Hernández, H. (2012). *Diagnóstico del Área de Matemáticas*. CCH-UNAM.
- Hernández, J. D. (2006). *Habilidades matemáticas en la comprensión de la Estadística y de la Probabilidad en alumnos del CCH Sur*. Tesina de Especialización en Estadística Aplicada no publicada. IIMAS. UNAM.
- Hernández, J. D. (2006). Comentarios sobre la asignatura de Estadística y Probabilidad. En *Eutopía*. Nos. 12-13. CCH-UNAM.
- Itelson, B. (1985). Psicología de los tipos básicos de aprendizaje y enseñanza. En Petrovsky, A. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. México: Cartago-Letras.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. University of Chicago. Press.
- Martínez, G. A. y Martínez, M. A. (1996). Método de cómputo para pronosticar la época de zafra en caña de azúcar con base en datos de temperatura y precipitación. En *Agrociencia*, vol. 30., núm. 4. México.
- Méndez, I. (2005). Estadística Aplicada, herramienta para la práctica profesional. En *Gaceta UNAM*.
- Salinas, H. J. (2014). “¿Qué matemáticas en el bachillerato?” En *Gaceta CCH*. No. 1377.