El ANÁLISIS del ERROR. HACIA una didáctica específica de las MATEMÁTICAS

Recibido: 9/02/2016
Aprobado: 15/03/2016

Arcelia Lara Covarrubias y Daniel Lara Covarrubias

Resumen: El combate al rezago escolar exige una mirada didáctica que no caiga en generalidades sino que se nutra de la naturaleza del conocimiento matemático: la heurística positiva y el análisis de los procesos de individuación pueden delinear esta didáctica de las Matemáticas.

Palabras clave: didáctica específica, algoritmo parásito, heurística positiva, individuación.

Abstract: *Fighting educational lag demands a didactic approach that is not engaged in generalities, but an approach based in the nature of mathematical knowledge: positive heuristic and the analysis of individuation processes may guide such mathematical didactics.*

Key words: *specific didactics, parasite algorithm, positive heuristic, individuation.*

Introducción

Si, con los filósofos que han incluido el razonamiento matemático en su sistema, aceptamos la precognición del razonamiento deductivo, ¿cómo tendríamos que explicarnos el rezago escolar en matemáticas? Podemos, como se ha hecho en los últimos años, relacionarlo con argumentos contextuales: el bajo nivel económico, la inadecuada alimentación, los problemas sociales del país o los conflictos familiares. Estos factores, aun cuando influyen en el aprovechamiento escolar, no logran dar una explicación cabal del problema. Podríamos preguntarnos, por ejemplo, ¿por qué una dieta baja en proteínas carga con la responsabilidad de la reprobación en Matemáticas, pero no puede usarse como causa en otras áreas como las sociales o las humanísticas?

Es claro que, aunque las circunstancias familiares y sociales señalan parte del problema, no lo explican, porque no funcionan con calidad de razón suficiente. Hay que remitirlo, entonces, a una didáctica de la disciplina que no se fundamente en generalidades, sino que explique de manera específica, a partir de la naturaleza del conocimiento generado y de una epistemología que parta de "lo dado", las incidencias del error en los estudiantes.

Nosotros

No aspirar a un análisis teórico de los problemas de aprendizaje equivale a quedarse en una burda empiria pesimista que no encuentra soluciones; pero, por otro lado, tratar de explicarlos desde generalidades teóricas sería, en el mejor de los casos, hacer metafísica de lo imposible. Entre estas dos opciones se abre una tercera vía: la didáctica de las matemáticas basada en el análisis del error.

Universalidad del razonamiento deductivo

"El buen sentido –dice Descartes (1991: 30)– es la cosa mejor repartida en el mundo". Recordemos que a este pensador, además de sus aportes filosóficos, le debemos la geometría cartesiana. Otros filósofos piensan que el sano razonamiento es universal. ¿Pertenecerán las matemáticas a ese campo (buen sentido o razón recta) que todos los mortales potencialmente podemos discernir? Emmanuel Kant, Leibniz y Platón piensan que sí.

Según Kant (2003: 171-181), el pensamiento matemático está formado de juicios sintéticos, esto es, proposiciones cuyo conocimiento es extensivo porque no se deduce analizando el sujeto, sino que el predicado agrega algo nuevo. Pero no sólo eso, sino que, además, es un conocimiento *a priori*, no mediado por la experiencia; de hecho, la pregunta que motiva la *Crítica de la razón pura* es, precisamente, ¿cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*?, dicho en otras palabras, ¿cómo tenemos un conocimiento extensivo que no ha sido puesto en la experiencia?

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Todo parece indicar que también así lo creía Platón, para quien conocer es simplemente recordar. Para probar su teoría de la reminiscencia, Platón presenta el "caso del esclavo" (2008: 302-308), Sócrates pide a Menón que llame a un esclavo que hable griego pero que no tenga conocimientos matemáticos y, tras un interrogatorio, deduce el área de un cuadrado. Este ejemplo, que se ha convertido en canónico, ilustra la preeminencia del razonamiento matemático frente a la experiencia, pues, sin haber estudiado geometría, el esclavo hace un correcto uso deductivo.

Por su parte, Leibniz afirma que las verdades de razón –a diferencia de las verdades de hecho– son innatas, esto es, no se obtienen por inducción. Las proposiciones matemáticas y las geométricas son nociones claras y distintas que no proceden de la experiencia. Para explicar el innatismo de las verdades de razón, Leibniz (1988: 325) sostiene que el espíritu humano no es una tabula rasa sino que es como las vetas de mármol de un bloque, que no se captan a simple vista, pero que tras un cuidadoso examen pueden descubrirse.

El rezago escolar en Matemáticas

Para intentar dar una explicación razonable al problema del rezago escolar en matemáticas habría que partir del lugar en el que se genera el problema: ¿cuál es el papel de la escuela en la enseñanza de las matemáticas? Pese a que el razonamiento deductivo es universal, no basta para constituirse como conocimiento. Leibniz (1988: 325) opina que nuestro conocimiento del mundo es el cincel y el martillo con el que se descubren las vetas del mármol; Kant también reconoce la función de la experiencia, con la que se inicia el conocimiento, pues, "pensamientos sin contenidos son vacíos; intuiciones sin conceptos son ciegas" (2003: 226).

Del razonamiento al saber matemático lo que media es la experiencia, cuya fuente primordial es la escuela. Así, podemos reconocer que el papel del profesor es fundamental en ese proceso. El aprendizaje de los estudiantes no descansa únicamente en el conocimiento matemático del profesor, se requiere una perspectiva sobre la enseñanza. Pero, por otro lado, ¿basta con un amplio menú de consejos didácticos para que los alumnos reporten mejores resultados? Por supuesto que no. Las recomendaciones para dar una clase no son generalizables: lo óptimo en una materia no es, necesariamente, lo mejor en otra. Por esto, la didáctica general ha de dar paso hacia una didáctica específica de la disciplina que tome en cuenta las particularidades de la asignatura. Así, los enfoques pedagógicos han de estar determinados por el carácter disciplinario.

Intentar una explicación sobre el rendimiento deficiente en Matemáticas requiere, en primera instancia, colocarse en el centro mismo de la disciplina: revisar la naturaleza del conocimiento, las exigencias cognitivas y el diseño curricular de su enseñanza, son tareas insoslayables. Cada área genera sus propias rutas de acceso al conocimiento, por mucho que queramos trabajar con un núcleo de competencias compartidas por todos los campos del saber.

El análisis del error como heurística positiva

El Entre el qué de la disciplina y el cómo de la pedagogía se requiere una didáctica específica que cumpla la tarea de, usando la expresión de Mario Bunge (2015: 74), "patrullar esa zona fronteriza". Por otro lado, construir el campo intermedio requiere tomar en cuenta la formación previa de los estudiantes. Cuando los jóvenes llegan al bachillerato ya han estudiado Matemáticas durante nueve años; no puede decirse, por tanto, que no sepan absolutamente nada de la asignatura, tienen muchos conocimientos, aunque algunos de ellos sean imprecisos o generen errores de aplicación.

Por la naturaleza del conocimiento matemático conviene trabajar con una heurística o lógica de la investigación, entre cuyos beneficios se encuentra hacer "un examen no de la investigación, sino del investigador" (Lakatos, 1983: 252). "La heurística positiva es una estrategia para construir una serie de teorías de tal manera que puedan superar los defectos de cualquier etapa concreta" (Losee, 1981: 222). Este enfoque permite remitir el problema del bajo aprovechamiento a explicaciones particulares sobre el modo de razonar de cada estudiante. En otras palabras, los alumnos no se equivocan por ignorancia, sino por el empleo de algoritmos parásitos (razonamientos equivocados). La didáctica de las matemáticas requiere investigar bajo qué lógica realizan los jóvenes determinadas operaciones mentales.

En el caso del esclavo, la figura que traza Sócrates en la arena mide 2 pies por lado; por tanto, su área sería de 4 pies; si duplicamos la medida de los lados, pregunta el filósofo, cuál sería el área de este nuevo cuadrado, y el esclavo contesta que 8 pies (al cuadrado, se sobreentiende). Sócrates, mediante un interrogatorio preciso, hace ver su error al joven y, sin instruirlo, lo guía para que llegue a la respuesta correcta (16 pies cuadrados) (Platón, 2008: 302-308). Un maestro de Matemáticas ha de proceder socráticamente descubriendo qué algoritmo parásito usó el alumno, haciéndole ver su error y replanteando el problema para que llegue a la conclusión esperada.

Las Matemáticas son un campo privilegiado para conocer el pensamiento de los otros. El análisis del error puede indicarnos el algoritmo parásito; por ejemplo:

Caso 1: ¿Cuál es el resultado de 3^3?

a) $3^3=1$	*d)* $3^3=9$
b) $3^3=3$	*e)* $3^3=27$
c) $3^3=6$	*f)* 3^3=cualquier número que no sea 1, 3, 6, 9 ó 27.

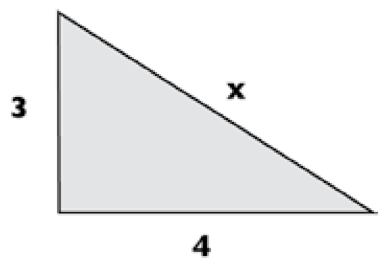
Sólo en el caso f) puede sospecharse que no hay falso razonamiento, sino simple ignorancia. En los casos a), b), c) y d) hay un algoritmo parásito (AP). En el caso e) suponemos, en primer lugar, que el alumno conoce la regla de la potencia; sin embargo, cabe la posibilidad de que haya usado un algoritmo parásito y que en este caso haya acertado por casualidad. Con un poco de audacia, podría suponerse cuál fue el caso con el que el alumno aprendió la potencia.

Caso	Razonamiento	Ejemplo con el que aprendió
a) $3^3=1$	AP: División. AP: Cualquier potencia es igual a 1.	1^1 $n^x=1$
b) $3^3=3$	AP: Identidad con la base o con la potencia.	Identidad con la base: 1^1, 1^2, 1^3… Identidad con la potencia: 2^1, 3^1, 4^1…
c) $3^3=6$	AP: Suma.	2^2
d) $3^3=9$	AP: Multiplicación.	2^2

Del cuadro anterior pueden elaborarse recomendaciones sobre los ejemplos que deben evitarse para enseñar determinados contenidos, como aquéllos que pudieran generar algoritmos parásitos.

En un examen de opción múltiple, el evaluador, partiendo de su experiencia docente, puede adelantarse a los algoritmos parásitos que podría generar un planteamiento específico; véase, por ejemplo, la siguiente pregunta de geometría.

Caso 2: ¿Cuánto mide el lado x del siguiente triángulo rectángulo?



a) 5
b) 7
c) 25
d) Cualquier otro número distinto de 5, 7 ó 25

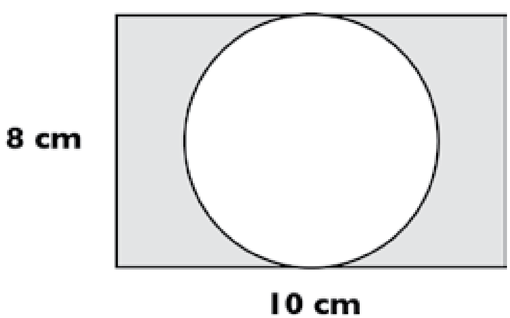
Caso	Razonamiento	Formalización del AP
a) 5 (Respuesta correcta)	Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
b) 7	AP: La hipotenusa es igual a la suma de los catetos.	$c = a + b$
c) 25	AP: La hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	$c = a^2 + b^2$
d) Cualquier otro número	Ninguno en particular.	

Principio de individuación

Cuando tratamos de problemas complejos, los profesores solemos visualizarlos como un razonamiento unitario, cuya verificación se encuentra en el resultado. De tal manera que, si un alumno comete un solo error, no tiene posibilidades de acertar y, por tanto, la respuesta es incorrecta. Podemos sospechar que el fracaso del aprendizaje de las Matemáticas no es tal, sino una apreciación en blanco y negro sobre lo que significa correcto e incorrecto: dejemos esta suposición de lado para no distraernos.

En un sólo problema matemático se encuentran sintetizados diferentes razonamientos susceptibles de análisis (distinción y caracterización); de manera que, errar en uno de los pasos no significa, necesariamente, no entender el problema en su totalidad o razonar erróneamente todo el proceso. La didáctica de las Matemáticas, con un enfoque heurístico positivo, reclama identificar cada momento del planteamiento, la operación mental que se requiere con su nivel cognitivo y la rama a la que pertenece (aritmética, álgebra, geometría, etc.). Véase el siguiente problema con su solución y su análisis en términos de una didáctica de las Matemáticas.

Caso 3: ¿Cuál es el valor del área sin sombrear de la siguiente figura?



Solución por pasos

1) $a = \pi \cdot r^2$
2) $a = \pi \cdot (d/2)^2$
3) $a = \pi \cdot (8\text{ cm} / 2)^2$
4) $a = 3.14 \cdot (4\text{ cm})^2$
5) $a = 3.14 \cdot 16\text{ cm}^2$
6) $a = 50.24\text{ cm}^2$

Si hemos de evaluar usando el principio de individuación, este problema valdría 6 puntos; esto es, no puede considerarse que la respuesta esté mal por un error en uno sólo de sus pasos, aunque esto cambie el resultado final y, en sentido estricto, podría pensarse que está mal resuelto; salvo, por supuesto, cuando de ese paso depende todo el razonamiento, como en el primero del ejemplo anterior. Para conocer el grado de complejidad de cada uno de los momentos hay que observar cuidadosamente la Taxonomía de Bloom, que nos indica la operación y el nivel cognitivo (conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación) y cruzarlo con el conocimiento disciplinario. El análisis de la solución al problema anterior, en términos de una didáctica de las matemáticas, diría lo siguiente.

Solución por pasos	Operación mental (nivel cognitivo)	Conocimiento disciplinario específico	Rama de la matemática
1) $a = \pi . r^2$	Recordar/ Aplicar (conocimiento/ aplicación)	Área del círculo	Geometría
2) $a = \pi . (d/2)^2$	Comparar (Evaluación)	Relación diámetro-radio	Geometría
3) $a = \pi . (8\text{ cm} / 2)^2$	Aplicar (Aplicación)	Diámetro	Geometría
4) $a = 3.14 . (4\text{ cm})^2$	Recordar (conocimiento) Operar (Aplicación)	Valor de π División	Geometría Aritmética
5) $a = 3.14 . 16\text{ cm}^2$	Operar (Aplicación)	Potencia	Aritmética
6) $a = 50.24\text{ cm}^2$	Operar (Aplicación)	Multiplicación	Aritmética

Algunos de estos pasos aceptan una individuación aún más especificativa. Por ejemplo, en el paso 3), el alumno, además de aplicar sus conocimientos sobre el diámetro a la figura que sirve como ejemplo, ha de tener algunos saberes previos, como que todos los diámetros posibles de un mismo círculo miden lo mismo y que esta medida equivale a la mitad del radio; a partir de estos saberes previos, ha de deducir que si el círculo se encuentra dentro de un rectángulo y uno de los lados (el más corto) es idéntico a uno de los diámetros, por tanto, aunque no se le dé la medida de éste, puede deducirse del lado más corto del rectángulo. Algo semejante sucede con el paso 4) cuya resolución implica un conocimiento memorístico (saber el valor de π).

Tomando en cuenta el principio de individuación, el único paso que compromete el resto del razonamiento es el primero, puesto que de éste dependen las decisiones sobre las operaciones mentales subsiguientes; errar en este momento significa, para este ejemplo específico, tener mal toda la respuesta. Los pasos 4), 5) y 6) suponen operaciones aritméticas que los alumnos dominan, pues, esta rama de las Matemáticas es la primera que formalizan –desde su educación primaria– y que tiene un carácter instrumental mayor, en tanto que, casi en todos los planteamientos matemáticos las operaciones básicas constituyen un momento del razonamiento.

Llama poderosamente la atención que muchos de los errores que comenten los estudiantes se deben al mero descuido: pueden conocer perfectamente la fórmula del área, tener memorizado el valor de π, podrían, incluso, de ser el caso, despejar la fórmula para encontrar un valor numérico no dicho; sin embargo, suelen ser erráticos en minucias como olvidarse de la potencia y comenzar a realizar operaciones obviando el cuadrado; este error, en el ejemplo, podría repercutir en un cambio numérico de la pregunta planteada en el paso 5), y de manera simbólica en los seis pasos de la solución.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2015

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Aunque parezca extraordinario, es común que los estudiantes se equivoquen en la resolución de operaciones aritméticas básicas que, como se dijo anteriormente, son las que más conocen y han practicado. Cuando el profesor pretende descubrir si un error aritmético esconde un algoritmo parásito o es un mero descuido, ha de recurrir –al contrario de los ejemplos con los que enseña nuevos conocimientos– a casos extraordinarios. Supongamos que varios estudiantes se equivocan en el paso 4) del ejemplo anterior y se trata de un problema que hay que atender de manera general; por tanto, se requiere de la suspicacia del maestro para plantear un caso de la misma rama de las Matemáticas que atiende el mismo conocimiento disciplinario, pero que exige una operación mental y un nivel cognitivo mayor. En el caso de la división que supone el momento 4) del planteamiento anterior, el docente podría, por ejemplo, poner el siguiente caso:

Caso 4: ¿Cuál es el resultado de la operación 5/0?

a) 0
b) 1
c) 5
d) Indeterminado
e) Un número diferente de 0, 1 ó 5

Tomando en cuenta que la respuesta correcta es el inciso d), las posibilidades de algoritmo parásito son:

Caso	Razonamiento	Ejemplo con el que aprendió
a) 0	AP: Analogía con la multiplicación AP: Confusión con la operación con dividendo y divisor invertidos..	(5) (0) =0 0/5
b) 1	AP: Elevar una base al exponente 0.	$5^o = 1$
c) 5	AP: Analogía con la división con 1.	5/1
d) Indeterminado	Respuesta correcta	n/0 = Indeterminado
e) Número diferente de 0, 1 ó 5	AP: Ninguno en especial.	

Conclusiones

Muchos profesores pueden argüir que esta didáctica de las matemáticas puede funcionar sólo con grupos poco numerosos (hasta diez alumnos), por el análisis y especificidad que implican. No obstante, los maestros tienen a los mejores aliados: los alumnos mismos.

Heurísticamente se trabaja sobre "lo dado", es decir, sobre lo que el alumno razonó o dejó de razonar. El análisis de los errores o descuidos cometidos en la resolución de un problema ayuda no sólo a corregir el razonamiento, sino a devolver el carácter de evidencia con el que suelen identificarse las matemáticas. Explicar paso a paso un problema que previamente ha sido motivo de evaluación ayuda a los alumnos a percatarse de sus errores; no hay que dejar, sin embargo, que las conclusiones a las que lleguen caigan en derrotismo paralizante. Así como el profesor puede inferir los algoritmos parásitos de los estudiantes; los jóvenes pueden analizar sus errores y dar cuenta de qué razonamiento estuvo errado, a qué área pertenece y qué debe reforzar o corregir.

Analizar el error propio ayuda a los alumnos a reflexionar sobre sus debilidades y fortalezas. Con una práctica continuada el joven puede darse cuenta de qué área de las Matemáticas se le dificulta y qué aspectos se le facilitan. Este campo, el metacognitivo, supone un doble conocimiento: de sí mismo y de la disciplina.

Referencias

Aristóteles. (2002). *Metafísica*. Barcelona: Océano.

Bunge, M. (2015). *Evaluando filosofías. Una protesta, una propuesta y una respuesta a cuestiones filosóficas descuidadas*. Madrid: Gedisa.

Descartes, R. (1991). *Discurso del método. Meditaciones metafísicas*. México: Espasa-Calpe.

Kant, E. (2004). *Crítica de la razón pura*. Buenos Aires: Losada.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza.

Leibniz, W. (1988). *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano.* La Habana: Ciencias Sociales.

Loose, J. (1981). *Introducción histórica a la filosofía de la ciencia*. Madrid: Alianza.

Platón (2008). *Menón. Diálogos.* Madrid: Gredos.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013