En el primer libro de su tratado *De Musica*, San Agustín de Hipona dice que la música es "la ciencia de la buena modulación". Y no cabe duda que esto es fundamental para la teoría de la modulación tonal, un aspecto de la armonía occidental, donde se pasa de una tonalidad de origen S a una tonalidad destino T en un "buen modo".

Por supuesto, la sencilla definición de "modulación" como un agradable tránsito de una tonalidad a otra no es muy precisa y ejemplifica el problema del encapsulamiento. Para empezar: ¿qué es una tonalidad? Decir que es "un sistema musical en el que hay relaciones jerárquicas entre los tonos respecto de un centro tonal o tónica" no parece un serio intento por aumentar la precisión del concepto.

Si partimos del hecho de que la materia de la música son los tonos (en particular los de la afinación equitempe-

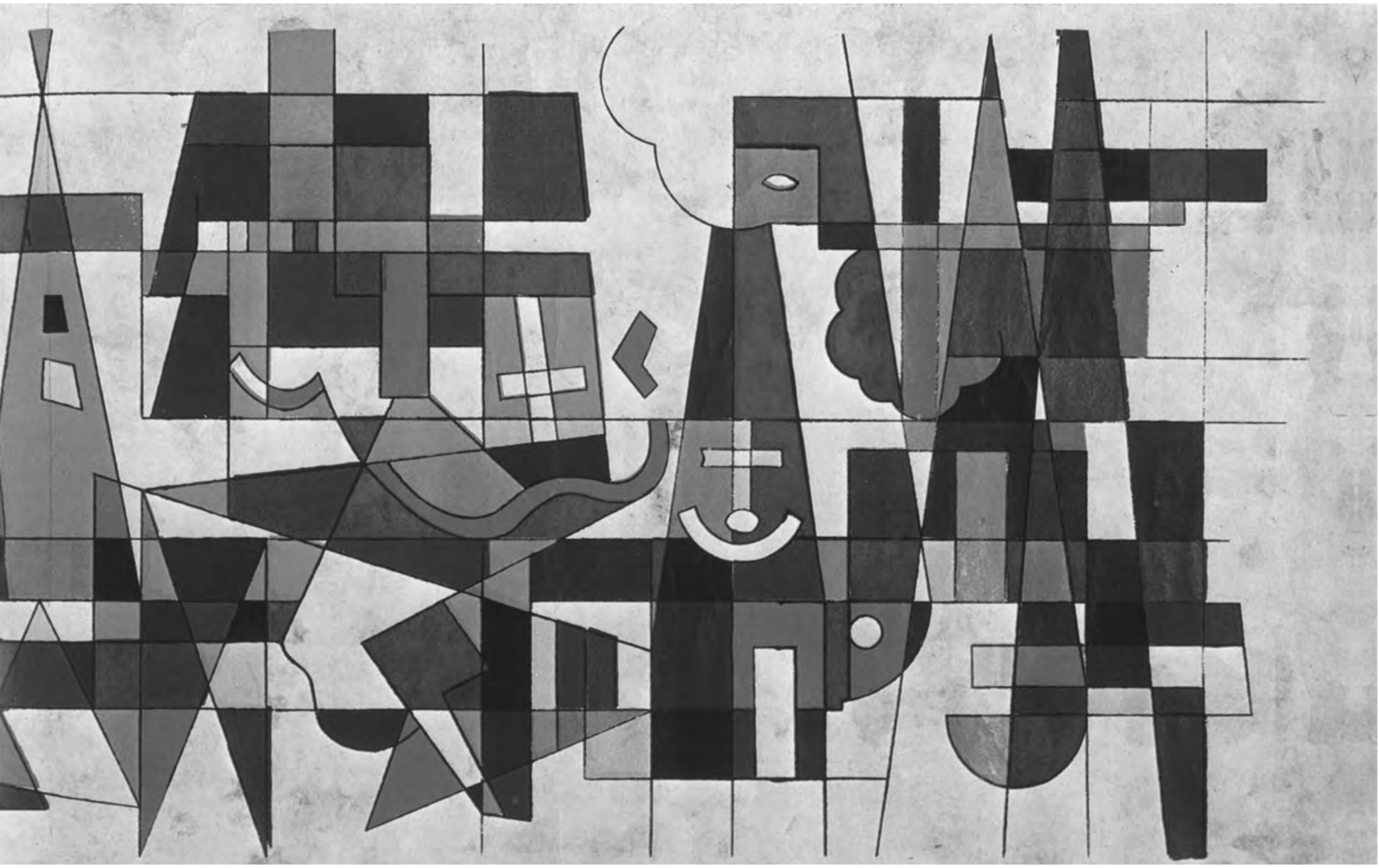
Una invitación a la **teoría**

Octavio A. Agustín Aquino y Emilio Lluis Puebla

rada de doce tonos), que una escala es una elección periódica (es decir, que se repite octava tras octava) de estos tonos, y que los acordes son conjuntos de tonos, entonces una tonalidad es un conjunto de acordes elegidos apropiadamente entre los tonos de una escala. A los acordes de una tonalidad también se le llaman "grados", y generalmente se les numera de acuerdo con su posición en la escala de un tono particular que le pertenece.

Algunos ejemplos pueden ilustrar esto. Cabe recordar que en la notación empleada: C = do, D = re, E = mi, F = fa, G = sol, A = la y B = si; cuando se acompañan del signo # significa que es sostenido (C# = do sostenido).

Ejemplo 1. El conjunto C = {C, D, E, F, G, A, B} repetido en todas las octavas es la llamada escala de C mayor (y se puede escuchar tocando sucesivamente todas las teclas blancas



matemática de la música

II. Armonía y contrapunto

del piano). La tonalidad de C mayor está integrada por los acordes: $\mathrm{I}_C = \{C, E, G\}$, $\mathrm{II}_C = \{D, F, A\}$, $\mathrm{III}_C = \{E, G, B\}$, $\mathrm{IV}_C = \{F, A, C\}$, $\mathrm{V}_C = \{G, B, D\}$, $\mathrm{VI}_C = \{A, C, E\}$, $\mathrm{VII}_C = \{B, D, F\}$.

Otro ejemplo sería el conjunto $D = \{D, E, F\#, G, A, B, C\#\}$ repetido en las octavas, que es la escala de D mayor. La tonalidad de D mayor está integrada por los acordes: $\mathrm{I}_D = \{D, F\#, A\}$, $\mathrm{II}_D = \{E, G, B\}$, $\mathrm{III}_D = \{F\#, C\#, A\}$, $\mathrm{IV}_D = \{G, B, D\}$, $\mathrm{V}_D = \{A, C\#, E\}$, $\mathrm{VI}_D = \{B, D, F\#\}$, $\mathrm{VII}_D = \{C\#, E, G\}$.

Según Arnold Schönberg, para iniciar una modulación se utilizan primero algunos acordes que pertenezcan tanto a la tonalidad de salida como a otras (y por eso se denominan "neutros"). Un ejemplo de acorde neutro sería el quinto grado de la tonalidad de C mayor, que es $\mathrm{V}_C = \{G, B, D\}$, que coincide con el cuarto grado de la tonalidad de D mayor $\mathrm{IV}_D = \{G, B, D\}$. A continuación, en una etapa de transición, se usan acordes que funcionan como "pivotes", anticipando la tonalidad de llegada. Por último, se despliega una "cadencia" para afirmar la tonalidad de llegada: es decir, se presenta una sucesión de acordes que pertenezcan exclusivamente a la tonalidad de llegada. Para formalizar matemáticamente todo lo anterior, primero hemos de identificar los tonos con el anillo Z_{12}, que modela la llamada "aritmética del reloj" (figura 1). Esto es porque en la música se suman y multiplican tonos como se suman o multiplican las horas para transponer escalas o invertir acordes. De este modo, tendríamos que $C = 0$ (o las 12 en punto), $C\# = 1$, $D = 2$, $D\# = 3$, $E = 4$, $F = 5$, $F\# = 6$, $G = 7$, $G\# = 8$, $A = 9$, $A\# = 10$, $B = 11$.

Ejemplo 2. El acorde que es el primer grado de la tonalidad de C mayor en: $\mathrm{I}_C = \{C, E, G\}$ y en números corresponde a $\mathrm{I}_C = \{0, 4, 7\}$. Si transponemos en 2 a este acorde, tenemos: $\mathrm{I}_C + 2 = \{0+2, 4+2, 7+2\} = \{2,6,9\} = \{D, F\#, A\} = \mathrm{I}_D$, que es el primer grado de la tonalidad de D mayor. Para invertir I_D, lo multiplicamos por -1 y así $-1 \cdot \mathrm{I}_D = \{-1 \cdot 2, -1 \cdot 6, -1 \cdot 9\} = \{10, 6, 3\} = \{D\#, F\#, A\#\}$. El lector puede comprobar fácilmente que si transponemos en 2 a toda la escala de C mayor obtenemos la escala de D mayor, esto es, $C + 2 = D$.

Ahora nos restringiremos a las "escalas mayores", que son C y todas sus transposiciones. Dada una escala mayor X, definimos una tonalidad $X^{(3)}$ como el conjunto de grados I_X, II_X, …, VII_X (que son transposiciones de los grados que ya mencionamos en un ejemplo anterior) que recubre toda la escala X, de la que se toman sus tonos. Así obtenemos las doce tonalidades mayores $C^{(3)}$, $C\#^{(3)}$, $E^{(3)}$, …, $B^{(3)}$. El conjunto de estas tonalidades lo denotaremos como $Dia^{(3)}$; también se les llama "interpretaciones triádicas de las escalas diatónicas".

Si a los acordes de $X^{(3)}$ los representamos como puntos en el espacio tridimensional y conectamos con una línea dos acordes que comparten al menos un tono, luego rellenamos los triángulos que se obtienen si los tres acordes en sus vértices comparten al menos un tono, resulta una superficie triangulada que es una banda de Möbius (figura 2). El orden cíclico de los acordes que surge de recorrer su borde es el llamado "círculo de quintas" (sin tomar en cuenta sostenidos o bemoles). Es interesante notar que Schönberg también descubrió esta construcción y la denominó *Harmonisches Band*, o "banda armónica".

Otro aspecto interesante de la banda armónica es que representa objetos musicales (acordes o grados de una to-

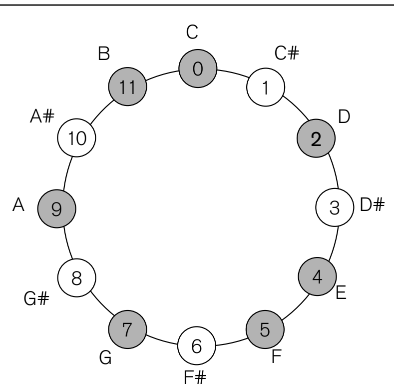


Figura 1. Los doce tonos de la afinación equitemperada, sin tomar en cuenta las octavas. En gris, los tonos de la escala de C mayor.

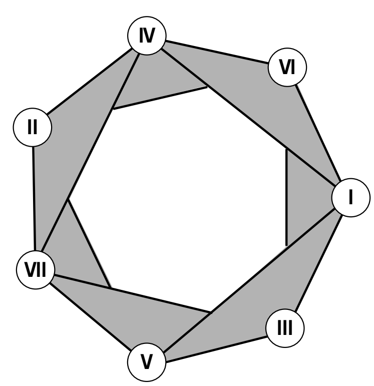


Figura 2. La banda armónica.

nalidad) y sus relaciones (cómo comparten tonos). Tales relaciones son operaciones lógicas, pues finalmente son intersecciones de conjuntos (que a fin de cuentas están definidas por predicados lógicos). Esto significa que la banda armónica es una representación geométrica de un hecho lógico, idea que se extiende a toda la música por medio de la teoría de *topos* (que, repetimos, es una amalgama de la lógica y la geometría).

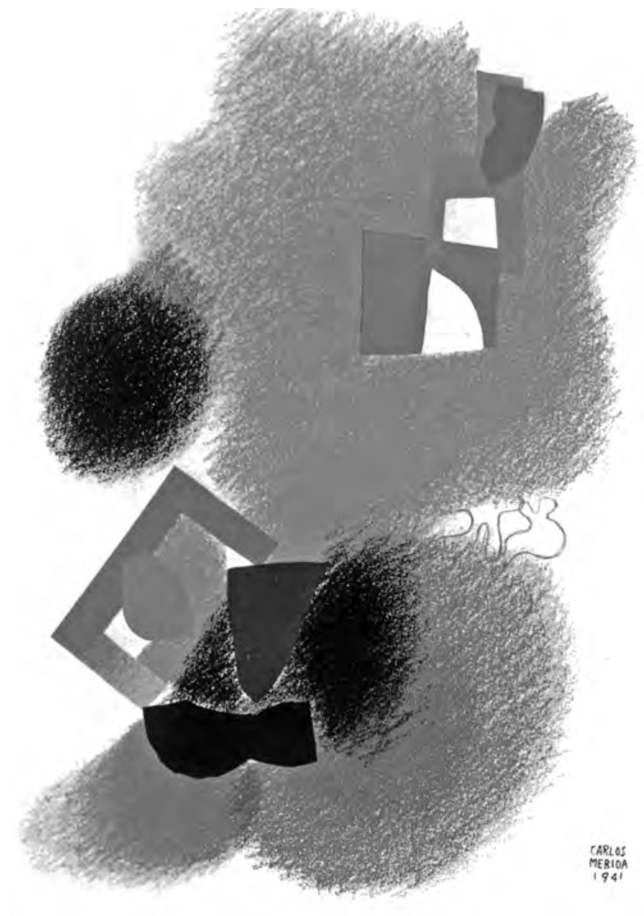
Podemos enseguida definir rigurosamente qué es una cadencia: es un conjunto mínimo de grados de una tonalidad $X^{(3)}$ tales que las triadas que lo conforman no pertenezcan a otra tonalidad. A continuación listamos todas las cadencias posibles: $k_1 = \{II_X, V_X\}$, $k_2 = \{II_X, III_X\}$, $k_3 = \{III_X, IV_X\}$, $k_4 = \{IV_X, V_X\}$, $k_5 = \{VII_X\}$.

Llama la atención la cadencia k_4, pues está conformada por los grados que tradicionalmente se denominan “subdominante” y “dominante”, respectivamente. Son un mecanismo clásico para afirmar la tonalidad en la música occidental, omnipresente en la música popular actual.

Disponemos ya de los ingredientes para describir el modelo de modulación propuesto por Mazzola. Parte de la modulación debe ser una función m (o llamada también “simetría”) que transforme la tonalidad de partida $S^{(3)}$ en la tonalidad de llegada $T^{(3)}$, y que llamaremos “modulador”. Pedimos que sea de la forma $m(x) = ax + b$, donde $a = 1, 5, 7, 11$ son precisamente los elementos de Z_{12} que tienen inversos multiplicativos, y que además mande a la escala s de la tonalidad $S^{(3)}$ en la escala T de $T^{(3)}$. Se puede ver que hay exactamente dos funciones de este tipo. Puede ser que o bien $T^{(3)} = S^{(3)} + t$ para algún t; o que $T^{(3)} = A_S \cdot S^{(3)} + t$ para algún t, donde AS es la única inversión que deja la escala S invariante. Se puede comprobar que solamente hay diez funciones que transforman a $S^{(3)}$ en $T^{(3)}$ como se ha descrito.

Ejemplo 3. Ya vimos que $c + 2 = D$, y evidentemente $C^{(3)} + 2 = D^{(3)}$. Si S es la escala de C mayor, C, entonces $A_C(x) = 4 - x$. En efecto, $-\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} + 4 = \{0 + 4, -2 + 4, -4 + 4, -5 + 4, -7 + 4, -9 + 4, 11 + 4\} = \{4, 2, 0, 11, 9, 7, 5\}$.

El modulador nos dice cómo ir de una tonalidad a otra, pero falta decir cómo debe comportarse respecto de las cadencias de las tonalidades. Es decir, debemos establecer cuáles grados serán los pivotes. Para tal fin, se introduce el concepto de “cuanto de modulación” respecto de la cadencia k y el modulador m, que es un conjunto de tonos M con las siguientes propiedades: a) el modulador debe ser una simetría de M, es decir, $m(M) = M$; b) los tonos de los grados de la



cadencia k de $T^{(3)}$ deben estar contenidos en M; c) el conjunto de los tonos que pertenecen tanto a M como a T debe ser rígido, es decir, no tiene simetrías distintas a la identidad; d) el conjunto M es el que tiene la menor cantidad de elementos, de modo que se cumplan las dos primeras condiciones.

Ejemplo 4. Supongamos que tenemos el modulador $m(x) = 11x + 6$ que lleva a la tonalidad de C en la tonalidad de D y la cadencia clásica $k = \{IV, V\}$. Entonces el cuanto de modulación respecto de (m,k) es $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$. Efectivamente, $m(\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}) = 11 \cdot \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\} + 6 = \{5, 4, 2, 1, 11, 9, 7\}$. Los tonos que pertenecen tanto a M como a D son $\{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$, y si se opera con todas las simetrías de la forma $f(x) = ax + b$ con $a = 1, 5, 7$ 11 se ve que solamente $f(x) = x$ la deja invariante. También es un cálculo (largo y tedioso, pero sencillo) ver que no hay otro conjunto más pequeño que satisfaga esto.

De lo anterior se desprende el siguiente teorema: para dos tonalidades diferentes, $S^{(3)}$ y $T^{(3)}$, existe un cuanto de mo-

dulación M respecto de (m,k). Además, tiene las siguientes propiedades: a) el conjunto M es una unión de los grados de $\mathrm{S}^{(3)}$ y $\mathrm{T}^{(3)}$; éstos definen a la interpretación triádica $\mathrm{M}^{(3)}$ de M; b) los grados comunes de $\mathrm{T}^{(3)}$ y $\mathrm{M}^{(3)}$ se denominan "grados pivotes de la modulación" (k,m); c) el modulador m está determinado de forma única por los grados de la modulación.

Ejemplo 5. La interpretación triádica del M del ejemplo anterior es $\mathrm{VII}_D = \{1, 4, 7\}$, $\mathrm{II}_C = \{2, 5, 9\}$, $\mathrm{III}_C = \mathrm{II}_D = \{4, 7, 11\}$, $\mathrm{V}_C = \mathrm{IV}_D = \{7, 11, 2\}$, $\mathrm{V}_D = \{9, 1, 4\}$ y $\mathrm{VII}_C = \{11, 2, 5\}$, pues son los grados de $\mathrm{C}^{(3)}$ y $\mathrm{D}^{(3)}$ cuyos tonos están contenidos en M. Los grados comunes entre $\mathrm{D}^{(3)}$ y $\mathrm{M}^{(3)}$ son II_D, IV_D, V_D y VII_D, por lo que éstos son los grados pivotes en la modulación de $\mathrm{C}^{(3)}$ a $\mathrm{D}^{(3)}$.

Los pivotes predichos por este modelo coinciden con los propuestos por Schönberg en su tratado *Harmonielehre*. Pero lo importante del enfoque matemático no es su concordancia con las ideas de Schönberg o las de cualquier otro teórico de la música, pues en ese caso resultaría superfluo. Lo fundamental es que descansa en pocos principios bien definidos y que se puede extender a otros ámbitos de manera natural: funciona para las escalas armónicas menores, las escalas de tonos enteros o en todo lo anterior pero en afinaciones justas, pitagóricas o microtonales. Inclusive pueden reemplazarse los tonos por los golpes del metrónomo en un compás de doce octavos (por tomar un metro particular) para efectuar ¡modulaciones rítmicas! Un ejemplo de ellas puede escucharse en la obra *Synthesis* de Guerino Mazzola.

Contrapunto

El contrapunto, parafraseando a K. Jeppesen, es el arte de preservar, de manera balanceada y armónica, la independencia de las voces en una composición polifónica. Por ello, si en la armonía los protagonistas son los acordes y las modulaciones, en el contrapunto son los intervalos y las consonancias, que son finalmente las relaciones que existen entre las voces de una composición polifónica.

Ahora bien, un "intervalo" es la distancia que existe entre un tono y otro. En ese sentido, hay solamente doce distancias posibles (sin tomar en cuenta octavas) y por eso también podemos modelarlas con $\mathbb{Z}_{12}$. También tienen nombres musicales tradicionales (cuadro 1). En el contrapunto clásico descrito por Johann Fux en su obra clásica *Gradus ad Parnassum*, las consonancias son el unísono (que englo-

ba a las octavas), la quinta justa y las terceras y sextas (tanto menores como mayores). El resto son disonancias. Si se codifican como los elementos de Z_{12} vemos que las consonancias son $K = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\}$ y las disonancias son $D = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\}$, cada conjunto con seis intervalos.

Una observación fundamental de Mazzola es que la transformación $p(x) = 5x + 2$ transforma consonancias en disonancias y recíprocamente: $p(K) = D$, $p(D) = K$. Además, es la única simetría con esta propiedad (y por eso es denominada "polaridad"). Con esto se pone de manifiesto que las simetrías deben incluir ahora multiplicación por quintas y cuartas, además de la inversión que se emplea en la armonía. Sin embargo, estas operaciones no se pueden visualizar tan fácilmente en la aritmética del reloj. Pero cambiando un poco la perspectiva (como aconseja la filosofía de Yoneda), hay una manera de resolver esto usando el llamado "toro de terceras" (figura 3), que resulta de ver cada intervalo como una suma de terceras menores (número 3 en el cuadro 1) y mayores (4). Con este objeto geométrico se puede ver que: a) la inversión (11) corresponde a rotar 180 grados respecto del eje que atraviesa el toro; b) la multiplicación por cuartas (5) es la reflexión respecto de un plano horizontal que corta a la mitad al toro, y la multiplicación por quintas (7) la reflexión respecto de un plano vertical que pasa por la tercera menor; c) transponer en una tercera menor equivale a rotar 90 grados y transponer una tercera mayor en un giro de 120 grados.

El contrapunto de la primera especie es la composición polifónica más simple, donde solamente hay dos voces que emiten notas de idéntica duración y son tales que los intervalos entre ellas siempre son consonancias (figura 4). Al componer contrapunto de la primera especie, generalmente una de las voces está dada de antemano y se le llama *cantus firmus*, mientras que la otra se construye de acuerdo con ciertas reglas y se denomina *discanto*. Además, es deseable que el *discanto* permanezca siempre por debajo, o bien siempre por arriba del *cantus firmus*. Cuando no sucede así, se dice que las voces se cruzan, por lo que se evita en la medida de lo posible. Por ello, en lo sucesivo supondremos que siempre el *cantus firmus* está por debajo del *discanto* y que entonces todos los intervalos entre ambas voces son ascendentes.

Para modelar el contrapunto de la primera especie y formalizar matemáticamente las reglas para componerlo se requiere solamente una voz (el *cantus firmus*) y asociarle intervalos, pues de esta manera queda determinada unívocamente el *discanto*. Esto se logra utilizando el anillo de

Intervalo	Nombre	Intervalo	Nombre
0	unísono u octava	6	tritono
1	segunda menor	7	quinta perfecta
2	segunda mayor	8	sexta menor
3	tercera menor	9	séptima menor
4	tercera mayor	10	séptima menor
5	cuarta perfecta	11	séptima mayor

Cuadro 1. Nombres de los intervalos.

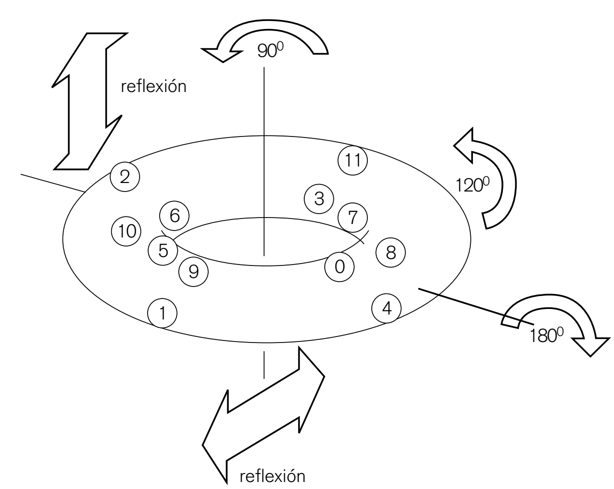


Figura 3. Simetrías del toro de terceras.

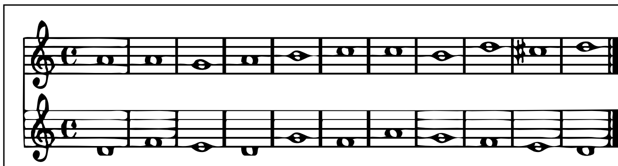


Figura 4. Ejemplo de contrapunto de la primera especie. El *cantus firmus* está en la voz inferior.

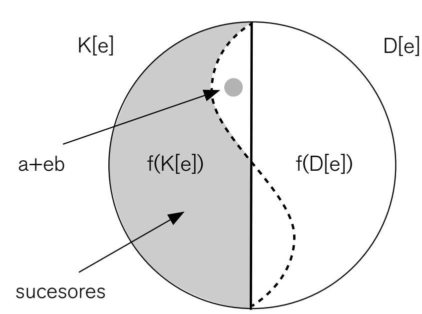


Figura 5. Efecto de las simetrías de intervalos de contrapunto.

los "números duales" sobre Z_{12}, que es el anillo cociente $Z_{12}[e] = Z_{12}[x]/(x^2) = \{a + eb$: a, b pertenecen a $Z_{12}\}$. Cada número dual $a + eb$ representa un intervalo de contrapunto, donde a es el tono del *cantus firmus* y b el intervalo entre el *cantus firmus* y el *discanto*. Por lo tanto, el tono del *discanto* es $a + b$.

Vale recalcar que los intervalos que se emplean en el contrapunto de la primera especie son: $K[e] = \{a + ec$, a pertenece a Z_{12} y c es una consonancia$\}$. El resto de los intervalos de contrapunto son los intervalos disonantes $D[e] = \{a + ec$, a pertenece a Z_{12} y c es una disonancia$\}$.

Es posible multiplicar intervalos de contrapunto de la siguiente manera: $(a + xb)(c + xd) = (ac + x)(ad + bc)$.

También pueden sumarse: $(a + xb) + (c + xd) = (a+c) + e(b + d)$.

Tales operaciones algebraicas no son vanos caprichos matemáticos, pues son musicalmente significativas: representan algunas de las transformaciones comunes en el contrapunto doble, permiten reinterpretar los intervalos cuando se cruzan las voces y son un elemento crucial para obtener el modelo matemático del contrapunto clásico de la primera especie. Para entender el por qué de esto último, empezaremos por notar que la multiplicación de intervalos de contrapunto permite definir simetrías de los intervalos de contrapunto, análogas a las de los intervalos sencillos. En este caso, una simetría es de la forma siguiente: $f(a + eb) = (u + ey)(a + eb) + (s + et)$, donde $u = 1, 5, 7, 11$.

Así como existe una transformación $p(x) = 5x + 2$ que intercambia los intervalos consonantes por disonantes, para cada *cantus firmus* a existe una transformación $p_a(c + ed) = 5(c + ed) + 8a + e2$ que intercambia los intervalos de contrapunto consonantes por disonantes, es decir, $p_a(K[e]) = D[e]$. Adicionalmente, deja invariantes los intervalos con *cantus firmus* a (esto es, $p_a(a + eb) = a + eb'$). La llamaremos una "polaridad relativa" (respecto de a). Por ejemplo, el intervalo de una quinta justa sobre D es $2 + e7$, y p_2 lo manda a $p_2(2 + e7) = 5(2 + e7) + 8 \cdot 2 + e2 = (10 + e11) + 4 + e2 = 10 + 4 + e(11 + 2) = 2 + e1$, que es una segunda menor sobre D y es, desde luego, una disonancia.

Una simetría de intervalos de contrapunto f permite "deformar" las consonancias $K[e]$ (figura 5), de modo que los elementos de $f(K[e])$ son "consonancias deformadas"; algunas siguen siendo consonancias, pero otras no. Supongamos ahora que elegimos algún intervalo consonante $a + eb$ que no es una disonancia deformada por f, es decir, $a + eb$ no pertenece a $f(K[e])$. Entonces todos los restantes elementos que pertenecen a $f(K[e])$ y a $K[e]$ son consonancias que "suavizan" la disonancia deformada $a + eb$. Esto permite introducir una tensión horizontal en el contrapunto, a pesar de que en el contrapunto de la primera especie debemos restringirnos a utilizar consonancias. Efectivamente: a un intervalo de contrapunto que es una consonancia podemos verlo como disonancia deformada, y entonces contraponerle un "sucesor" que sea al mismo tiempo un intervalo de contrapunto consonante y una consonancia deformada.

Naturalmente, nos gustaría que para un intervalo de contrapunto $a + eb$ la simetría f sea tal que dispongamos de la mayor cantidad posible de elecciones para el intervalo de contrapunto sucesor. También es deseable que la polaridad relativa respecto de a intercambie a $f(K[e])$ y $f(D[e])$, es decir, que el mismo modo de intercambiar consonancias por disonancias intercambie consonancias y disonancias deformadas.

Entonces, dado el intervalo de contrapunto $a + eb$, diremos que f es una "simetría de contrapunto" para dicho intervalo si se satisface lo siguiente: a) el intervalo $a + eb$ no es una consonancia deformada por f, es decir, $a + eb$ no está en $f(K[e])$; b) la polaridad relativa $p_a(x)$ intercambia consonancias deformadas por disonancias deformadas, esto es, $p_a(f(K[e])) = f(D[e])$; c) el conjunto de consonancias que también son consonancias deformadas por f es el más grande posible, tal que f tiene las dos propiedades anteriores.

Dada una simetría de contrapunto f para un intervalo de contrapunto $a + eb$, todos los elementos que son tanto

consonancias como consonancias deformadas por f son sucesores "admisibles" de $a + eb$. Tenemos entonces como resultado un teorema de contrapunto: cualquier intervalo de contrapunto consonante $a + eb$ tiene al menos 36 sucesores admisibles. En particular, cada intervalo de contrapunto tiene una simetría de contrapunto. Además, si se elige de antemano el *cantus firmus* del intervalo sucesor, siempre existe al menos un sucesor admisible para dicho *cantus firmus*.

Ejemplo 6. Consideremos el intervalo de contrapunto $0 + e7$ (la quinta perfecta sobre C) y la simetría $g(a + eb) = 7(a + eb)$. Ésta es una simetría de contrapunto para el intervalo, pues $g(K[e]) = Z_{12} + e\{0, 1, 3, 4, 8, 9\}$, así que $0 + e7$ no es una consonancia deformada.

Es fácil verificar que éste satisface el resto de las propiedades, y que el número de sucesores admisibles es de 60, lo cual significa que todos los intervalos consonantes pueden suceder a una quinta perfecta, salvo la quinta justa. Ésta es una regla que también da Fux en su tratado, la gran diferencia es que aquí es una consecuencia del modelo, y no un prerrequisito.

El teorema de contrapunto nos dice que para cualquier *cantus firmus* podemos componer un discanto exclusivamente con consonancias que son sucesores admisibles. También es interesante que, si restringimos a los tonos del *cantus firmus* y el *discanto* para que permanezcan en cierta escala, la escala que nos da la mayor libertad de elecciones para los sucesores es la escala mayor; solamente en dos casos el sucesor admisible es único. Lo contrario pasa con la escala melódica menor: en 16 casos el sucesor es único. Éstas son consecuencias que podrían deducirse de las reglas del contrapunto clásico, pero vale enfatizar que fueron deducidas de unos cuantos principios bien definidos.

En un análisis detallado realizado por Muzzulini y Mazzola, descubrieron que las reglas de Fux restringidas a una octava (el que denominan "estilo estricto restringido") arrojan un total de 54 progresiones de contrapunto inadmisibles. El modelo matemático da 37 prohibiciones, y coincide con los de Fux en 21 ocasiones. La probabilidad de que alguien, sin saber nada de contrapunto, acierte a dar 21 prohibiciones de las 54 posibles en 37 intentos es ¡menos de 2 en cien millones!

Si bien este argumento favorece el modelo matemático, lo importante otra vez no es atinarle a las ideas de Fux, Pa-

lestrina u otros tratadistas o practicantes del contrapunto. Lo importante es la simplicidad, la precisión y la capacidad del modelo para extenderse a otros ámbitos. Por ejemplo, en su tesis de maestría, Jens Hichert demostró que (además de las consonancias y disonancias del contrapunto clásico occidental) existen otras cinco formas de bipartir los intervalos en "consonancias y disonancias", de modo que el modelo funciona de manera idéntica. Una de esas biparticiones es: $I = \{2, 4, 5, 7, 9, 11\}$, $J = \{0, 1, 3, 6, 8, 10\}$, esto es, la llamada "dicotomía jonia". Obsérvese que los elementos de I son los intervalos de cualquier escala mayor tomados a partir de su primer tono.

Usando el modelo del contrapunto con la dicotomía jonia y si restringimos el *cantus firmus* y el *discanto* a permanecer en una escala, la escala que nos da la mayor libertad de elección de sucesores admisibles es $K^* = \{0, 3, 4, 7, 8, 9, 11\}$. Esta escala es casi el conjunto de las consonancias occidentales, y también es casi idéntica a una escala básica para las ragas hindúes: $\{0, 1, 3, 4, 7, 8, 9\}$. Resulta así que la música occidental y la hindú son antipodales, en el sentido de que intercambian los papeles de las consonancias y las escalas en sus composiciones, y se pone de manifiesto que la selección histórica del material musical en distintas culturas tiende a optimizar algunos parámetros abstractos.

Para finalizar, cabe mencionar que este modelo de contrapunto se ha verificado parcialmente a nivel neurológico. Los análisis con electroencefalogramas profundos hechos por un equipo liderado por el epilepsiólogo Heinz-Gregor Wieser y Guerino Mazzola han revelado que el cerebro responde fuertemente a la confrontación de las consonancias y las disonancias que resultan de aplicarle la polaridad. Además, han arrojado algo de luz sobre la interrelación de las emociones y la música: la conclusión es que la música por sí misma no produce emociones, sino que las recupera y las reactiva de entre aquellas presentes en la memoria.

Comentarios finales

Nuestro ejemplo final sobre la fructífera relación entre la matemática y la música pertenece a la teoría enumerativa, que constituye un acercamiento cuantitativo a la clasificación de composiciones locales vía acciones de grupos de permutaciones. El trabajo pionero en el área es de Harald Fripertinger. Esta teoría trata de contar las órbitas de acciones de grupos finitos en conjuntos finitos, los cuales representan objetos particulares especiales, es decir, acordes, particiones de conjuntos de clase de notas o de altura, motivos, sucesiones de 12 notas, etcétera. Los grupos consisten en transformaciones musicales interesantes, tales como la transposición y la inversión.

Un teorema de Fripertinger muestra, en particular, que el número de clases de los motivos de 72 elementos es de: $2\,230\,741\,522\,540\,743\,033\,415\,296\,821\,609\,381\,912 = 2.23\ldots\cdot 10^{36}$ lo cual indica que no hay escasez de motivos para ser introducidos en la composición musical. Visto de otra manera, a cada estrella de la Vía Láctea podríamos dedicarle una única melodía de más de un millardo de millardos de motivos distintos de 72 tonos.

La música pertenece a los humanos y no aparece ya como una revelación de las divinidades de cualquier índole. Esta renovación se debe también al inmenso arsenal de información y tecnología comunicativa donde la información se convierte en algo muy accesible y la carencia de precisión es de inmediato señalada. Esta situación da lugar a una nueva y fundamental manera de entender el conocimiento humano.

El conocimiento está actualizándose y extendiéndose constantemente, y en él navegamos y experimentamos con un espíritu de espacio-tiempo dinámico. Ahora tenemos nuevos paradigmas en musicología. Recordemos el experimento de Galileo acerca de la velocidad instantánea. Su aproximación al problema de la caída libre de los cuerpos fue esencialmente la de la observación y la medición, y no la elaboración de reflexiones abstractas y especulativas. Su punto clave fue el de pasar del encapsulamiento especulativo de Oresme y los científicos medievales a la accesibilidad del "hacer ciencia" con el método operacional: pensar haciendo. Este episodio tiene un análogo musicológico: la velocidad en física con tiempo musical... solamente que 500 años después.

Esto coloca a la física y la musicología en vías paralelas, donde hoy músicos activos y matemáticos, entre otros, están al borde de lo explícito y dejan las especulaciones irrelevantes donde corresponde. Se está abandonando las últimas retóricas vacías. La evolución galileana fue la respuesta a la supuesta profundidad del discurso retórico. Si consideramos los universos creados por el hombre, tales como la matemática y la música, podremos ver que tales universos internos no son menos complicados e incontrolables que la naturaleza externa. Una pieza de naturaleza incontrolable, con su riqueza creativa, con la increíble complejidad nacida de procesos combinatorios, estrategias de interpretación, estratificación semiótica, etcétera, como lo es el *Arte de la Fuga* de J. S. Bach, no es fundamentalmente diferente de una estrella de neutrones en el espacio interestelar. Estamos viviendo actualmente un cambio tan radical en la musicología como el que se experimentó en la física hace 500 años. ¡Sin duda es un momento maravilloso!

Octavio A. Agustín Aquino
Emilio Lluis Puebla
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.

Referencias bibliográficas

Aceff F. y E. Lluis-Puebla. 2006. "Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica", en *Sociedad Matemática Mexicana*. Publicaciones Electrónicas, Serie Divulgación, vol. 1.

———. 2007. "Matemática en la Matemática II, Música II, Naturaleza y Nuestro Cuerpo", en *Sociedad Matemática Mexicana*. Publicaciones Electrónicas, Serie Divulgación, vol. 2.

Agustín-Aquino, Octavio Alberto. 2009. *El Teorema de Contrapunto*. Tesis de maestría, UNAM, México.

———, J. du Plessis, E. Lluis-Puebla y M. Montiel. 2009. "Una Introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música", en *Sociedad Matemática Mexicana*. Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, vol. 10.

Fux, J. J. 1725. *Gradus ad Parnassum*. Facsímil. Moments of Music and Music Literature, Broude Brothers, Nueva York. 1966.

Hichert, J. 1993. *Verallgemeinung des Kontrapunkt-theorems für die Hierarchie aller starkenDichotomien in temperierter Stimmung*. Tesis de maestría, TU Ilmenau.

Jeppesen, K. 1992. *Counterpoint: The Polyphonic Vocal Style of Sixteenth Century*. Dover, Nueva York.

Lluis-Puebla, E. 1990. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica*. Addison Wesley Iberoamericana, México (2a ed." en *Sociedad Matemática Mexicana*. Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, vol. 5).

Mazzola, Guerino (contribuyentes: E. Lluis-Puebla *et al*.). 2002. *The Topos of Music*. BirkhäuserVerlag, Basilea.

Mazzola, Guerino. 2007. *La vérité du beau dans la Musique*. Delatour-IRCAM, París.

Montiel Hernández, M. 1999. *El denotador: su estructura, construcción y papel en la teoría matemática de la música*. Tesis de Maestría, UNAM, México.

Schönberg, A. 1974. *Tratado de armonía*. Trad. Ramón Barce. Real Musical, Madrid.

Imágenes

Pp. 68-69: Carlos Mérida, *En tono mayor*, 1981. P. 71: *Cielos luminosos*, 1941. P. 72: *Las tres doncellas*, 1953; *Un canto al libro sagrado*, 1978. P. 74: Rufino Tamayo, *Carnaval*, 1941. P. 75: Rufino Tamayo, *Los músicos*, 1934; p. 76: *Pintura académica*, 1935; p. 77: *Mandolinas y piñas*, 1930.

An invitation to the mathematical theory of music II: harmony and counterpoint

Palabras clave: armonía, contrapunto, matemáticas, música.

Key words: Harmony, Counterpoint, Mathematics, Music.

Resumen: En este artículo se ejemplifica cómo las matemáticas de más alto nivel se emplean para explicar los fenómenos musicales. Esboza la teoría de la armonía y el contrapunto.

Abstract: This article discusses how high level mathematics is used to explain musical phenomena. It outlines the theory of harmony and counterpoint.

Octavio A. Agustín Aquino estudió la licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Tecnológica de la Mixteca (Huajuapan de León, Oaxaca) y la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente es estudiante del Doctorado en Ciencias Matemáticas en la UNAM.

Emilio Lluis Puebla realizó sus estudios profesionales y de Maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su Doctorado en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional Autónoma de México desde hace más de treinta años. Ha sido profesor visitante en Canadá.

Recibido el 29 de septiembre de 2010, aceptado el 3 de octubre de 2010.