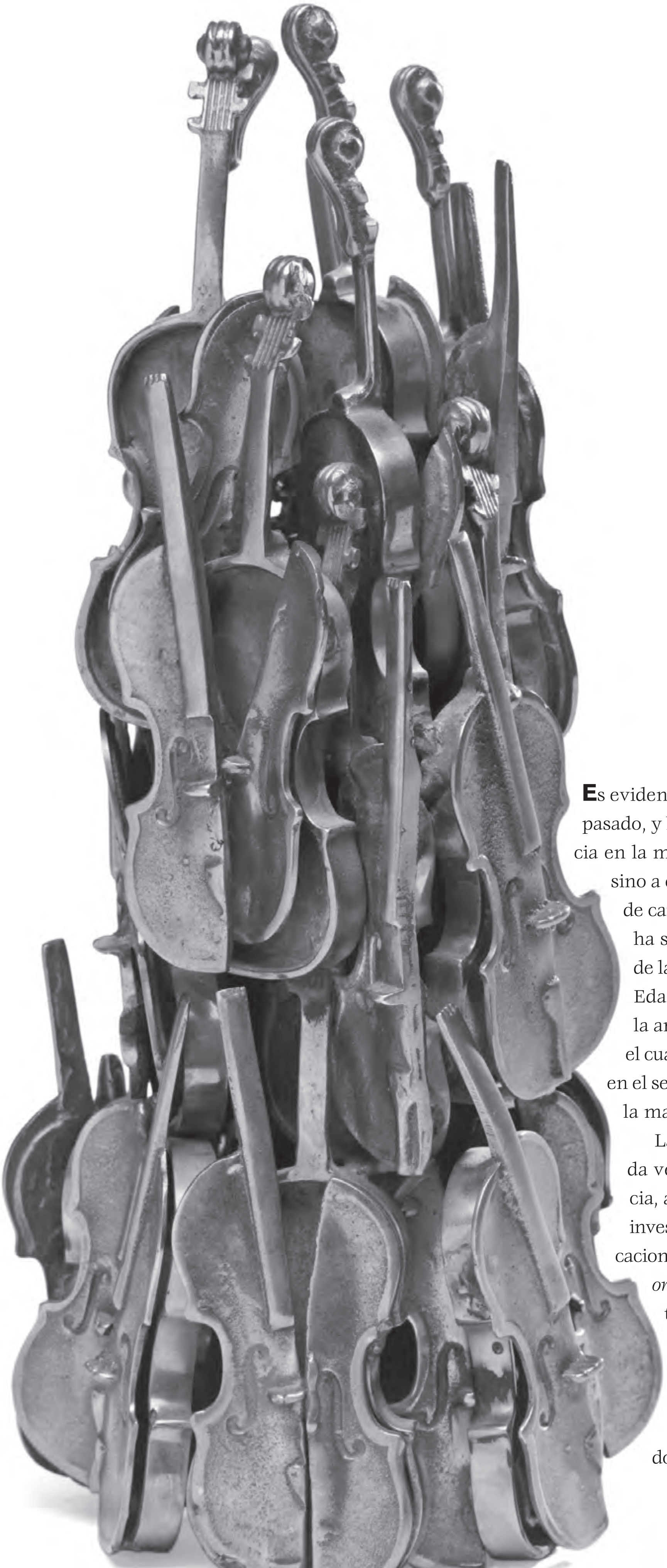


Es evidente que en las últimas dos décadas del siglo pasado, y hasta la fecha, ha habido una gran tendencia en la matemática a realizar no sólo aplicaciones, sino a emplear esta ciencia en una gran variedad de campos del conocimiento. El de la música no ha sido la excepción, aunque ya sucedía desde la época de Pitágoras. En Europa, durante la Edad Media, la música estaba agrupada con la aritmética, la geometría y la astronomía en el cuadrivio. La música no se consideraba un arte en el sentido moderno, sino una ciencia aliada con la matemática y la física (la acústica).

La teoría matemática de la música toma cada vez más un estatus prestigioso como ciencia, al grado de que la revista *Science* publicó la investigación de Dimitri Tymoczko sobre las aplicaciones de ciertos espacios topológicos, llamados *orbiedades*, a la música. A pesar de lo anterior, todavía es relativamente desconocida la aplicación de conceptos matemáticos a la musicología. Para empezar, veamos un poco lo que es la musicología y su estado pasado y presente. Su nombre es adoptado del francés *musicologie* para referirse al es-

Octavio A. Agustín Aquino y Emilio Lluis Puebla

Una invitación a la **teoría matemática** de la **música**

I. Introducción y teoría de la interpretación

tudio escolástico de la música. En alemán se le denomina *musikwissenschaft*, que literalmente significa "ciencia de la música". Hacer musicología no es fácil, pues la musicología tradicional carece de un marco conceptual estable. Una razón para explicar lo anterior es que en la musicología tradicional existe el típico problema del "encapsulamiento": se da un postulado encapsulado y se impide cualquier acceso a la (presunta) complejidad escondida. En las matemáticas, el acceso a la complejidad es posible y su realización da penetración en el concepto; en el encapsulamiento musicólogico, los intentos apuntan al vacío, generalmente mediante el rompimiento del flujo de la información por medio de un oscuro camino que pretende ser racional, ornamentado con metáforas. Así, transforma un posible concepto profundo en un concepto misterioso, es decir, transforma la ciencia en fábula.

Afortunadamente, el cubo topográfico —que explicaremos más adelante— ofrece una herramienta compleja que puede proporcionar profundidad del tipo con que se cuenta en matemáticas. Por lo tanto, la musicología debe tener, ante todo, libre acceso a la complejidad encapsulada: no es posible cultivar regiones del conocimiento privado e inaccesible.

Uno de los propósitos de la teoría matemática de la música es la de establecer dicho marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Sin embargo, no trataremos con la realidad completa de la música tal y como aparece en los contextos psicológicos, fisiológicos, sociales, religiosos o políticos. Veamos a continuación las actividades fundamentales relacionadas con la música y luego su fundamento en campos científicos de investigación establecidos.

La música, tradicionalmente, descansa en una conexión fuerte entre facticidad artística y reflexión intelectual. En muchas ciencias, y aún en las artes, tal entrelazamiento es un aspecto exótico, pero la musicología tiene que tratar con ambas, lo que la convierte en un caso muy especial. Las cuatro actividades relacionadas con la música son: producción, recepción, documentación y comunicación. Las podemos visualizar mentalmente en una figura de tetraedro que, por supuesto, no es la única clasificación posible; sin embargo, son lo suficientemente grandes como para mostrar la inmensa variedad de perspectivas cuando tratamos con la música. Cada actividad tiene una importancia de por sí, pero sólo cuando están juntas es posible comprender el fenómeno musical.

Los dominios fundamentales científicos requeridos para relacionar las actividades descritas incluyen la semiótica, la física, las matemáticas y la psicología. Definiremos provisio-

nalmente la música como un sistema de signos compuestos de formas complejas, que pueden ser representados por sonidos físicos y que de esta manera median entre contenidos mentales y psíquicos. Así, se recurre a la semiótica, pues para describir estas formas las matemáticas son el lenguaje adecuado. De igual manera, para representar dichas formas en el nivel físico, la física es indispensable, y para entender el contenido psíquico, la psicología es la ciencia requerida. De ninguna forma se pretende crear un esquema reduccionista de la realidad musical, sino ubicar la musicología en el mismo lugar que ocupa cualquier área de investigación, ya fuere de las ciencias naturales o de las humanidades, y acabar con el aura de misticismo y la fuerte recurrencia a la subjetividad que, en lo tocante a nuestro tema, se invocan con frecuencia. Tenemos una representación mediante el tetraedro imaginario anterior para visualizar en forma sinóptica la situación general donde puede contestarse la pregunta: ¿de qué se trata la música?

Es fundamental enfatizar que quien emplee métodos matemáticos, lógicos o computacionales en la música no tiene que ser docto en la filosofía de la música, pero sí es necesario que tenga una orientación dentro de la compleja ontología de este arte. Tanto en la música como en otras áreas del conocimiento se ha atestiguado cómo la precisión de las matemáticas, más un conocimiento deficiente acerca de la ontología del área de aplicación, provoca un dogmatismo; injustamente, se suele responsabilizar a las matemáticas por este problema, en lugar de cuestionar la falta de capacidad de hacer nexos de quien la aplica.

La teoría matemática de la música ofrece un modelo ontológico con un carácter flexible y abierto a modificaciones. Se intenta aportar un "sistema" de coordenadas para localizar problemas dentro del proceso de hacer musicología. Así, se propone desde un principio formular un sistema tridimensional que nos permita identificar dónde vive el concepto de la música, y qué se conoce como topografía de la música. Las coordenadas son: 1) realidad; 2) comunicación; y 3) semiosis. Veamos estas coordenadas con un poco más de detalle.

La realidad de la música es física, psicológica y mental. En el nivel físico se trata de un fenómeno acústico, en tanto que en su nivel mental se trata de la partitura como una abstracción. Como realidad psíquica, la música expresa los estados emocionales de sus creadores y afecta emocionalmente al escucha.

La comunicación de la música pasa por tres instancias: el nivel del creador, o lo que se conoce como la *poiesis*, seguido por el nivel neutral que es la obra en sí. Por último, el nivel estético del escucha es la instancia que percibe al ser interpretada una obra. Desde el momento

en que una obra musical es creada, la existencia del creador es fija; en cambio, el número de escuchas e intérpretes crece constantemente.

Como la música es uno de los sistemas no lingüísticos más desarrollados de signos, la semiosis juega un papel en la ubicación de su ontología. Se enfatiza que la música no se interpreta como un tipo de lenguaje; al contrario, hay diferencias significativas entre un sistema musical y uno lingüístico. Sin embargo, se describe la semiótica de la música desde la perspectiva de la semiología estructuralista de Roland Barthes como una generalización de la teoría lingüística de Ferdinand de Saussure. Para no desviarnos del propósito de este esbozo no ahondaremos en este interesante aspecto; sin embargo, mencionaremos que un sistema es semiótico si se articula según una estratificación fundamental de signos en su significante, significación y significado, donde el significante (los morfemas, o sea, la mínima forma significativa) llega a lo profundo del mensaje, el significado, por medio de las relaciones de la significación.

Todo lo anterior señala que una ubicación ontológica de la música puede interpretarse como un punto en un cubo tridimensional generado por los ejes de realidad, comunicación y semiosis; cada uno, a su vez, articulado en tres valores: 1) realidad: física, psíquica, mental; 2) comunicación: creador, obra, escucha; y 3) semiosis: significante, significación, significado.

De manera muy breve, así es como se obtiene el cubo topográfico de la ontología musical, que consiste en un conjunto de 33 = 27 posibles ubicaciones topográficas como puntos. No obstante, cualquier objeto general puede ubicarse en cualquier subconjunto del cubo, y los 27 puntos son sólo ubicaciones elementales a partir de las cuales se componen ontologías más complejas.

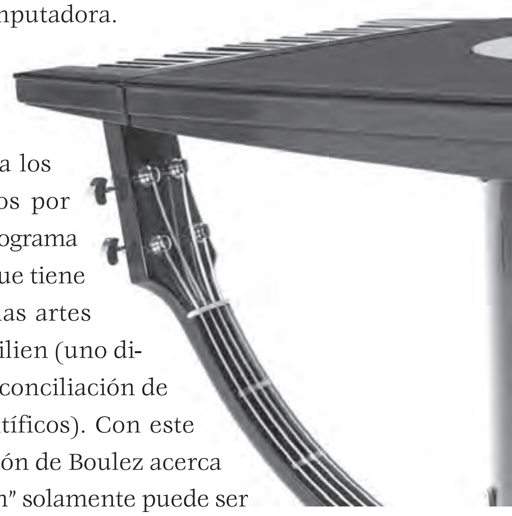
Mazzola resume contundentemente lo expuesto: “es equivocado creer que la música es un asunto especial de la ciencia porque se trata de objetos que apuntan a un estrato no mental de la realidad. La psicología, por ejemplo, estudia emociones; la física estudia partículas elementales. Todos estos objetos comparten aspectos que trascienden la conceptualización humana. Pero podemos concebirlos en un sistema cognoscitivo y modelar su comportamiento con un éxito impresionante para nuestra capacidad de comprensión. La música no es ni más ni menos accesible que la física, pero tenemos que establecer un sofisticado sistema de signos para poder aprehender su significado; el lenguaje común no es la herramienta para el espacio conceptual de la música”.

A finales de 2002 apareció publicado el libro de Guerino Mazzola, del cual el segundo autor de este artículo tiene el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, *The Topos of Music*, posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega *topos*, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática de *topos*, que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es: la música en su faceta como un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida a falta de un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de las matemáticas en torno a la musicología. La música está enraizada en realidades físicas, psicológicas y semióticas, pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La teoría matemática de la música está basada en las teorías de módulos y de categorías, en la topología algebraica y combinatoria, en la geometría algebraica y la teoría de las representaciones, entre otras. Su propósito es describir las estructuras musicales. La filosofía que subyace a ella se basa en la comprensión de los aspectos de la música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la física puede hacerlo respecto de los fenómenos propios del trabajo científico.

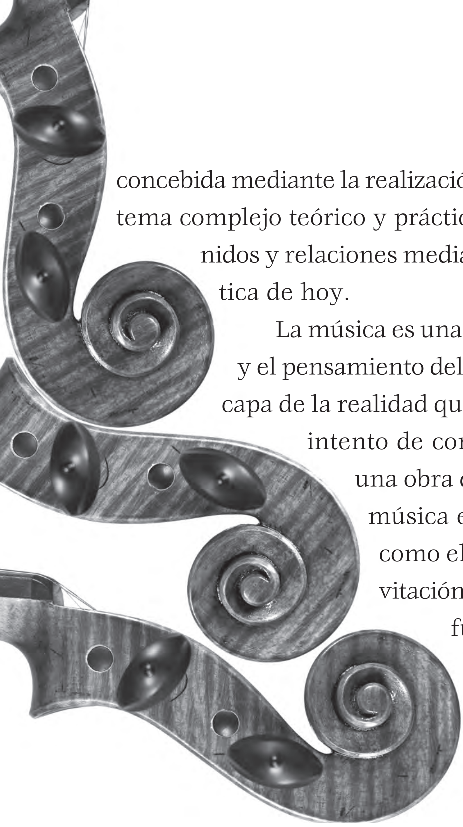
Esta teoría está basada en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto de las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas, y en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

En un magnífico artículo panorámico titulado “Towards Big Science”, Mazzola cita los elementos propuestos por Pierre Boulez en un programa de los años sesentas que tiene la intención de que las artes y la ciencia se reconcilien (uno diría que es más una reconciliación de los artistas y los científicos). Con este postulado, la invocación de Boulez acerca de la “real imaginación” solamente puede ser



concebida mediante la realización virtual (esencial) del sistema complejo teórico y práctico de la música, de sus sonidos y relaciones mediante la tecnología informática de hoy.

La música es una creación central de la vida y el pensamiento del ser humano: actúa en otra capa de la realidad que la física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas nucleares débiles y fuertes. Lo que es seguro es que las ambiciones son comparables y, por lo tanto, las herramientas deben serlo también.



Mazzola concuerda con Boulez en que "la música no puede degenerar o reducirse a una sección de las matemáticas: la música está fundamentalmente enraizada en las realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero requerimos más métodos sofisticados, además de los datos empíricos y estadísticos para describir formalmente las instancias musicales".

En los años ochentas, Mazzola observó que las estructuras musicales son también estructuras globales que se construyen pegando datos locales. Utilizó la selección de una cubierta tipo atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Los mapas se llaman "composiciones locales" y consisten (vagamente) en subconjuntos finitos K de módulos M sobre un anillo R. Estos mapas K se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías, se llaman composiciones globales. Estos son los conceptos estudiados en lo que ahora se conoce como la teoría matemática clásica de la música.

Mazzola menciona tres paradigmas mayores de las matemáticas y la musicología que se han desarrollado durante los 150 años en que su evolución ha sido paralela, y en que la presencia de las matemáticas sobre la música ha crecido. Estos son: las estructuras globales, las simetrías, y la filosofía de Yoneda. La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial. La segunda se refiere a las simetrías (y los fractales) que son utilizadas en la composición. Simetrías de este tipo aparecen también en la naturaleza y en las matemáticas, y desempeñan un papel crucial en la física moderna.

En cuanto a la tercera, la filosofía de Yoneda, ésta dice que para comprender un objeto hay que dar vueltas alrededor de él. Esto quiere decir: el entendimiento mediante el cambio de perspectiva. En matemáticas, el lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en álgebra homológica, en topología algebraica y en geometría algebraica, sólo por mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En música, la partitura es solamente su primera vista, y junto con todas sus interpretaciones se constituye su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista tanto para el intérprete como para la audiencia! Deja de lado la estéril competencia entre el arte y la ciencia (como si se tratase de juegos olímpicos).

En su artículo "Status Quo 2000" (que fue presentado en México durante una espléndida exposición plenaria ocurrida en Saltillo hace diez años), Mazzola explica por qué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en matemáticas más sofisticadas, como la teoría de *topos*.

Abrimos un paréntesis para mencionar un poco acerca de la teoría de *topos*. Siguiendo la inmejorable y bella introducción de Mac Lane-Moerdijk en su libro sobre gavillas en geometría y lógica, el aspecto más sobresaliente de la teoría de *topos* es el de unificar dos campos de las matemáticas que en apariencia son completamente distantes: por un lado la topología y la geometría algebraica, y por otro, la lógica y la teoría de conjuntos. Un *topos* puede considerarse como un "espacio generalizado" y a la vez como un "universo generalizado de conjuntos". Esta idea surgió en 1963, independientemente de los trabajos de Grothendieck (reformulación de la teoría de gavillas para geometría algebraica), de Lawvere (en su búsqueda por axiomatizar la categoría de conjuntos) y de Paul Cohen (en el uso del *forcing* para nuevos modelos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel).

Vagamente, una gavilla de grupos abelianos A sobre un espacio topológico X es una familia de grupos abelianos Ax, parametrizados por los puntos x en X de una manera *continua* adecuada. Para Grothendieck, la topología se convirtió en el estudio (la cohomología) de las gavillas, y las gavillas "situadas" en una topología de Grothendieck dada, forman un *topos*, llamado *topos* de Grothendieck. Las categorías (1945) y los funtores adjuntos (1957) entre ellas son el lenguaje para entender la teoría de *topos*. Una referencia para los conceptos de categoría, funtor, transformación natural y de adjunto izquierdo es el libro sobre álgebra homológica escrito por uno de los autores de este texto.

Las categorías, inicialmente una manera adecuada para formular sucesiones exactas, la "caza de elementos en diagramas" y la homología axiomática para la topología adquirieron vida independiente y se convirtieron en un objeto de estudio en sí mismas. Una muestra de ello es que, en 1963, Lawvere se propuso establecer un fundamento puramente categórico de todas las matemáticas, comenzando con una axiomatización apropiada de la categoría de conjuntos, reemplazando el concepto de pertenencia con el de composición de funciones.

Casi al mismo tiempo, Tierney observó que el trabajo de Grothendieck podía conducir a una axiomatización del estudio de gavillas. Después, trabajando juntos, lograron una axiomatización efectiva de las categorías de gavillas de conjuntos (y en particular de la categoría de conjuntos) por medio de una formulación adecuada de las propiedades del tipo de los conjuntos. Así definieron, de una manera elemental, sin suposiciones acerca de los conjuntos, el concepto de *topos* elemental. La definición original se transformó en una axiomatización de una hermosa y asombrosa simplicidad: un *topos* elemental es una categoría con límites finitos, objetos función YX (definidos como adjuntos) para cualesquiera dos conjuntos XY y un objeto potencia $P(X)$ para cada objeto X; por supuesto, se requiere que cumplan ciertos axiomas básicos (invitamos al lector a adentrarse en este maravilloso tema en el libro antes referido).

Mazzola propone una clasificación de objetos musicales, esto es, plantea que "existe un esquema algebraico cuyos puntos racionales representan ciertas clases de isomorfismo de composiciones globales. Clasificar implica la tarea de comprender totalmente un objeto. Éste es el lema de Yoneda en su completa implicación filosófica". El comprender una obra de arte es, a fin de cuentas, sintetizar todas sus perspectivas interpretativas.

Para los fines del programa de clasificación mazzoliano se creó el marco conceptual de la teoría de formas y denotadores, que a continuación describimos de manera sucinta e informal (para más detalles se puede consultar la obra referida y las tesis de maestría de Mariana Montiel y de Octavio Agustín Aquino). La teoría de formas y denotadores es "hilomórfica", en el sentido de que lo real es una conjunción de forma y sustancia. En otras palabras, cada punto debe cargar con su espacio para poder comprenderlo. Dicho de otra manera, una "forma" es como el molde don-

de se inyecta la sustancia de los puntos, donde los puntos corresponden a los "denotadores"; para que el denotador tenga algún significado, no basta con saber de qué está hecho, sino también qué forma tiene (!).

De manera un poco más precisa, una forma es una suerte de espacio generalizado, que puede ser de tipo simple (*Simple*), potencia (*Power*), límite (*Limit*), colímite (*Colimit*) o sinónimo (*Syn*). Éstas corresponden a las construcciones esenciales de las matemáticas: los espacios en sí (*Simple*) o sus múltiples interpretaciones sinónimas (*Syn*), los conjuntos potencias de dichos espacios (*Power*) o sus productos y coproductos (*Limit* y *Colimit*). Otro componente de una forma es su "identificador", que es una transformación natural I que va del funtor espacio F al funtor marco X; el identificador nos indica cómo debemos "ver" el denotador en el espacio de la forma.

Dicho esto, un denotador está integrado por la forma en que se encuentra, un módulo que es su "domicilio" y sus "coordenadas". El domicilio es un módulo M en el que debemos evaluar al funtor espacio F de la forma (es decir, el domicilio nos dice dónde debemos pararnos para ver el denotador) y las coordenadas son un elemento de $F(M)$. En otras palabras, señala el punto exacto que debemos ver.

Un aspecto de motivación fundamental para el desarrollo del concepto del denotador es la navegación, que esbozaremos brevemente. El conocimiento consiste en dos elementos fundamentales: información y organización mental. La información sola, sin un sistema de "coordenadas" que permita ubicarla y recogerla cuando sea necesario, no es conocimiento. Por este motivo, el paradigma de la información puramente digital, $Z2$, ($\{0,1\}$, "encendido" y "apagado", etcétera) nada tiene que ver con el conocimiento. Es así que se precisa de un sistema de conceptos que provea un método completo de "navegación" y que funcione en un espacio de conceptos exhaustivo. El problema estriba en cómo realizar una arquitectura tal de conceptos sin que se pierda rigor y confiabilidad. El denotador pretende ser la solución a este planteamiento.

El espacio del conocimiento enciclopédico (o "encicloespacio") se plantea como la actualización del concepto tradicional de enciclopedia (del griego *enkyklos paidea* = enseñanza en círculo), originalmente desarrollado por Diderot y D'Alembert en el Siglo de las Luces. Con el advenimiento de la computadora personal, esta actualización exige un dinamismo en la estructuración de datos en el espacio-tiempo, en contraposición al contexto estático de antes, así como una relación interactiva con esta estructuración de información. Asimismo, el orden alfabético de la enciclopedia clásica, adecuada para sus volúmenes de textos, se generaliza a la orientación que impone la navegación (de *navigare* y este de *navis* = nave, y *agere* = agitar, originalmente una actitud activa y no pasiva). En este sentido, el orden alfabético, adecuado para la enciclopedia de la sala, tiene que ser complementado por órdenes relacionados con presentaciones de datos que no son textos (espacios geométricos, colecciones de conjuntos, etcétera). La navegación tiene dos vertientes: navegación receptiva, más apegada a la enciclopedia clásica, en la que el encicloespacio no se modifica; y navegación productiva, donde hay interacción con el encicloespacio y se agrega conocimiento al ya existente.

Hay tres características de la enciclopedia que son, en realidad, principios de la tipología de formatos universales de datos: unidad, completez discursividad. A cada uno de estos principios le corresponde un aspecto en el denotador. La unidad en la creación de conceptos se realiza por medio de construcciones recursivas; la completez se logra por la ramificación extensiva de estas construcciones y la discursividad se tiene por la libre construcción y recombinación de denotadores. En contraposición con los sistemas comunes de bases de datos, en el trabajo con denotadores no hay ningún conjunto fijo de posibles construcciones.

Los denotadores permiten describir los objetos musicales y están concebidos de acuerdo con los criterios de navegación en el encicloespacio; por lo tanto, en su definición interviene la metodología de navegación, incluyendo la navegación matemática (la fundamentación filosófica de este concepto, así como su formalización, está fuera de los alcances de este artículo, por lo que se invita al lector a consultar el libro de Mazzola).

Teoría de la Interpretación

La parte más fascinante de la teoría matemática de la música la constituye la teoría de la interpretación musical (presentamos un conciso esbozo para dejar al lector una noción sobre la interpretación). Mazzola afirma en sus artículos que "la música ha sido estudiada desde el punto de vista de la estética y la psicofisiología". Él trabajó en desarrollar una teoría de la interpretación que describe las estructuras y los procesos que definen una interpretación, pues "sin las herramientas adecuadas, la teoría de la interpretación permanecerá como una rama de la literatura en el espíritu de la crítica musical". La posibilidad de exhibir variedades algebraicas gramaticales en la interpretación tiene consecuencias profundas para el problema de la clasificación

de las interpretaciones. Así, el criticismo comparativo se convierte en un campo preciso de investigación y no más en un sector de la literatura.

La interpretación es una transformación no trivial de la realidad mental de una partitura a la realidad física de una realización acústica y, en el límite, una realización gestual. Se crea un modelo de transformación de las estructuras locales y globales y se "modela la realidad mental" en la interpretación.

La teoría de la interpretación es un punto de inflexión en toda la teoría de *topos* en la música. La interpretación tiene que ver con la transformación de estructuras mentales en estructuras físicas. Esto es lo que tradicionalmente sucede en un concierto en el que los artistas están realizando una interpretación en los instrumentos físicos, incluyendo toda la riqueza de los recursos humanos de expresión a nivel gestual, emocional o estructural de los parámetros fisiológicos, sociales y físicos.

Evidentemente, una teoría global de la interpretación está fuera de nuestro alcance, más aún cuando los componentes principales ni siquiera han sido abordados en un nivel científico. Por ejemplo, no hay un entendimiento de la transformación emocional por la música. Se sabe algunos hechos muy elementales, por ejemplo, los relativos al impacto emocional de los intervalos del contrapunto en el cerebro emocional. También en el nivel de los factores clave en la calidad de una interpretación se sabe muy poco, por ejemplo, sobre el papel de los parámetros instrumentales en la comunicación de contenidos musicales. Peor aún: no hay ni siquiera una teoría de la interpretación comúnmente aceptada, es decir, una teoría que trate de la precisión ni una descripción general de lo que es una interpretación en su forma más elemental. Por ejemplo, la discusión del *tempo* aún no ha sido llevada a un punto de aceptación general de lo que éste puede ser, incluyendo un desacuerdo fundamental sobre sus ramificaciones jerárquicas.

Uno de estos debates pudo germinar en torno a la distinción entre el tiempo mental (simbólico, lógico o como desee llamarse) y el tiempo físico. Ingenuamente, el tiempo mental, tal como se encuentra en la notación de partitura, se ve como algo discreto que se codifica en los enteros o en algún submódulo de los números reales, mientras que el tiempo físico se parametriza por medio de la línea recta completa de los números reales. El tiempo métrico es en sí mismo infinitamente divisible: no hay un límite inferior para duraciones positivas mentales, pues nunca se ha previsto; el tiempo métrico es topológicamente denso, y no un subconjunto discreto del campo de los números reales.

Otros malentendidos que circulan en ambientes musicológicos mantienen que el *tempo* es una transformación localmente constante, es decir, una transformación escalón, al igual que las teorías de la Edad Media de la velocidad en el espíritu de Oresme. Él descomponía movimientos acelerados en una sucesión de movimientos uniformes. Quizá por todo lo anterior es que la interpretación es uno de los temas más complejos en musicología. Abarca todo tipo de consideraciones relativas a las tres realidades básicas: la física, la mental y la psicológica. Pero más allá de esta diversidad ontológica, la interpretación es de carácter estructural sofisticado e involucra la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

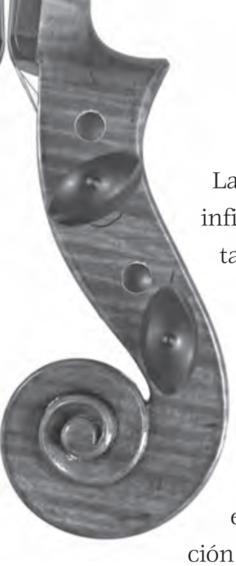
Es cierto que la investigación en interpretación se encuentra en su fase inicial, en particular con respecto del alto nivel de los artistas intérpretes. Pero ello no es una buena razón para abreviar el camino científico con el riesgo de la incomprensión de la belleza y la complejidad de la interpretación y caer en alguna grieta, como simplificar demasiado. Hay una dicotomía de realidades, comunicación y niveles semánticos entre una partitura y sus interpretaciones. Mazzola expone los hechos y sus consecuencias para una teoría de la interpretación en comparación con la teoría de la música mental. Interpretar es más que simplemente tocar un instrumento "como cae"; al respecto, los músicos siempre se refieren a una partitura interior. El concepto de una partitura se utiliza aquí en su sentido genérico, es decir, una partitura genérica es cualquier material escrito, imaginado o concebido para la ejecución de una composición musical. En la música clásica europea o japonesa, por ejemplo, una partitura se realiza como una estructura de denotador de forma más o menos compleja. El músico de jazz, por ejemplo, sigue las pautas de acción y reacción y las normas de acuerdo con esquemas del *blues*, la improvisación y los diccionarios individuales de elementos motívicos, rítmicos y armónicos.

Mazzola propone la siguiente definición informal pero fiable: "la interpretación es la realización física de una concepción mental de una partitura genérica". Así, dejamos el significado de "interpretación" abierta en su entendimiento común, pero incluimos, y esto es un tema central en el discurso posterior, la interpretación en el sentido técnico de interpretaciones de composiciones locales. También hacemos hincapié en el atributo genérico "física", que incluye la realización acústica, pero no excluye otros parámetros de la interpretación, tales como la dinámica gestual de un artista intérprete.

Sin embargo, como ya se mencionó, sí excluimos parámetros psíquicos de la interpretación, lo cual significa una interpretación estrictamente física, obsérvese que ésta subsume estratos medios tecnológicos intermedios como un subsistema especial de realización física.

Existe la necesidad *a priori* de la interpretación infinita. La argumentación se relaciona con el análisis infinito, debido a la filosofía de Yoneda y de su comunicación sobre el nivel de retórica de una interpretación expresiva. El problema fundamental aquí es muy común: ¿por qué se necesita de la interpretación infinita? Estamos hablando de interpretaciones o actuaciones reales en los conciertos de verdad. ¿Necesitamos conciertos, recitales y grabaciones, una y otra vez? ¿Por qué? ¿No podría llegar el momento en que se toquen todas las interpretaciones relevantes en un momento dado, y que todas las interpretaciones sucesivas estén condenadas a la existencia como variantes superfluas del arsenal de interpretaciones básicas?

Una composición musical, tal como está delineada en una partitura y en un denotador asociado, es aparentemente un objeto finito, de modo que sería una consecuencia lógica de esta finitud que el infinito no esté inscrito en una composición musical y en su interpretación. Por tanto, tenemos dos preguntas: ¿hay una infinidad sustancial en la variedad interpretativa de una partitura dada? Y, si éste es el caso, ¿hay una infinidad de interpretaciones asociadas?, y ¿por qué estas tienen un sentido para el oyente o para el artista?

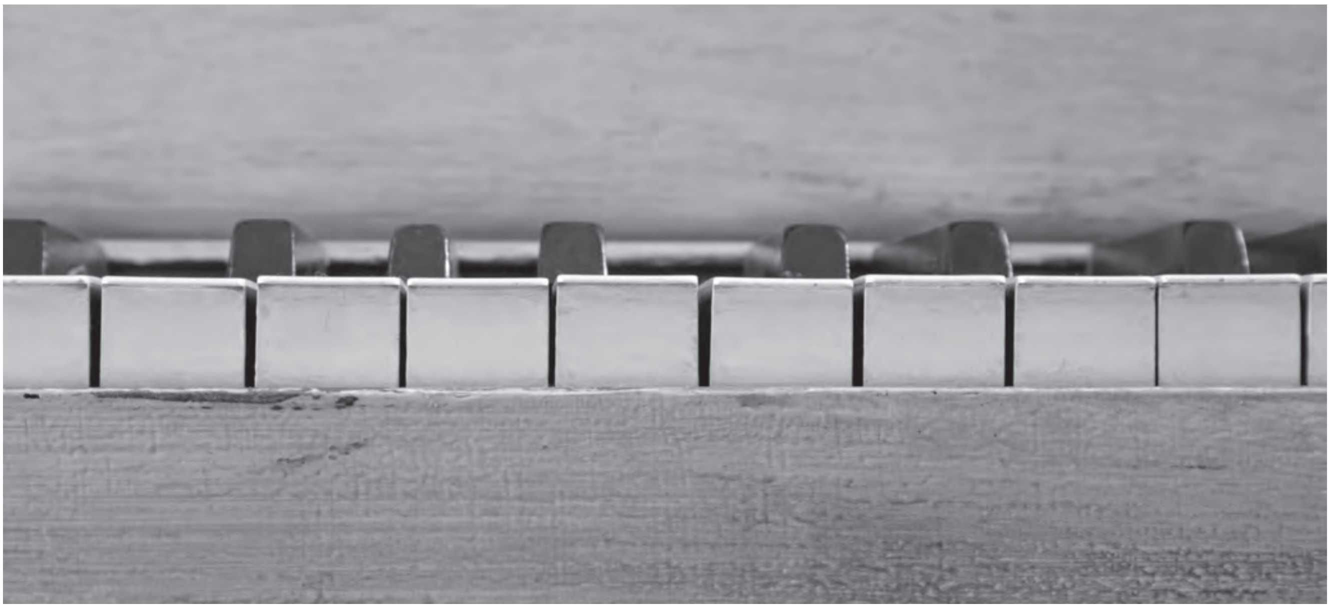


La primera pregunta es fácil de contestar: sí, hay una infinidad de interpretaciones de un determinado denotador de partitura finito. Mazzola lo demostró en la discusión sobre las interpretaciones iteradas. Se trata de una respuesta afirmativa en el nivel mental, y uno puede fácilmente agregar una infinidad de evaluaciones de dicha interpretación finita o infinita, por ejemplo en el nivel del ritmo, el análisis de los motivos y el armónico. Uno puede también enriquecer las posibilidades de ver una interpretación dada por la variación del domicilio, una técnica que evoca el lema de Yoneda, por supuesto, pero que también está muy concretamente desarrollada en el contexto de las topologías de armónicos.

El punto es que las categorías de "entendimiento" de una composición musical (finita) son de un carácter infinito en muchos aspectos, y no hay ninguna razón para clamar comprensión total de cualquier argumento de tipo finito. Así, la expresión del contenido mental se basa en un arsenal infinito: la interpretación transmite un mensaje infinito.

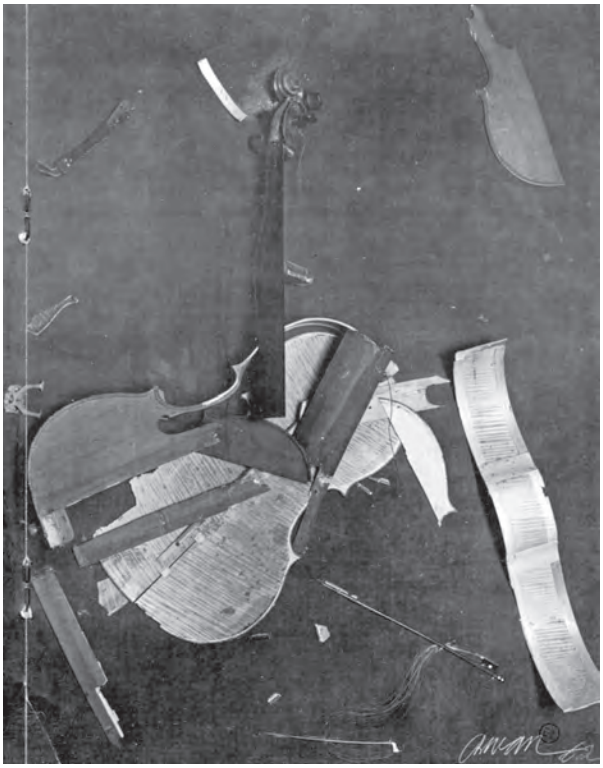
Pero el infinito en la interpretación también viene de un segundo punto de vista: la interpretación es inevitablemente un experimento en el entendimiento, en el avance de la comprensión. La realización de una pieza de música en los espacios físicos crea un punto de vista, un vuelo por un paisaje virtual que puede aportar una nueva comprensión de los actores involucrados, los puntos de vista que no se prevén sino que surgen de un ángulo visual particular de un "vuelo de interpretación". Tal experiencia es un experimento mental y, como tal, es una investigación creativa, no sólo una actividad reproductiva en aras de la coherencia social y la psicohigiene.

Al igual que con la labor analítica, la tarea de la interpretación también se compone de subtareas locales que constituyen los morfemas de las transformaciones de la interpretación. En una primera aproximación, una interpretación p podría verse como una transformación de conjuntos que asocia a cada elemento X de una composición local (en una partitura o de forma relacionada con una partitura) un evento físico, codificada por un elemento $x = p(X)$



en una segunda composición local cuyos parámetros se refieren a una forma de significación física.

La coherencia de esa transformación de la interpretación es, sin embargo, muy raramente un problema global. Por ejemplo, el *tempo* puede cambiar en forma instantánea por la indicación *istesso tempo*, obligando al artista a reiniciar desde el *tempo* inicial después de una deformación por de una secuencia en las indicaciones agógicas. De otra forma, las manos izquierda y derecha pueden seguir *tempos* separados, a excepción de algunos puntos de encuentro donde los inicios deben coincidir (en un *rubato* de Chopin, por ejemplo). En la música orquestal la afinación es una transformación del instrumento, a pesar de que toda la obra está consig-

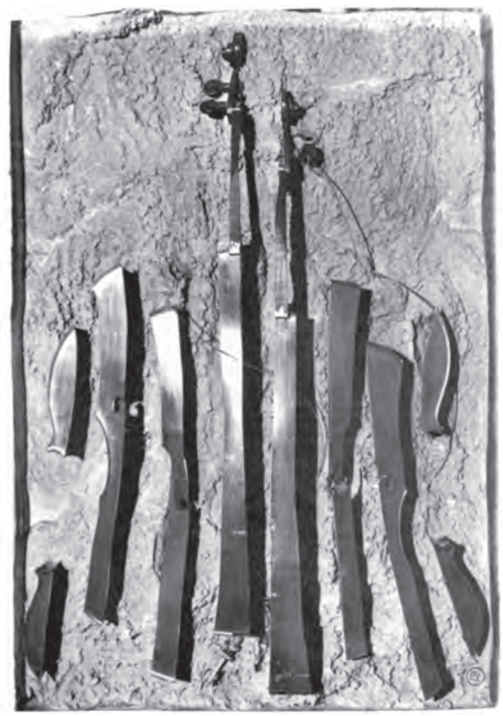


nada en una misma partitura orquestal. También puede ocurrir que la interpretación local de un adorno (un trino complicado, por ejemplo) es una transformación que moldea y actúa independientemente de las funciones que modelan los acontecimientos vecinos del ornamento. Por lo tanto, observamos una estructura global, un mosaico de funciones de mapas locales, muy parecidas a morfismos en composiciones globales.

Los campos vectoriales de la interpretación son el núcleo de la teoría de la interpretación. Lo que representa cada campo vectorial da lugar a una interpretación local determinada. A pesar de que los campos de interpretación no se reconocen como tales en la musicología y en la investigación tradicional de interpretaciones, aparecen de una manera totalmente natural en el contexto tradicional como *tempo*, entonación y dinámica. Mazzola da cuenta de este hecho básico. Toma una mirada más cercana a la articulación y otros parámetros de sonido (aparte del inicio, intensidad y volumen que se utilizan para el *tempo*, la entonación y la dinámica), revelando que los campos de interpretación deben verse dentro de un enfoque bastante general. Define una configuración formal y, a fin de proporcionar una comprensión más profunda del proceso de significación semiótica de campos de interpretación, revisa las filosofías de la interpretación de Theodor W. Adorno, Benjamin y Diana Raffman.

Los conceptos de *tempo*, entonación y dinámica son conceptos oscuros en la musicología tradicional, y lo que se hace es dar la precisión expresiva a la par de la negación de explicitud formal. Efectivamente, el *tempo* es uno de los factores más conocidos de la interpretación. Sin embargo, su conceptualización es oscura y está muy lejos de estandarizarse entre los músicos y científicos de la interpretación. En el libro de Mazzola se analizan las teorías más recientes, así como sus deficiencias. Se demuestra que el tiempo es un concepto local cargado de una gran cantidad de semántica, y se procede al filtrado de la semántica de la estructura de datos. Después de eso, se da una definición precisa del *tempo* como un campo de interpretación de una sola dimensión en el eje del tiempo. Cualquiera que sea la expresión concreta, el *tempo* se refiere a la transformación de los inicios mentales en inicios físicos.

En tal situación, los morfismos tangentes se extienden a morfismos diferenciables con derivadas continuas positivas en cada punto. Las curvas del *tempo* asociadas a tales morfismos diferenciables son las funciones continuas positivas cuyos valores son las derivadas inversas en todos los puntos en un intervalo abierto que contiene los puntos. Se puede proceder de manera completamente análoga para la



entonación y la dinámica, y representarlos como campos de interpretación unidimensionales con valores de frecuencia e intensidad de los sonidos físicos. Es curioso notar que es mucho más aceptado por los musicólogos el que la dinámica es un fenómeno continuo cuando se compara con el *tempo* y la entonación (invitamos al lector a adentrarse en las diversas áreas de estudio como la teoría de la interpretación inversa, las topologías para el ritmo y motivos, la semántica expresiva y otros en el libro de Mazzola).

Los campos vectoriales del *tempo*, la entonación y la dinámica son casos especiales de una sola dimensión de los campos de interpretación. También se trata el ámbito de la interpretación, *a priori*, de dos dimensiones del tempo y articulación, y se establece una definición rigurosa del concepto de campo de interpretación.

Adorno y Benjamin han asociado la adecuación interpretativa con una actividad de "precisión infinitesimal". Se ve que su lenguaje sugiere el lenguaje de campos vectoriales, aunque no aparece de forma explícita en estos autores. Así, la formalización matemática es una herramienta indispensable para acceder a la "inefabilidad" que conlleva la sutileza infinitesimal de las interpretaciones musicales.

Octavio A. Agustín Aquino
Emilio Lluis Puebla
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aceff, F. y E. Lluis-Puebla. 2006. "Matemática en la matemática, música, medicina y aeronáutica", en Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, Serie Divulgación, vol. 1, México.

________. 2007. "Matemática en la matemática II, música II, naturaleza y nuestro cuerpo", en Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, Serie Divulgación, vol. 2, México.

Agustín-Aquino, Octavio Alberto. 2009. El Teorema de Contrapunto, tesis de maestría, UNAM, México.

________, J. du Plessis, E. Lluis-Puebla y M. Montiel. 2009. "Una introducción a la Teoría de grupos con aplicaciones en la teoría matemática de la música", en Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, vol. 10, México.

Fux, J. J. 1966. Gradus ad Parnassum. Facsímil de la edición vienesa de 1725, Monuments of Music and Music Literature. Broude Brothers, Nueva York.

Hichert, J. 1993. Verallgemeinung des Kontrapunkttheorems für die Hierarchie aller starken Dichotomien in temperierter Stimmung, Tesis de maestría, TU Ilmenau.

Jeppesen, K. 1992. Counterpoint: The Polyphonic Vocal Style of Sixteenth Century. Dover, Nueva York.

Lluis-Puebla, E. 1990. Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica. Addison Wesley Iberoamericana, México.

Lluis-Puebla, E. 2005. "Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica", 2a. Ed. en Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, vol. 5, México.

Mazzola, Guerino. 2007. La vérité du beau dans la Musique, Delatour-IRCAM, París.

Montiel Hernández, M. 1999. El denotador: su estructura, construcción y papel en la teoría matemática de la música. Tesis de Maestría, UNAM, México.

________, E. Lluis-Puebla et al. 2002. The Topos of Music, Birkhäuser Verlag, Basilea.

Schönberg, A. 1974. Tratado de armonía. Traducción de Ramón Barce, Real Musical, Madrid.

IMÁGENES

Pp. 60-61: Fernandez Arman, violines; P. 62: Fernandez Arman, OUDE AIDE; Bill Ooms, escultura en cinta. P. 63: mesa de tambores. P. 64: Murat Ufuk Guler, rollos; violoncello. P. 65: Fernandez Arman, Desafectos, 1971. P. 66: Fernandez Arman, Ira de mandolina, 1961. P. 67: Murat Ufuk Guler, rollos; Fernandez Arman, Violon coupé II-Hommage à Picasso, 2004. P. 68: Fernandez Arman, Violong, 1973. P. 69: Murat Ufuk Guler, rollos; Richard Abplanalp, teclas de piano. P. 70: Fernandez Arman, violoncello, 1973. P. 71: silbato de madera.

AN INVITATION TO THE MATHEMATICAL THEORY OF MUSIC

Palabras clave: armonía, contrapunto, matemática, música, semiótica.

Key words: harmony, counterpoint, mathematics, music, semiotics.

Resumen: En este artículo se ejemplifica cómo la matemática de más alto nivel se emplean para explicar los fenómenos musicales. Se esboza la teoría de la interpretación así como la armonía y el contrapunto.

Abstract: This article examines how advanced mathematics is used to explain musical phenomena. It outlines a theory of interpretation as well as harmony and counterpoint.

Octavio A. Agustín Aquino estudió la licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Tecnológica de la Mixteca (Huajuapan de León, Oaxaca) y la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente es estudiante del doctorado en Ciencias Matemáticas en la UNAM.

Emilio Lluis Puebla realizó sus estudios profesionales y de maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su doctorado en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional Autónoma de México desde hace más de treinta años. Su trabajo matemático ha quedado establecido en sus artículos de investigación y divulgación que ha publicado sobre la K-Teoría Algebraica y la Cohomología de Grupos en las más prestigiadas revistas nacionales e internacionales. Ha sido Profesor visitante en Canadá.

Recibido el 29 de septiembre de 2010, aceptado el 25 de octubre de 2010.