¿3 = 3?

lo que un número es o no es

Durante finales del siglo XIX y principios del XX se discutía apasionadamente sobre algunos de los conceptos más profundos de los fundamentos de la matemática. Frege, un defensor del logicismo, aquella corriente que antepone la lógica como fundamento de la matemática, defendió una concepción según la cual los objetos de las matemáticas son abstractos, eternos pero independientes de nuestra mente. Según Frege, el acceso a los objetos matemáticos, tales como los números y las colecciones de números, se podía hacer únicamente mediante la lógica —es lo que se denomina platonicismo o realismo. Así, por ejemplo, el cero puede ser reconocido formalmente como el conjunto de todos aquellos individuos que no son idénticos a sí mismos. Esto significa que para Frege el concepto de identidad es un concepto lógico. Sin embargo, su perspectiva logicista fracasó debido a la paradoja de las clases que no son miembros de sí mismas, la famosa paradoja de Russell, aquella en donde el barbero sólo puede cortar la barba a los que no pueden cortársela a sí mismos, por lo que, ¿quien corta entonces la barba del barbero?

Para Frege era importante encontrar la manera de definir con precisión lo que un número es o no es, ya que de ello se desprendía la respuesta a si el número 17 es igual a Julio César (17 = Julio César). Ciertamente, una comparación de este tipo pudiera parecer extraña e incomprensible al lector, pero para Frege era un asunto importante.

Sí existen las preguntas absurdas

Por el contrario, para Benecerraf, uno de los pioneros de la corriente estructuralista, esta pregunta no es importante ni tiene sentido. En su artículo "Lo que los números no pueden ser", Benecerraf comienza con una parodia de dos personajes, Ernie y Johnny, dos niños hijos de logicistas, quienes aprenden aritmética mediante teorías de conjuntos. Uno de ellos lo hace a la manera de John von Neumann y el otro a la manera de Ernest Zermelo, autores que definen de manera distinta la construcción de los números naturales mediante conjuntos.

Zermelo construye los números de la siguiente forma: el uno es el conjunto que contiene el vacío, el dos es el conjunto que contiene el vacío y el conjunto que contiene el vacío, y así sucesivamente. Es decir,

$$1 = \{\square\},\ 2 = \{\square\ ..\ \{\square\}\},\ 3 = \{\square\ ..\ \{\square\},\ \{\square, \{\square\}\}\}\ \ldots$$

Mientras que Neumann los construye de la siguiente manera: el uno es el conjunto que contiene el vacío, pero el

dos es el que contiene el conjunto que contiene el conjunto vacío, y así sucesivamente. Es decir,

$1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\{\emptyset\}\},\ 3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}\ \ldots$

Esto trae consigo un problema, que si los números son objetos, entonces deberían poderse identificar plenamente mediante sus propiedades. Sin embargo, una propiedad en particular tiene sentido en uno de los sistemas constructivistas, el de pertenencia para el modelo de Neumann. En éste puede decirse que el 3 está contenido en el 5 ya que el conjunto que define el 5 contiene a su vez el conjunto que contiene el 4 y que representa el 4 quien a su vez contiene el que contiene el 3 y que representa el 3. Pero esto no sucede en el modelo constructivista de Zermelo, aun cuando el 3 de Neumann debería ser el mismo que el de Zermelo. No obstante, al identificar que un 3 en un modelo es distinto al 3 del otro se llega a la contradictoria conclusión de que 3 no es igual a 3, al menos no es ése 3 igual al otro 3.

¿Cuál 3 es el bueno? ¿Puede haber un 3 mejor que otro? ¿Qué modelo o sistema constructivo es el adecuado? Ambos por supuesto, pues los dos generan a los números naturales. De hecho, también se pueden construir a la manera de Frege, con clases; a la manera de Russell, con tipos; a la manera de Peano, con axiomas; o a la manera de cualquier otro procedimiento recursivo o inductivo que genere o defina las propiedades de la estructura de los números. En ese caso es difícil sostener que el 3 es un objeto cuando por sus propiedades no se puede identificar a sí mismo, esto a pesar de que en ambos casos la aplicabilidad de estos números queda intacta, ya que sirven también para contar o medir como cualquier otro conjunto de números naturales construidos. De todo ello puede concluirse que contar es realmente correlacionar posiciones en una estructura. Es de esta manera como surge el estructuralismo.

Así, para Benecerraf y los estructuralistas la importancia de los números son su estructura y no los números en sí. Es decir, los números, ya sea como símbolos o como objetos, desempeñan un papel dentro de una estructura, de tal manera que no importa lo que se coloque en su lugar; cualquier cosa que cumpla el papel del 3 es y será el número 3, sin importar lo que sea en sí.

Los números en el uso del lenguaje natural

En el uso cotidiano del lenguaje hay expresiones de la forma: "los leones en el zoológico son 17". Al estilo de Kant habría que identificar el predicado del enunciado y decidir si se trata de un juicio sintético o analítico, es decir que el sujeto "los leones en el zoológico" contenga la información del predicado "son 17". En este ejemplo es más o menos claro que se trata de un enunciado sintético, es decir, que mediante el análisis del sujeto no puede inferirse la propiedad o información que manifiesta el predicado.

Sin embargo, hay enunciados como: "existen 17 leones en el zoológico", en donde no es claro cuál es el predicado y cuál el sujeto. Frege le daría un trato de extensión del concepto en el que definiría la agrupación de las clases con la misma extensión, es decir, si la extensión del número de leones cae bajo el concepto de 17 entonces 17 es el número de leones y todo lo que caiga bajo el mismo concepto tendría el mismo número que el número de leones. Por el contrario, para Benecerraf no tiene sentido hablar de predicados en el sentido lingüístico de Frege. Para él no existe la "forma correcta" de tratar los números, pues éstos son entidades abstractas que se representan mediante cualquier sistema que ejemplifique la estructura. Por lo tanto, los números no son objetos, ni siquiera son conjuntos, y no tiene sentido hablar de la naturaleza de un número, sino más bien de la estructura de los números y sus relaciones.

Así, entidad, cosa u objeto son palabras que desempeñan un papel, por lo que lo importante es la estructura. De igual manera, cualquier sistema que genere los números, sea el de Frege, Russell, Neumann, Zermelo o Peano, es un sistema que cumple y ejemplifica la estructura. Los números son irrelevantes por sí solos en cuanto no permiten distinguirse de un sistema a otro, por lo que, de alguna forma esto dice, entre líneas, que estos sistemas son equivalentes en tanto que ejemplifican o son modelos de una misma estructura. La pregunta de Frege tampoco tiene sentido entonces, ya que la comparación es irrelevante en tanto que para un estructuralista no importa si el número 3 es igual a Julio César, y lo sea o no para él, es indistinto mientras desempeñe el papel de 3.

La identidad es una relación que debe enmarcarse dentro de una teoría, de tal forma que se esté hablando de cosas de naturaleza tal, que puedan compararse y decidirse si es igual o no a otra. Comparar a Julio César con un número es sin duda un asunto de filósofos que tiene todo sentido y validez en tanto da origen a una discusión y a argumentos desde una y otra posición. Para un matemático estructuralista basta estar en la tercera posición de una progresión para ser el número 3. Y para un matemát fi-

Héctor Zenil Chávez
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.

IMÁGENES
The Hulton Getty Picture Collection. P. 56: Las *Three Degrees*, 1974; p. 58: Integrantes de los *Trail Riders* durante una caminata por las Rocallosas canadienses, 1926; Protección de la cámara blindada de la Cleveland Trust Company en Ohio, 1924 (durante la primera época de Al Capone y *Bugs* Moran); p. 59: parte del elenco de *On With the Dance*, London Palladium, 1921.