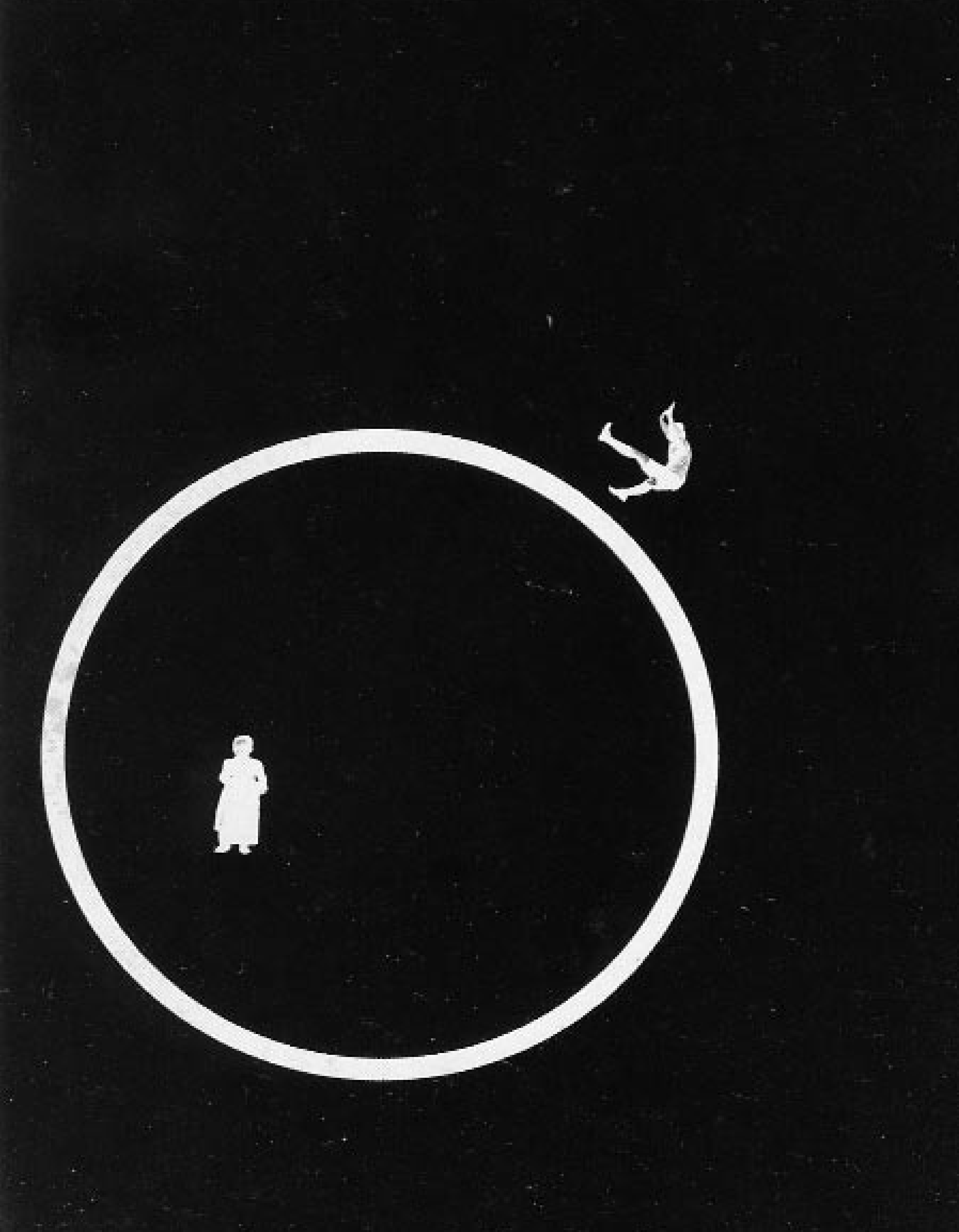
Un área cuadrada *próxima a* π

En la antigüedad los matemáticos pudieron calcular con exactitud las áreas de las figuras geométricas planas limitadas por líneas rectas; pero tropezaron con dificultades cuando se trataba del círculo. Para esto era indispensable conocer, aunque fuera de manera imprecisa, el valor de π. En toda la historia a π se le han asignado aproximaciones que ocupan un espectro de valores numéricos desde 2.828 hasta 3.16. Por ser lo más conveniente y apegado a un criterio de metrología, respondiendo a una necesidad pragmática, se utiliza por lo general la aproximación 3.1416 (con redondeo a diezmilésimas).

El método más directo para intentar el cálculo de π, que es el cociente proveniente de la división entre la circunferencia o perímetro del círculo con su diámetro, es hacerlo como a continuación se indica, todo esto resuelto con la mayor meticulosidad y exactitud posibles. Se extiende una cuerda que sea igual a la circunferencia y se compara con otra cuerda que tenga la longitud del diámetro, de este modo se observará que la circunferencia es tres tantos y un trocito de cuerda más larga que la longitud del diámetro (figura 1). Esa fracción, que equivale aproximadamente a $^1/_7$ de una de las tres partes enteras en que cabe el diámetro en la extensión de la circunferencia, es lo que convierte a π en el número irracional —adicionando a esto la peculiaridad de ser también trascendente (la explicación de este concepto se da más adelante)— que más quebraderos de cabeza ha ocasionado en toda la historia de las matemáticas. Se pueden aplicar otros métodos, como por ejemplo inscribiendo polígonos regulares (con el mayor número de lados que sea posible dibujar), dentro de un círculo o por medio de cálculos teóricos (figura 2); todo esto con la pretensión de poder encontrar el valor real de π. No obstante a pesar de estos intentos, esta constante geométrica será siempre una aproximación inexacta, aunque muy cercana a su valor real. El cálculo moderno del número π proviene de un procedimiento infinitesimal descubierto por el escocés James Gregory en 1671, mismo que se relaciona con el límite de una serie infinita. De aquí que la versión más aceptada de

Conrado Ruiz Hernández



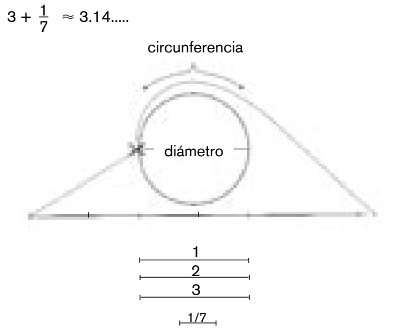


Figura 1. Procedimiento empírico para la obtención del número π utilizando cuerdas.

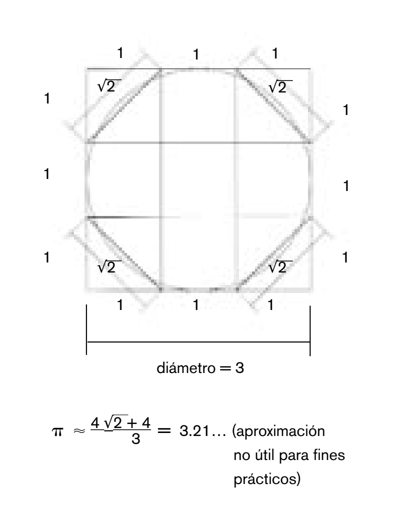


Figura 2. Cálculo aproximado del número π utilizando polígonos; en este caso se trata de un octágono irregular parcialmente inscrito y circunscrito con respecto al círculo.

este número corresponda a la secuencia: 3.141592653589…; guarismo que tiene un sinnúmero de decimales. La ecuación que se aplica es:

$$\pi = 4\ (1 - {}^{1}\!/_{3} + {}^{1}\!/_{5} - {}^{1}\!/_{7} + \ldots).$$

Para este cálculo infinitesimal se requiere una serie de al menos mil fracciones, nótese la alternancia de resta y suma. Ya entrado el siglo XIX se calcularon los primeros quinientos decimales exactos de esta aproximación considerada para π; aunque los mismos pueden continuarse hasta ocupar todo el universo, haciendo falta todavía un mayor espacio (en la actualidad el cifrado de este número, obtenido con ordenadores para cálculo masivo, rebasa los dos millones de decimales). Esta peculiaridad no sólo es el inconveniente de los números irracionales, los decimales periódicos (clasificados como racionales), poseen también una fracción decimal infinita. En éstos hay un número o un grupo de ellos que se repite un sinfín de veces (por ejemplo: 0.33333… o 0.142857142857…).

Cabe mencionar que en cualquiera de las aproximaciones de π utilizada, pudiendo ser para cálculos astronómicos como en mediciones que ocurren en la pequeñez de un átomo, a π siempre se le hace un ajuste: ya sea truncando casi la totalidad del cifrado decimal o por redondeo (normalmente a diezmilésimas). No existe un solo uso práctico de este número que se haga con el guarismo completo, ya que el mismo, en su connotación irracional, es inconmensurable (esto significa que no guarda una relación o proporción exacta con otra magnitud, por lo cual, es inmedible) e imposible de escribirse completo. Esto ocasiona, que si bien el área circular íntegra se contiene dentro de la circunferencia, el cálculo de la misma ($\pi \times$ radio^2) siempre será un resultado aproximado; situación que es aceptada por los usuarios de las matemáticas sin la menor preocupación.

A nivel de su enseñanza se privilegia la memorización de una de las aproximaciones con que se maneja este número (3.14 o 3.1416). Por lo general, los alumnos que concluyen la educación básica, desconocen el procedimiento o algoritmo que da lugar a este número (este dato es referido al caso mexicano, aunque puede ser interesante hacer la indagación sobre lo que sucede con alumnos de otros países). Esto se debe principalmente a las complicaciones didácticas que contiene, así como también a la exclusión que se da al tratamiento de los números irracionales en el currículo elemental de las matemáticas. La habilidad principal que se fomenta, en el caso de tener que hacer frente a un número irracional, es saber que se le puede “racionalizar” truncándolo o redondeándolo. Es lamentable el desaprovechamiento que se hace del número π, al menos para dar una noción introductoria, sobre lo que son los números irracionales (aquellos que tienen una fracción decimal interminable y desordenada).

Cuadratura y “triangulatura” del círculo

Pitágoras, en el siglo VI a.C., imprimió una mayor audacia intelectual y exigencia tecnológica al servicio que se esperaba de las matemáticas. El teorema que lleva su nombre, mismo que de manera primitiva era aplicado desde antes por los babilonios y los egipcios (en la construcción de buena parte de las pirámides por ellos edificadas, la pendiente de las mismas se resuelve con la aplicación rudimentaria de ese principio) es considerado como la piedra angular que propició el desarrollo avanzado de la geometría y de los procedimientos de cálculo. Posterior a Pitágoras otro filósofo griego, Hipócrates de Quíos, en el siglo V a.C., se destacó por estudiar con gran profundidad la geometría del círculo. Este autor fue quien formuló el problema de encontrar la cuadratura del círculo. La cuestión básicamente consiste en construir un círculo y un cuadrado que posean áreas del mismo tamaño. Desde su planteamiento original se estableció la condición de que la solución contemplara el empleo de regla y compás; quizás debido a que eran los instrumentos más confiables de que disponían los matemáticos en la antigüedad. Conforme la solución del problema se demoraba con el transcurrir de los siglos (más de dos mil años), surgió un número importante de críticos que cuestionaban la restricción que obligaba el empleo ineludible de la regla y el compás. Sin embargo, de todas maneras no se ofrecía un método alternativo que resolviera en definitiva el problema. Asimismo, la implicación de ideas metafísicas (la manera en que se imaginaban algunos pensadores como son o deben ser los fenómenos) en que efectivamente incurrieron algunos de estos filósofos, particularmente en la admiración que le profesaban a la figura del círculo, daba pie a sospechar que tal circunstancia podía pertenecer a un marco referencial arcaico o de plano no científico.

Al igual que lo mencionado para el teorema que formalizó Pitágoras, los egipcios hicieron con anterioridad un intento por hacer coincidentes el área de un círculo con la de un cuadrado. Hace cerca de cuatro mil años que el escriba egipcio Ahmes dejó asentado en el detalle número 36 de un papiro descubierto a mediados del siglo XIX (es el documento matemático más antiguo existente; lo encontró en un bazar de Egipto un comerciante inglés de apellido Rhind), que tal igualdad se puede lograr cuando un cuadrado tenga lados que sean $^{8}/_{9}$ del diámetro de un círculo. Esto da lugar a la aproximación de π más excedida (dos centésimas de más) de todas las existentes: $3 + {}^{13}/_{81}$ (es decir 3.16...); sin embargo, considerando los recursos de cálculo y medición que tenían a su alcance los matemáticos egipcios, el intento realizado representó un trabajo laborioso y de gran mérito. Este desarrollo respondió probablemente a la resolución de una necesidad técnica relacionada con el almacenamiento de granos y la cubicación de materiales de relleno o soporte (como por ejemplo arena y grava) requeridos en edificaciones; en particular para encontrar equivalencias entre volúmenes cúbicos, piramidales y cilíndricos.

Se cuenta con evidencia suficiente que permite entrever que Arquímedes, abordó de manera tangencial el problema de encontrarle la cuadratura al círculo. Primeramente calculó las aproximaciones más exactas del número π que pudieron tenerse en

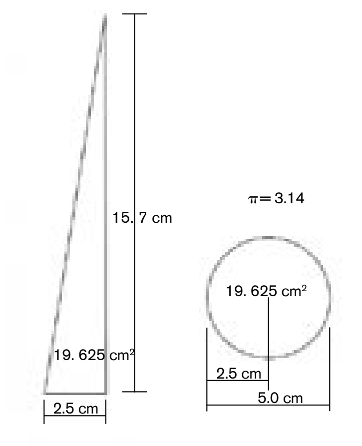


Figura 3 — Demostración esquemática de la igualación de áreas del triángulo rectángulo y el círculo (basado en un planteamiento de Arquímedes). Los valores son a escala.

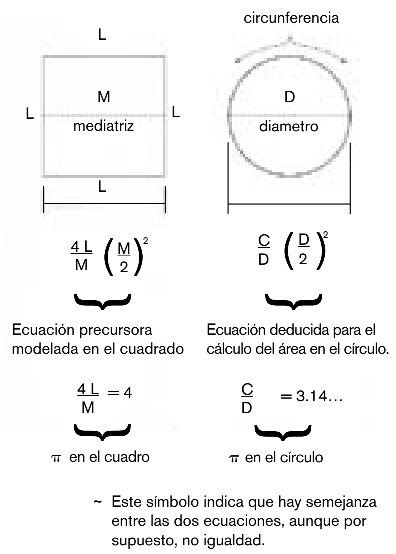


Figura 4 — Conjetura acerca de que la ecuación para el cálculo del área circular; se dedujo teniendo como modelo a una del cuadrado (esta última verdaderamente extravagante).

el mundo antiguo: $3 + {}^{10}/_{71}$ (es decir 3.1408...) y $3 + {}^{1}/_{7}$ (de igual manera 3.142857...); ambas provenientes de los perímetros de dos polígonos regulares, mismos que se construyen con la mayor semejanza posible a la longitud de la circunferencia, el primero de ellos inscrito y el segundo circunscrito. La primera de las aproximaciones mencionadas configura un valor numérico irracional y la segunda un valor numérico racional infinito: 3.142857 (toda la fracción decimal es un periodo, mismo que se repite un sinfín de veces). Cada una de estas dos aproximaciones mencionadas representa los límites entre los que se encuentra el valor verdadero de este número (3.14159265...).

Tiempo después este científico notable formalizó de manera axiomática, o si se prefiere esquemática, la demostración de la "triangulatura" del círculo. Esto se establece del modo siguiente: un triángulo rectángulo posee la misma área de un círculo cuando el primero tiene como base una longitud igual al radio del segundo y como altura toda la extensión de la circunferencia del mismo. Un ejemplo sencillo se puede realizar de esta manera: diámetro = 5 cm; radio = 2.5 cm; y π = 3.14 (la aproximación de este número más utilizada para fines escolares). (Área del círculo = 3.14 × (2.5 cm)^2 = 19.625 cm^2. Área del triángulo rectángulo = (2.5 cm × 15.7 cm)/2 = 19.625 cm^2. El valor 15.7 cm es la longitud calculada para la circunferencia (3.14 × 5 cm) que se toma como la altura del triángulo rectángulo. Nótese la sencillez de esta solución, sobre todo cuando no se cuestiona la elección de una aproximación al número π que convenga para la consecución del fin pretendido, lo que comúnmente se acepta cuando se realizan cálculos semejantes. Haciendo una conjetura, si es que Arquímedes efectivamente buscó la solución de la cuadratura, con la demostración de la "triangulatura" del círculo dio por terminada su pesquisa sobre esta cuestión (figura 3).

Con estos trabajos realizados por Arquímedes, se ilustra que en el abordaje de este problema ancestral las cuadraturas propuestas por lo general no siempre son precisamente cuadradas; es decir que pueden ser triangulares o por medio de polígonos regulares e irregulares con más de cuatro lados. Esta multiplicidad de posibilidades es una consecuencia de la fusión de los problemas, en principio diferentes, aunque relacionados, de la cuadratura del círculo (que antecede con mucho al segundo) y la rectificación de la circunferencia.

π x radio^2 pudo provenir de un cuadrado

Sin embargo, ¿cuál sería la razón verdadera que originó la búsqueda por igualar las áreas de un círculo y un cuadrado, a pesar de las dificultades ya conocidas? Encuentro que puede tener fundamento esta conjetura que me doy la libertad de formular, misma que se expone más adelante. Tanto los babilonios como los egipcios, remontándonos hace más de cuatro milenios, ya dominaban el cálculo para la obtención del área del círculo aplicando la ecuación: $\pi \times$ radio^2, (con el vocabulario y signos que ellos entendían; la letra griega π se adoptó para hacer referencia a este número al comienzo del siglo XVIII).

Considerando el manejo de una matemática demasiado elemental, ¿cómo supieron que se requería para el cálculo del área circular el cociente que resulta de la división entre la circunferencia o perímetro y el diámetro? Es de pensarse, como se hace en la mayoría de las investigaciones, que se contó con al menos un modelo eficiente que les permitió deducir la ecuación del área en el círculo. El punto de partida debió ser el cuadrado. Este cuerpo geométrico, en lo que se refiere a sus parámetros básicos (lado, perímetro y área), demanda la aplicación de operaciones realmente sencillas y sin ninguna complicación matemática. Se plantea la conjetura siguiente: "la ecuación que resuelve el cálculo para la obtención de un área circular se dedujo y comprobó primero, teniendo como ejemplo a una ecuación para el cálculo del área de un cuadrado que fuera en cierto modo análoga con respecto a la del círculo". Los matemáticos de la antigüedad seguramente estaban mejor enterados de las etapas de todo este desarrollo (tanto por documentos escritos, en la actualidad desconocidos, como por tradición oral).

Desde una perspectiva diferente —con todas las ventajas que proporciona el mundo moderno— es posible proponer con cierta audacia intelectual que la primera versión de la ecuación para calcular el área de un círculo se obtuvo de ésta que también funciona para el caso del cuadrado: área = (perímetro/mediatriz) × (mediatriz/2)^2; siendo realmente la versión más barroca de una ecuación que puede concebirse para calcular el área de este cuerpo geométrico (cuya fórmula típica es sencillamente base × altura). La mediatriz, línea recta que divide al cuadrado (a la mitad de sus lados) en dos partes iguales, desempeña el mismo papel del diámetro. En esta ecuación *sui generis*, la razón perímetro/mediatriz es análoga a la que representa en el círculo el número π (en el cuadrado es igual a cuatro). El paso siguiente, sin requerirse demasiados recursos matemáticos (tomando en cuenta las limitaciones de la época), fue el adecuar el ejemplo a las características propias del círculo: área = (circunferencia/diámetro) × (diámetro/2)^2. Esto en buena medida puede explicar la búsqueda de la igualdad —como un interés intelectual de algunos matemáticos— para ambas superficies. El desarrollo esquemático de la figura 4 ilustra esta suerte de transposición, de cómo el ejemplo probado tentativamente primero en el cuadrado pudo servir para deducir la fórmula que resuelve el cálculo del área de un círculo, aunque debe aceptarse que esta conjetura no podrá verificarse —quizás nunca— de manera consistente.

El morbo ciclométrico

El problema de encontrarle la cuadratura al círculo se convirtió en un pasatiempo elegante —aunque en ocasiones enfermizo— para matemáticos y filósofos durante la Edad Media y el Renacimiento. En la jerga popular se asume que el intentarlo es ocuparse en una tarea ociosa e inútil, ya que el sentido común indica que tal logro es imposible, creencia que es compartida por gran parte de las culturas del orbe. Tras varios miles de años de búsqueda infructuosa en el intento de resolver la cuadratura exacta del círculo, aunado a la moda intelectual incubada al interior de los claustros académicos durante la ilustración en Europa de discernir sobre una abundante cantidad de cuadraturas disparatadas, se consideró conveniente (dado lo ocioso del tema) prohibir la aceptación de trabajos y disertaciones sobre dicho tópico, censura que se aplicó desde el final del siglo XVIII en las principales sociedades científicas europeas. Augustus De Morgan, en un anecdotario sobre curiosidades matemáticas, describió en 1872 la enfermedad (que de acuerdo a su parecer) padecen los buscadores de la cuadratura del círculo, a quienes considera afectados del *morbus cyclometricus*.

Me tomé la libertad de indagar en el medio psiquiátrico sobre el reconocimiento clínico del presumible desorden mental que puede ocasionar la búsqueda de la cuadratura del círculo. Se trata de una mera broma para ridiculizar al que con pleno conocimiento de causa o al ingenuo que se toma el atrevimiento de indagar en lo prohibido, es decir, a quien cuestiona un paradigma establecido y que de plano por convicción o por ignorancia no lo toma en cuenta.

Es cierto que toda indagación intelectual obsesivamente tratada (de cualquier índole, no necesariamente sólo lo que concierne a las matemáticas) puede provocar al implicado alteraciones mentales. Sobre este particular hay casos de matemáticos sumamente célebres que mostraron —ocupados ellos en cuestiones ajenas a la cuadratura— signos severos de desorden mental: como ejemplos se tienen a Kurt Göedel y a John Nash (el personaje principal del filme *Una mente brillante*; aunque en este último caso la esquizofrenia que padece el protagonista tiene un origen psicosomático). Asimismo, Apóstolos Doxiadis en una novela reciente, *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, relata las consecuencias que trae consigo el manejo emocionalmente inapropiado de un objeto de estudio. Otro ejemplo fílmico, en el terreno de la ciencia ficción, se tiene en el drama π, *el orden del caos*, en donde el investigador (un joven doctor en matemáticas) con el fin de curarse de la obsesión que lo acosa por descifrar el patrón oculto del número π, se aplica él mismo una grotesca lobotomía con un taladro casero.

Finalmente Ferdinand Lindemann encontró en 1882 que π es un número trascendente, lo que constituye la mayor calamidad que puede contener un número irracional; esto ocasiona que su raíz cuadrada no pueda ser una solución para ecuaciones como la siguiente: $a^2-2=0$. En el ejemplo la solución es $a=\sqrt{2}$ (esto sí es posible dado que dicha raíz da como resultado un número irracional algebraico, es decir, no trascendente). Con este hallazgo se terminó de tajo con la ilusión de poder igualar de manera exacta las áreas de un círculo y un cuadrado. La explicación es sumamente comprensible: no pudiendo la raíz cuadrada de los números trascendentes ser la solución en ecuaciones con coeficientes enteros positivos, un cuadrado con área igual a π no es posible que tenga lados que sean iguales a su raíz cuadrada. No obstante la contundencia axiomática de este teorema, dos matemáticos de primer nivel, Specht en 1836 y Ramanujan en 1913, intenta-

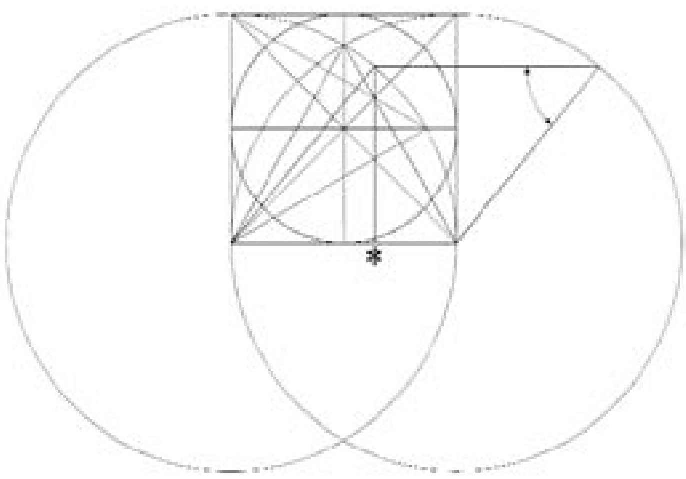


Figura 5

Definición basada en el teorema I-1 de Euclides de un rombo que tiene un área cercana —con diferencia aproximada de 4/100— a la del círculo inscrito; nótense las intersecciones coincidentales que sirven de guía para ubicar la altura (*). Los dos círculos grandes y el triángulo equilátero, cuya base une los centros, constituyen los componentes originales del teorema. Si este rombo tiene lados igual a 2, su área es 3.10…, en donde el ángulo (α) tiene 50.9 grados ($tg\alpha \approx \pi^2/8$).

ron antes y después de la formulación de este teorema sendas soluciones aproximadas muy bien elaboradas. El primero calculó un área para π de-3.1415919… mientras el segundo obtuvo 3.14159292…; en ambos casos los cuerpos geométricos proyectados son cuadrados.

Un cuadrado con área igual a π

La aceptación del teorema de Lindemann obliga a que la intención de igualar un área circular con una cuadrada se realice *a priori* en los términos de una mera aproximación, pero, ¿qué tan cercana podrá ser ésta con el valor verdadero del número π? Partiendo del análisis de una aproximación romboidal, inscrita en el escenario del teorema I-1 de Euclides (figura 5), en donde se alcanzó un área igual a 3.10… (resultado que guarda proximidad, utilizando la función tangente del ángulo inferior izquierdo del rombo, con la serie infinita descubierta por Euler, cuyo límite es $\pi^2/8$), se pudo determinar que la bisectriz al cuadrado de un triángulo equilátero —descrito en el teorema de Euclides mencionado— sí permite proyectar un área cuadrada infinitesimalmente próxima con el valor verdadero del número π (figura 6). El área señalada (b^2) se puede calcular de manera expedita con la aplicación del teorema de Pitágoras, considerando la base (a) y la altura

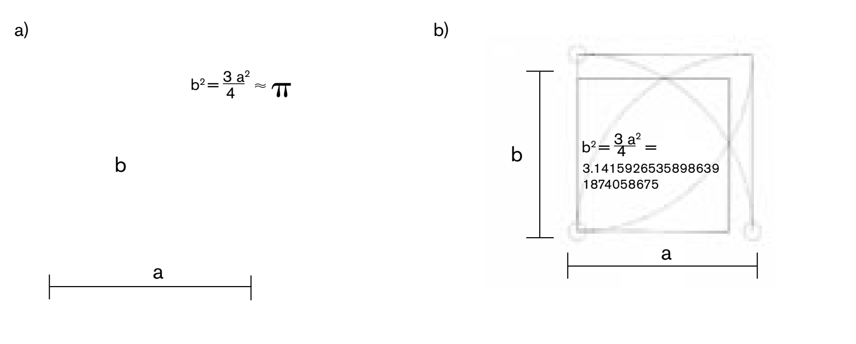


Figura 6

a) Cuadrado (b^2), con lados que son la bisectriz de un triángulo equilátero, que tiene hipotéticamente un área semejante a π; su valor calculado sólo puede ser una aproximación.
b) Construcción real –en escala– de un cuadrado que tiene un área coincidente a billonésimas con el valor verdadero del número π. Esta aproximación proviene de la bisectriz al cuadrado de un triángulo equilátero, con lados de longitud aritmética 2.046653415893, misma que se puede medir con exactitud. La superficie circular homologable posee un diámetro igual a dos (con radio = 1).

(b) respectivas, procediendo para su resolución la ecuación siguiente (en donde se incluyen dos versiones reducidas de la misma):

$$b^2 = a^2 - (a/2)^2 = (a/2\sqrt{3})^2 = 3a^2/4$$

Para una base (a) con valor racional finito las ecuaciones primera y tercera producen un resultado racional, en cambio la segunda de ellas, que es matemáticamente semejante a las anteriores, da lugar a un numeral irracional (más parecido al guarismo π aceptado por la comunidad matemática).

Teniendo una base (a) de un triángulo equilátero igual a 2.046653415893 —longitud que con los recursos de metrología actuales se puede medir exactamente— se genera un área b^2 = -3.1415926535898639187405867 5 (cálculo realizado sin redondeo y utilizando la tercera de las ecuaciones señaladas), que para los efectos de este reporte se propone como una aproximación al número π coincidente a billonésimas —en los primeros doce decimales hay similitud y en los catorce restantes no— con el valor más aceptado de esta razón, misma en que se puede mejorar su precisión prácticamente de manera ilimitada.

Cabe mencionar que esta aproximación del número π, efectivamente contenida de manera íntegra (con valoración completa) en un cuadrado, difícilmente puede alcanzarse con los procedimientos de rectificación de la circunferencia realizados por medio de polígonos regulares, en donde siempre se obtienen residuos decimales interminables. Un comentario final: el cuadrado proyectado que tiene un área infinitesimalmente próxima al valor reconocido de π sí se puede construir con regla y compás, a condición de que estos recursos estén equipados con aditamentos de alta tecnología; la medición exacta de las longitudes implicadas requiere precisiones a nivel de ángström e inclusive en décimas de esta misma unidad (o sea 1×10^{-8} milímetros).

Conrado Ruiz Hernández
Facultad de Estudios Superiores Iztacala,
Universidad Nacional Autónoma de México.

Referencias bibliográficas

Berggren, L., J. Borwein y P. Borwein. 1997. *Pi: A Source Book*. Springer, New York.

Bonet, J., A. Plaza y M. Padrón. 1999. "Two approximations to π", en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 30, núm. 5, pp. 782-787.

Boyer, C., y U. Merzbach. 1991. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons, Nueva York.

Carrega, J. 1981. *Théorie des Corps. La Règle et le Compas*. Hermann, París.

Clawson, C. 1999. *Misterios matemáticos. Magia y belleza de los números*. Diana, México.

De Morgan, A. 1954. *A Budget of Paradoxes*. Vol. I, Nueva York, Dover Publications.

Devlin, K. 1998. *The Languaje of Mathematics. Making the Invisible Visible*. W. H. Freeman and Company, Nueva York.

Dunham, W. 2001. *Euler. El maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid.

Euclides. 1992. *Elementos de geometría*. Vols. I y II. México, UNAM, México.

Eves, H. 1986. *Estudio de las geometrías*. UTEHA-LIMUSA, México.

Huen, Y. 1998. "Is π periodic?", en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 29, núm. 1, pp. 19-26.

Morales, L. 2002. "La cuadratura del círculo y otros problemas de geometría", en *Ciencias*, núm. 65, pp. 54-65.

Ruiz, H. C. 2001. "Convertibilidad del círculo en cuadrilátero", en *Ciencia y Desarrollo*, vol. XXVII, núm. 159, pp. 46-51.

Ruiz, H. C. 2002. "Encontrarle la cuadratura al círculo", en *Ciencia y Desarrollo*, vol. XXVIII, núm. 163, pp. 54-59.

Imágenes

P. 65: Lázló Moholy-Nagy, *La rotación en espiral del espacio*, 1925. P. 67: Duane Michals: *Ludmila Tcherina*, 1964. P. 69: Sasha, *Fear*, 1932. P. 71: The Hulton Getty Picture Collection, refugiados judíos en el St. Louis en pos de un puerto que los reciba, 1939; Alfred Cheney Johnston, *Dolly Sisters*, 1923; Erika Kiffl, *Mi impotencia es mi potencia*, performance, 1986.