Ricardo Mansilla

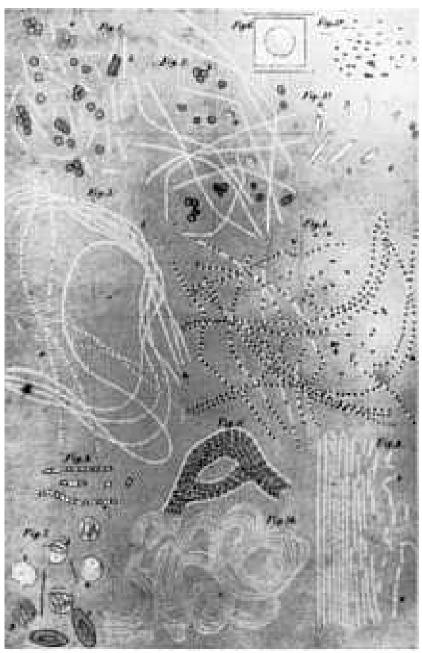
De las epidemias a las bolsas de valores

Las ecuaciones diferenciales han sido uno de los paradigmas más exitosos en la descripción matemática de los fenómenos naturales. En su obra fundamental *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Isaac Newton nos manifiesta su valoración acerca de esta herramienta teórica por medio del siguiente anagrama: *Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et viceversa*, lo cual, en el lenguaje actual, puede ser traducido como: es útil resolver ecuaciones diferenciales.

La influencia de estos métodos en la concepción científica del mundo fue tan grande que influyó en las corrientes filosóficas de los siglos XVII y XVIII. P. S. Laplace hizo un lúcido juicio de este estado de cosas cuando expresó: "Si una mente poderosa pudiera captar con precisión las posiciones y velocidades de todos los cuerpos del Universo, así como todas las fuerzas por medio de las cuales estos interactúan, a una tal mente nada le sería ajeno, podría conocer con precisión todo el futuro y el pasado del Universo".

Este triunfalismo de la comunidad científica que pretendía dar una versión mecanicista del mundo basada en modelos matemáticos descritos por medio de ecuaciones diferenciales recibió un duro golpe a principios del siglo XX con el descubrimiento de los fenómenos cuánticos y la posterior elaboración de la correspondiente teoría. El mundo no era completamente determinista. El segundo gran golpe a estos puntos de vista habría de surgir del propio seno de la teoría de las ecuaciones diferenciales, más precisamente, de la teoría de los sistemas dinámicos. El descubrimiento del caos determinista (conceptos éstos irreconciliables desde el origen de los tiempos) dio un golpe definitivo a las concepciones del mecanicismo científico.

Por otra parte, existen fenómenos bien conocidos por los científicos desde hace mucho tiempo que se resisten a ser descritos por medio de ecuaciones diferenciales. En particular, los llamados sistemas complejos, que al no estar relacionados con un campo de la ciencia específico se dificulta su descripción usando las técnicas clásicas. Ejemplos de ellos se dan en las comunidades de hormigas, el genoma humano, los sistemas sociales, la economía y el funcionamiento del



Roberto Koch, *The Anthrax bacillus*, *ca.* 1877.

cerebro. Su característica más importante parece ser la existencia de ciertas estructuras comunes a todos ellos, los cuales rehuyen el paradigma reduccionista de la ciencia. Muchos investigadores creen que en la comprensión de esas estructuras está el secreto de sus complicados comportamientos.

La mecánica estadística ha alcanzado un notable éxito en la explicación del comportamiento de grandes conglomerados de partículas. Partiendo de una descripción microscópica se ha logrado avanzar hacia la explicación del origen de conceptos macroscópicos, como temperatura, presión, magnetismo, etcétera.

A pesar de los relevantes resultados obtenidos en este campo, es necesario resaltar la simplicidad de las interacciones de los elementos de estos sistemas. Los choques entre partículas son siempre iguales, y éstas no tienen memoria ni comportamientos que se adapten a un ambiente cambiante, es decir, no tienen un comportamiento adaptativo. Algunos grupos humanos, bajo ciertas circunstancias, son ejemplos notables de tales fenómenos, en los cuales el aprendizaje y los juegos estratégicos son parte fundamental de sus interacciones y comportamiento.

La comprensión de los procesos de propagación de enfermedades en comunidades de seres vivientes ha sido un reto para muchas generaciones de científicos. Si bien en la Antigüedad y la Edad Media existieron intentos por comprender el desarrollo de los procesos de infección, el inicio de la etapa moderna podría considerarse con D. Bernoulli y su trabajo pionero publicado en 1760. Buena parte de los modelos desarrollados desde entonces han sido descritos en términos de ecuaciones diferenciales. En algunos de estos modelos se supone que los grupos de individuos en los cuales queda dividida la población (enfermos, susceptibles, inmunes, etcétera) están perfectamente bien mezclados, es decir, los aspectos espaciales del proceso infeccioso son irrelevantes a su dinámica. En otros modelos estos aspectos son tenidos en cuenta y por lo tanto conducen a otro tipo de ecuaciones. Es preciso señalar que ambos tipos tienen validez en diferentes situaciones concretas.

Un ejemplo nos ayudará a entender esto. Consideremos un asentamiento humano como la Ciudad de México y una persona

ıres examinando sangre en el National Institute for Medical Research, Londres, *ca.* 1945.

Un ejemplo nos ayudará a entender esto. Consideremos un asentamiento humano como la Ciudad de México y una persona (que llamaremos Pedro) que vive en su extremo norte y ha contraído gripe. Cuando hablamos, minúsculas partículas de saliva son expulsadas de nuestra boca pudiendo transportar gérmenes de la gripe. No descartamos, obviamente, contactos más estrechos que produzcan la transmisión del virus. Consideremos la situación hipotética (tal vez no tanto) de que esta persona se desplace diariamente distancias grandes para llegar a su trabajo, centro de estudios u otra actividad social; digamos hasta Xochi- milco. Es bastante probable entonces que Pedro transmita la enfermedad a una perso- na cuya posición espacial es bastante lejana a su posición de origen. Si el porcentaje de la población que se comporta como Pedro es muy alto, en un corto intervalo de tiempo los enfermos estarán perfectamente bien mezclados en la población. Por lo tanto, los aspectos espaciales de este proceso son irrelevantes. En poco tiempo la densidad de infectados en la norteña vecindad de Pedro y en Xochimilco será la misma, por tanto, para la descripción de la enfermedad sólo basta conocer la evolución de estas proporciones en el tiempo. Este tipo de situaciones se describe habitualmente por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. A los modelos correspondientes se les llama con frecuencia densodependientes, pues, como ya dijimos, dependen sólo de las densidades de los distintos grupos poblacionales.

Imaginemos ahora que toda la actividad vital de Pedro se desarrolla en su colonia. Imaginemos, además, que un porcentaje alto de la población de la ciudad se comporta de manera similar. Entonces, esta epidemia de gripe no alcanzará a los habitantes de Xochimilco tan rápidamente como en la situación anterior. Pedro sólo puede ahora transmitir su enfermedad a personas espacialmente cercanas, éstos a otros espacialmente cercanos y así sucesivamente. De tal forma que la difusión de la enfermedad es tal que los aspectos espaciales de la misma son completamente relevantes para su descripción. Pasado un cierto tiempo, las densidades de enfermos en la colonia de Pedro y en Xochimilco serán distintas, por lo tanto, el componente espacial del problema es aquí imprescindible. Este tipo de situaciones se describe habitualmente por medio de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

Si bien las definiciones utilizadas en la presentación de estos tópicos han sido tomadas de la epidemiología, lo anterior es en la práctica válido para la difusión de rumores y noticias en una población (en ausencia de medios de comunicación masiva). Nos queda aún por contestar una im- portante pregunta: ¿qué pasa si Pedro y la mayoría de los habitantes de la ciudad no tienen ninguno de los dos comportamientos extremos anteriores, sino más bien una rutina de movimiento intermedia? En otras palabras, ¿cómo modelar la situación en la que los miembros de la población tienen un movimiento promedio demasiado gran- de para que un modelo de difusión lo des- criba correctamente y a la vez demasiado pequeño para ser modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias? Como veremos existe la posibilidad de describir todas las situaciones anteriores por medio de un único modelo construido con autómatas celulares.

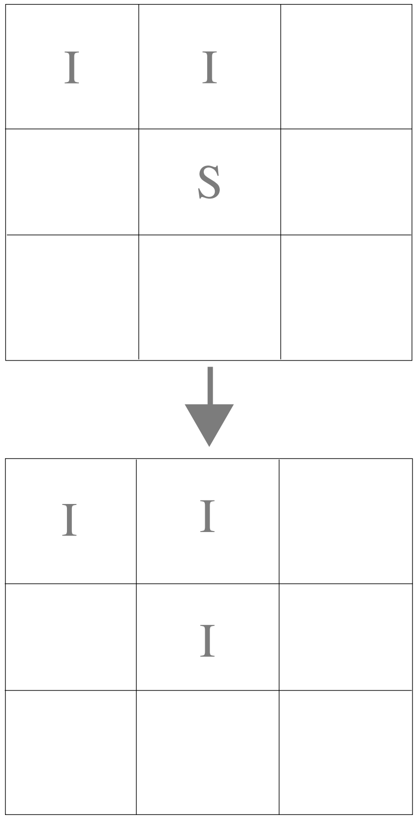


Figura 1.

La teoría de los autómatas celulares tiene sus orígenes a finales de la década de los cuarenta en los trabajos de J. von Neumann. Un ejemplo notable de autómata celular es el llamado "Juego de la vida" de J. Conway, que ocupó durante varios años un lugar privilegiado en alguna sección de la revista *Scientific American*. En años recientes esta teoría ha recibido un nuevo impulso con los trabajos de S. Wolfram. Con respecto a los procesos de transmisión por contacto, N. Boccara ha desarrollado un tipo especial de estos autómatas, llamados autómatas celulares de intercambio de sitios. Éstos se basan en la acción conjunta de dos subreglas: una de transporte (que actúa secuencialmente) y otra de infección (que actúa de manera sincrónica). La descripción de su funcionamiento es como sigue: consideremos una superficie cuadriculada, como un tablero de ajedrez (aquí el color de los escaques es irrelevante). En ella algunas cuadrículas estarán ocupadas y otras vacías. Dentro del conjunto de escaques ocupados distinguiremos dos tipos diferentes: infectados y susceptibles. Los infectados (al igual que Pedro) poseen una enfermedad que pueden transmitir por contacto a los susceptibles. Si entre los ocho escaques que conforman la más estrecha vecindad de un susceptible existen algunos ya infectados, entonces cada uno de estos últimos infecta al susceptible con una probabilidad ρ (figura 1).

La otra subregla modela el movimiento de los miembros de la población. En cada iteración se elige al azar un subconjunto de los escaques ocupados. Estos elementos son trasladados a otras cuadrículas vacías, y la cantidad de elementos de este subconjunto es un parámetro del modelo. La elección de los escaques vacíos es completamente aleatoria. En diferentes iteraciones una misma cuadrícula ocupada puede ser enviada a posiciones diferentes. Como consecuencia de esto, puede estar a cualquier distancia de la posición inicial.

Con las reglas de transporte e infección antes definidas, N. Boccara logró demostrar que su modelo de autómatas conducía a modelos discretos densodependientes.

Sin embargo, estos resultados tienen un par de objeciones serias. La primera es el carácter aleatorio en cada iteración del movimiento de los miembros de la población. Al menos para las comunidades humanas esta hipótesis está lejos de cumplirse.

Cada día (aun cuando no sea de su agrado) buena parte de la población se traslada a lugares fijos, determinados por sus actividades sociales (escuelas, centros de trabajo, etcétera). En un modelo de los antes descritos, Pedro podría moverse el lunes a Xochimilco, el martes a Tacubaya, el miércoles se quedaría en su vecindad y así sucesivamente. Esto puede resultar muy ameno, pero no describe el comportamiento real de una población.

La segunda objeción está relacionada

Gimnasio de la Universidad del estado de Iowa durante la pandemia de fiebre española, ca. 1918.

con la falta de control sobre la longitud del camino medio recorrido por los miembros de la población. En estos modelos las situaciones de tipo difusivas no pueden obtenerse.

Otras reglas de transporte más realistas han sido propuestas. En ellas, el movimiento de los miembros de la población se define como sigue: inicialmente para un subconjunto de los escaques ocupados se decide a qué posición serán trasladados. Esto se hace aleatoriamente sobre el conjunto de las posiciones vacías que se encuentran en una vecindad de radio 2λ de la posición inicial. Al parámetro λ se le denomina longitud del camino medio recorrido. La diferencia fundamental con los modelos anteriores es que esta asignación se conserva y es utilizada a lo largo de la simulación del proceso, es decir, no se reconstruye de nuevo en cada iteración. En un modelo como éstos, Pedro va el lunes a Xochimilco y también todos los demás días. Si los valores de λ son pequeños

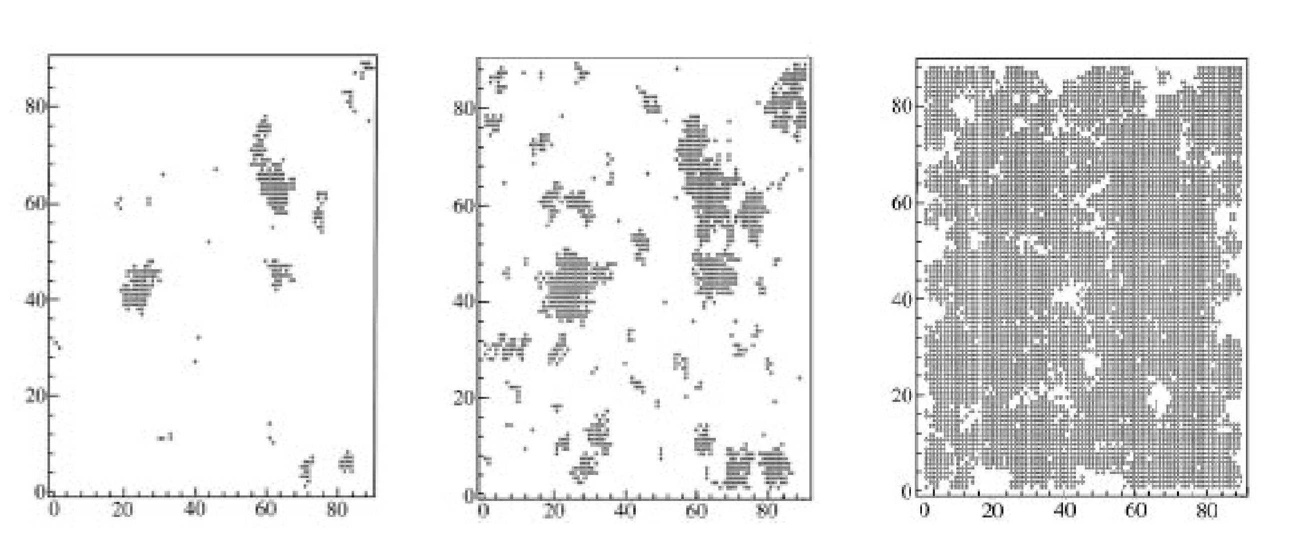


Figura 2 (a-c).

respecto de las dimensiones de la región, entonces puede probarse que se obtienen comportamientos descritos por ecuaciones en derivadas parciales. Si λ toma valores grandes respecto de las dimensio- nes de la región, entonces se obtienen com- portamientos descritos por ecuacio- nes diferenciales ordinarias.

En la figura 2 se muestran los resultados de una simulación hecha con un látice de 150x150 con una densidad de cuadrículas ocupadas de 0.46. Aquí sólo hemos re- presentado las posiciones ocupadas por infectados. En el instante ***t*=0** sólo existe un único enfermo para todas las simu- la- ciones. Las figuras 2a, 2b, 2c representan el estado del sistema en ***t*=10**, ***t*=30** y ***t*=50** respectivamente con **λ=75**, mientras que las figuras 2d, 2e y 2f representan el es- tado del sistema en ***t*=10**, ***t*=30** y ***t*=50** respectivamente con **λ=9**. Lo anterior muestra que el parámetro λ controla el tipo de evolución del proceso infeccioso. Valores pequeños de λ producen com- portamientos difusivos, susceptibles de ser descritos por ecuaciones en derivadas parciales. Valores grandes de λ pro ducen un comportamiento donde los com ponen- tes de la población están bien mez- cladas y por tanto los sistemas de ecuaciones dife- renciales ordinarias son las herramientas adecuadas para su descripción.

No obstante, la verdadera trascendencia de los modelos en autómatas celulares de intercambio de sitio está en que permiten estudiar la zona donde las ecuaciones dife- renciales fallan en la descripción de los fenómenos de contagio, a saber, donde λ no es lo suficientemente pequeño para que el proceso sea difusivo ni lo suficientemente grande para que las características espaciales puedan ser desestimadas.

Existen muchos resultados interesan- tes del estudio de estos modelos en esta "zona crítica". Por razones de espacio nos referiremos aquí sólo a la situación en que la en-fermedad tiene un tiempo de duración determinado, después del cual los elementos de la población vuelven a ser susceptibles de enfermarse. La gripe es por cierto una enfermedad de ese tipo.

Sea ***d*** la duración (en número de itera- ciones del modelo) de la enfermedad bajo estudio. Numerosas simulaciones han mos- trado que el parámetro de orden es:

$$\mu = {pd}/\lambda$$

El comportamiento de una serie de tiempo típica de los infectados tiene frecuentes "subidas" y "bajadas", como puede verse en la figura 3. Obsérvese lo irregular del com- portamiento de esta serie. Con el objetivo de descubrir ocultas características periódicas se ha estudiado el espectro de potencias de esta serie de tiempo. Los resultados pueden verse en la figura 4. En la medida en que el parámetro μ aumenta aparecen evidencias de doblamiento de periodo. Para el valor de μ= 0.66 el espectro de potencias se vuelve continuo, lo cual indica que se ha llegado a un comportamiento caótico. Este es el caso de la serie de la figura 3. En algunos modelos de epidemias en ecuaciones diferenciales ordi- narias se ha observado un comportamiento caótico. Lo notable de los resultados antes mencionados es que ocurren en circuns- tancias que no pueden ser descritas por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Así, del comportamiento microscópico de los agentes emerge el comportamiento global. No obstante, es necesario señalar que los miembros de la población tienen una posición pasiva en estos modelos con respecto a la epidemia. Su comportamiento no varía en el tiempo, no se adapta a las cambiantes circunstancias, a diferencia de otros fenómenos en los que el carácter adap- tativo del comportamiento de los miembros de la población es vital para la modelación y comprensión de la dinámica del sistema.

DE LAS BOLSAS DE VALORES

El proceso de globalización, con sus secue- las de angustias económicas y miseria para cien- tos de millones de seres humanos ha elevado a la categoría de templos a algunas instituciones que hace un par de décadas podían pasar inadvertidas para la mayoría de los seres humanos. La existencia de una economía internacional relativamente abierta y con grandes y crecientes flujos comer- ciales y de inversión de capital entre las nacio- nes ha convertido a las bolsas de valores en el centro de la atención ciuda- dana. Los medios masivos tratan el com- portamiento de los índices financieros con el mismo interés que el resumen del estado del tiempo. Tormentas reales y financieras son examinadas en sus secciones corres- pondientes por analistas que valoran sus duraciones y consecuencias.

Los físicos han contribuido consistent- emente a la modelación de sistemas com-

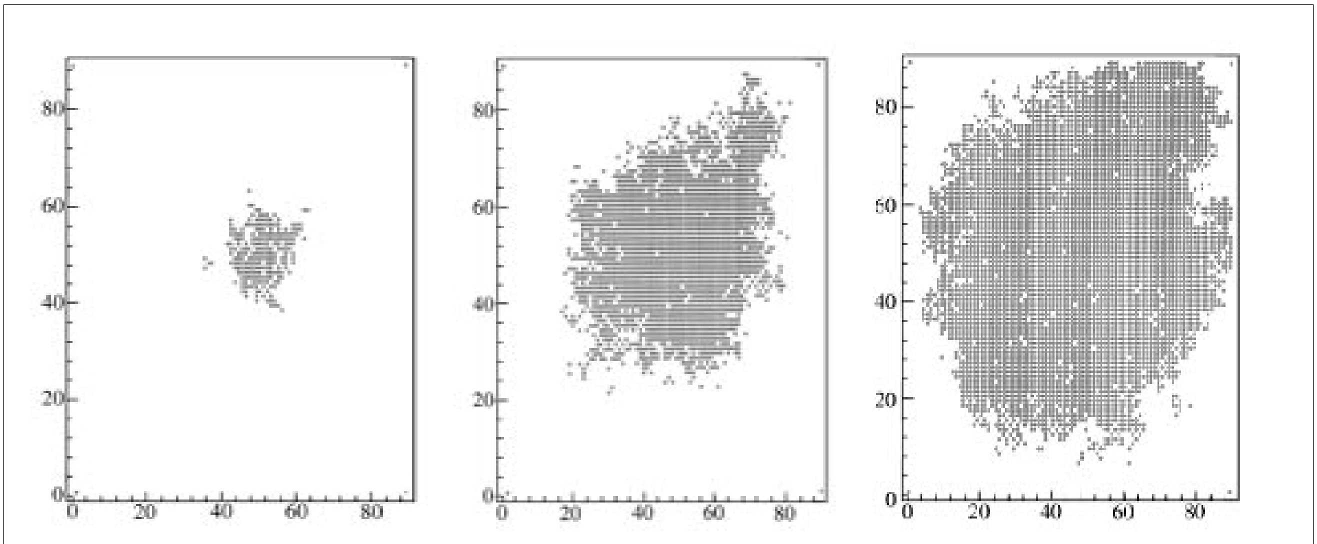


Figura 2 (d-f).

plejos usando herramientas y metodologías desarrolladas en la mecánica estadística y la física teórica. Los mercados financieros son ejemplos notables de sistemas complejos, de los cuales se tiene información muy precisa (con frecuencia medida en intervalos del orden de los segundos). Por estos motivos (entre otros) los mercados financieros son tan atractivos para ciertos investigadores interesados en desarrollar una comprensión profunda de los sistemas complejos.

Estos sistemas son ejemplos paradigmáticos de aquellos en los cuales las estrategias exitosas son tales que inducen a los agentes a comportarse diferente de sus competidores. En 1994 el economista B. W. Arthur propuso lo que en la actualidad es conocido como "el problema del bar El Farol". Su nombre lo debe a un bar de la ciudad de Santa Fe, Nuevo México, sede de un famoso instituto de sistemas complejos, donde cada jueves se tocaba música irlandesa. Si la mayoría de los *fans* decidía ir, entonces el hacinamiento en el local hacía imposible disfrutar de la música. La opción correcta era quedarse en casa. Si contraria- mente la mayoría decidía quedarse en casa, entonces el bar tendría pocos clientes y se podría disfrutar de la música a plenitud. La opción correcta era, pues, ir al bar. Como era poco probable que todos los pobladores se comunicaran entre sí para conocer la decisión de los otros antes de ir al bar, era preciso elaborar estrategias, es decir, reglas de inferencia que permitieran tomar decisiones a partir de la historia real de los sucesos. La manera elegida por Arthur para modelar esto estaba dirigida a resaltar el carácter adaptativo del comportamiento de los agentes. Es un buen ejercicio para el lector tratar de entender qué tiene que ver todo esto con un mercado financiero.

Existen muchas "variaciones sobre el tema", en particular los llamados "juegos de minoría". En cualquier caso las decisiones de los jugadores pueden codificarse en alfabeto binario: 0 significa quedarse en casa y 1 significa ir al bar. En el modelo se supone que los amantes de la música sólo recuerdan cuál fue la opción ganadora las últimas m noches. A este valor se le llama *tamaño de la memoria.* Los miembros de la población poseen cada uno s *estrategias* elegidas al azar al inicio del juego. Es un buen ejercicio demostrar que si la memoria de los agentes es de longitud m entonces existen 2^m historias posibles y 2^{2m} estrategias disponibles.

Después de ejecutar el juego un cierto número de veces (observar la asistencia al bar durante un cierto número de días) tendremos una cadena binaria que representa las decisiones ganadoras a lo largo de los días observados. Se le ha concedido gran impor- tancia al comportamiento de la varianza σ de los valores de esta serie. En los mercados financieros reales a esta magnitud se le conoce como *volatilidad*. No obstante, recientemente se ha demostrado que para los juegos de minoría (en particular para el modelo del bar El Farol) esta magnitud no refleja ninguna propiedad inherente al comportamiento de los agentes. Esto significa que medidas alternativas de la complejidad de la serie binaria deben ser buscadas.

Existía un importante acervo teórico de estudio de secuencias simbólicas, relacionado en particular con el estudio del ADN. En lo que al modelo anterior respecta, estudiar la complejidad de las cadenas de dígitos binarios significa estudiar la complejidad del proceso en el tiempo.

Se han utilizado con éxito medidas de complejidad derivadas de la entropía de Kolmogorov-Chaitin. Un resultado importante de estos estudios es que la serie real de dígitos binarios que representa las sucesivas decisiones correctas (ir o no ir) sí contiene información relevante acerca del sistema. Esto, como veremos a continuación, está en contradicción con ciertos resultados teóricos tácitamente admitidos.

El paradigma más aceptado entre los creyentes de las teorías neoclásicas (conocido como *la hipótesis de mercado eficiente*) es que los mercados son muy eficientes en la incorporación de cualquier información relevante a los niveles de precios subsistentes. Una consecuencia inmediata de esto (demostrada por P. A. Samuelson en 1965) es que la serie temporal de los precios debía ser completamente aleatoria. Sin embargo, los resultados obtenidos en los modelos multiagentes, como los desarrollados con anterioridad, muestran que estas series temporales no son aleatorias, que contienen información relevante. La información obtenida de las series de tiempo de los mercados financieros reales parece corroborar esto. Si las series fuesen completamente aleatorias las variaciones de precios debían tener una distribución normal. No obstante, minuciosos estudios

han demostrado que la función de distribución de las variaciones de precios tiene en general "cola gruesa", es decir, grandes variaciones de precios son realmente más probables que lo que podía esperarse de una distribución normal. El conocimiento de la verdadera función de distribución de las variaciones de precios es un resultado de gran importancia práctica, pues la mayoría de los métodos de evaluación de opciones y otros productos financieros se basan en la suposición de que las variaciones de precios siguen una ley normal. Estudios muy cuidadosos hechos recientemente indican que estas fluctuaciones en los precios parecen seguir una distribución tipo Levy estable.

Queda el punto de la predictibilidad de las debacles financieras. Según la hipótesis de mercado eficiente no es posible sacar conclusiones a futuro, por lo tanto no podrían predecirse, pero según los resultados de los modelos multiagentes hay información relevante encriptada en la serie temporal. Por otra parte, las técnicas deri- vadas Kolmogorov-Chaitin de la entropía abren una nueva vía de estudio para la predictibilidad de esos sucesos.

CONCLUSIONES

Los autómatas celulares y los modelos multiagentes son las técnicas en las cuales descansan los diferentes modelos basados en la simulación microscópica de sistemas complejos aquí expuestos. Ésta es una línea de trabajo muy promisoria en cuanto a la comprensión de los sistemas compuestos por un gran número de partes. En las próximas décadas las ciencias sociales se beneficiarán de esta revolución que ha llegado para quedarse en el ámbito de los sistemas complejos.

AGRADECIMIENTOS

Todos los seres humanos en el transcurso de sus vidas se ven influidos por la autoridad que ciertas personas ejercen en su desarrollo. El autor de este trabajo no es una excepción. Dejando a un lado la guía que padres y maestros en las distintas etapas de su vida le brindaron, el autor tuvo el privilegio de realizar su doctorado bajo la dirección de un maestro notable, con el cual ha tenido además la posibilidad de adentrarse en varios temas de investigación, beneficiándose de su profunda intuición, amplia erudición, amor por la ciencia y aprendiendo de su humildad genuina. Por todo ello, el autor de estas líneas quisiera aprovechar esta oportunidad para rendir un modesto homenaje al maestro Germinal Cocho.

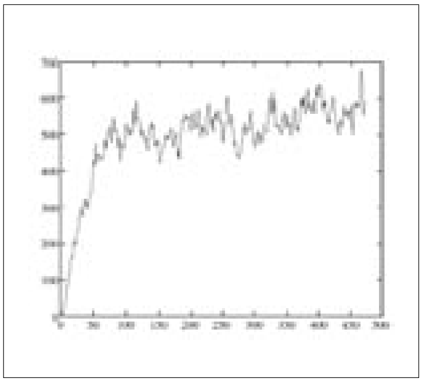


Figura 3.

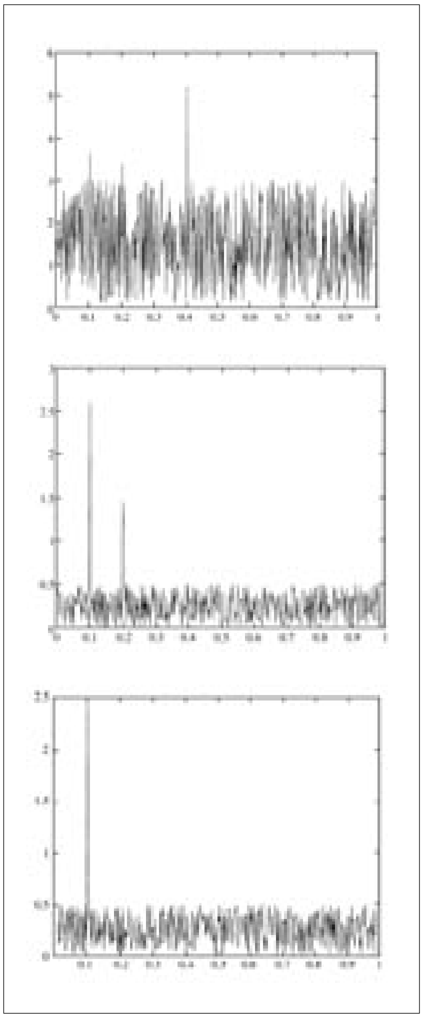


Figura 4 (a-c, de abajo hacia arriba).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arthur, W. B. 1994. *American Economics Review (Papers and Proceedings)* 84, p. 406.

Boccara, N. 1992. *Automata Network Models of Interacting Populations*. Santiago de Chile, Escuela de Física Estadística y Sistemas Cooperativos.

Cavagna, A. Irrelevance of memory in Minority Game.

Mansilla, R. "Deterministic Sites Exchange Cellular Automata and the Spread of Epidemics in Human Settlements", http://arXiv.org/abs/nlin.CG/0004012. En proceso de arbitraje en el *Bulletin of Mathematical Biology*.

Mansilla, R. 2000. "Algorithmic Complexity in Minority Game", en *Physical Review E*, 61, p. 4.

Mansilla, R. 2000. "A New Algorithmic Approach to Minority Game", *Complex Systems*, 11, p. 2.

Mansilla, R. "From Naïve to Sophisticated Behavior in Multiagents Based Financial Market Models", aceptado para publicar en *Physica A*.

Mansilla, R. "Algorithmic Complexity in Real Financial Markets". En proceso de revisión en el *European Physical Journal B*.

Mantenga, R., H. E. Stanley. 2000. *An Introduction to Econophysics: Correlation and Complexity in Finance*. Cambridge University Press.

Mantenga, R. N. 1991. "Levy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange", en *Physica A* 179.

Neftci, S. N. 1996. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press.

Samuelson, P. A. 1965. "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate randomly", en *Industrial Management Review* 6.

Sornette, D. y A. Johansen, del Departamento de Ciencias de la Tierra de UCLA, han publicado recientemente varios artículos sobre el tema. Véase por ejemplo: http://arXiv.org/abs/cond-mat/0004263.

Von Neumann, J. 1957. *Collected Papers*. Nueva York, Birkhausser.

Wolfram, S. 1986. *Theory and Applications of Cellular Automata.* Singapur, World Scientific.

Al lector interesado en este tipo de modelos

◀ Soldados británicos durante una epidemia de plaga, Hong Kong, 1890.