DE VOLANTINES, ESPIRÓGRAFOS Y LA FLOTACIÓN DE LOS CUERPOS

Déborah Oliveros y Luis Montejano

Existe un famoso libro de problemas de matemáticas llamado *El libro escocés* (*The Scottish Book*). Su historia comienza en los años que van de la Primera a la Segunda Guerra Mundial, en una ciudad Polaca llamada Lvov. En esos años se dio en Polonia (y en particular en Lvov) una sorprendente confluencia de matemáticos que a lo largo de la historia de las matemáticas contribuyeron con aportaciones muy importantes. Nos referimos a personajes como Stefan Banach, Stanislaw Ulam, Waclaw Sierpinski, Alfred Tarski, Hugo Steinhaus, Kazimir Kuratowski, Karol Borsuk, Stanislaw Mazur y Mark Kac, entre otros.

Además de las reuniones semanales de la Sociedad Matemática Polaca y de los seminarios de la Universidad, estos matemáticos se reunían en un pequeño café cercano a la Universidad que se llamaba Café Escocés, donde discutían, hablaban de la vida o proponían nuevos problemas de matemáticas. De esta manera se creó todo un rito en torno al café y a estas largas pláticas. Un día, Banach decidió que debían anotar los pormenores de lo que ahí sucedía para que no quedara en el olvido. Entonces llevó un cuaderno grande en el cual empezaron a escribir los problemas y los resultados expuestos durante sus discusiones. El cuaderno siempre se quedaba en el café

Károly Escher, *Director bancario en un balneario*, 1938.

bajo la custodia de uno de los meseros que conocía este ritual.

El primero de estos problemas tiene fecha del 17 de julio de 1935, aunque Ulam afirma que los primeros problemas datan de 1928. En varios casos, los problemas fueron resueltos allí mismo, y las respuestas están incluidas en el cuaderno. La mayoría de los problemas están planteados por Banach, Ulam, Steinhaus y Mazur, que eran los que más frecuentaban el café, pero también por amigos de ellos que llegaban de visita. Existen, por ejemplo, problemas planteados por matemáticos tan famosos como Erdoz, Frechet, Infeld, Lusternik y Von Neumann, además de los que ya mencionamos. El libro fue acumulando más y más problemas. Desafortunadamente, pocos años después la ciudad de Lvov y él, tendrían una vida muy tormentosa.

Trás el estallido de la Segunda Guerra Mundial, la ciudad fue ocupada primero por los rusos y después, en el verano de 1941, por las tropas alemanas. En ese momento cesaron las anotaciones quedando como última fecha el 31 de mayo de 1941.

Cuenta la historia que poco antes de que esto sucediera, ante la inminente ocupación, Ulam y Mazur consideraron que había que poner a salvo el libro; quedaron de acuerdo en que si la ciudad era bombardeada, Mazur pondría el libro en una caja y lo enterraría. Más precisamente, acordaron que lo enterraría cerca de la portería de un campo de futbol en las afueras de la ciudad. Nadie sabe si esto sucedió o no, pero el caso es que el libro sobrevivió en buen estado, pues el hijo de Banach, Stephan Banach Jr., lo encontró y lo entregó a Steinhaus después de la guerra. Éste se encargó de enviar una copia a Ulam (que en ese entonces vivía en Los Álamos, Estados Unidos), quien la tradujo al inglés y la distribuyó en varias universidades entre sus colegas, con lo cual *El libro escocés* se dio a conocer en todo el mundo.

Los temas que se tratan en este libro son muy variados, y en él figuran ciento noventa y tres problemas, muchos de los cuales permanecen aún sin respuesta. Algunos tienen premios asignados para aquel que los resuelva, que van desde una botella de champagne, una botella de whisky, una cerveza, una taza de café, cien gramos de caviar, tocino o un ganso vivo.

Uno de los problemas de este libro, el 19, nos a cautivado de manera especial; en él, Ulam planteó lo siguiente: "Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio —sin voltearse— en cualquier posición en la que se deje, ¿deberá ser éste necesariamente una esfera?"

Cierre sus ojos y recuerde los momentos en que ha estado en una alberca o en el mar jugando dentro del agua; recordará que hay posiciones en las que se puede estar sin moverse, como de "muertito", por ejemplo, y hay otras que requieren más esfuerzo de su parte para no girarse. Ahora piense en un palo; notará que es imposible lograr que éste flote verticalmente, a menos que coloque una pesa en un extremo, en cambio, horizontalmente es casi un hecho que el palo se quede quieto. En el caso de una botella es muy difícil conseguir que ésta flote vertical y horizontalmente; por eso es que las botellas siempre están ladeadas. Un coco, por ejemplo, flota sin girar de manera muy natural casi en cualquier posición en la que se deje, y más aún, una pelota no tiene problema, pues ésta se mantiene en equilibrio en cualquier posición. Resulta que en todo cuerpo hay puntos que tienen cierta facilidad al equilibrio y ciertos puntos donde no. En el cuerpo humano, por ejemplo, hay zonas que pesan más que otras, como la cabeza, de manera que para que usted encuentre equilibrio dentro del agua en esta posición, esto influirá, como en el caso de la pesa en uno de los extremos del palo. Otro factor que influye será la forma del cuerpo, como sucede con el palo sin pesa o con el coco. El problema que planteó Ulam nos pide cosas muy simples; lo único que hay que tener claro es que si lo sencillo no se entiende, lo más complicado menos. La idea de Ulam es la siguiente: considere un cuerpo o sólido hecho de un material uniforme (todo de madera o todo de plástico, por ejemplo) que evite puntos más pesados que otros. ¿Existen entonces cuerpos uniformes distintos de la esfera que floten en equilibrio sin girarse en cualquier posición? Al respecto se saben algunas cosas, pero en realidad en todos estos años no se ha podido dar respuesta a esta pregunta. Nuestro propósito es ofrecer una solución parcial a este problema.

Un día Banach decidió que debían anotar los pormenores de lo que ahí sucedía para que no quedara en el olvido. Entonces llevó un cuaderno grande para escribir los problemas y los resultados que surgían de las discusiones; así nació El libro escocés.

Vamos a ubicarnos en una mesa del Café Tacuba en un día lluvioso y con un rico café a un lado. A la manera de los matemáticos polacos cafeteros, platiquemos acerca de un artefacto mecánico al que hemos llamado volantín. Aparentemente esto no tiene nada que ver con el

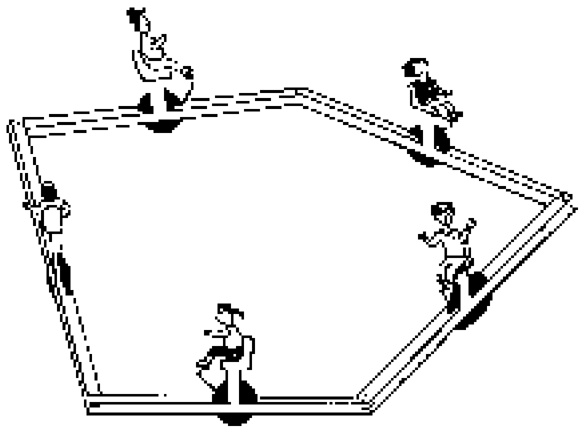


Figura 1

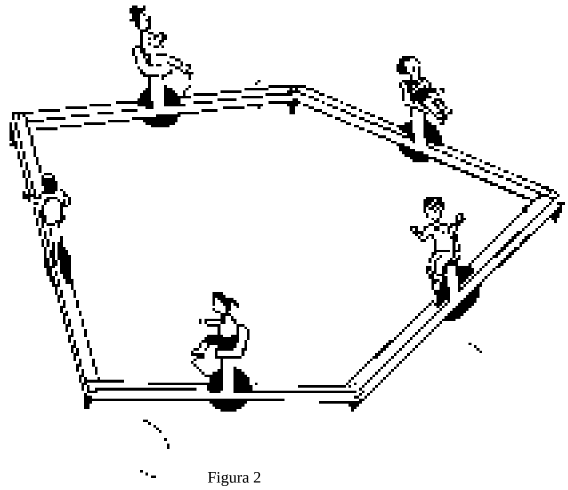


Figura 2

problema de la flotación, pero en realidad este artefacto tiene una íntima relación con el problema 19 que planteó Ulam.

Los volantines

Si alguna vez ha estado usted en una feria le será muy fácil imaginar el siguiente artefacto o juego mecánico al que hemos llamado volantín. Este aparato no sólo ofrecerá, como la mayoría de los juegos mecánicos, ese vértigo o la maravillosa sensación de movimiento, sino que también exigirá habilidad mental y coordinación física para que funcione perfectamente.

El aparato está diseñado como sigue: cinco barras de metal o de madera del mismo tamaño engarzadas libremente en los extremos unas con otras (el ángulo entre las barras no tiene ninguna restricción). A la mitad de cada una de las barras se encuentra empotrada, en la misma dirección a éstas, una llanta, la cual permitirá que nuestro aparato se mueva. Un poco más arriba de la llanta, y en la misma dirección, estará acondicionada una silla, donde usted podrá sentarse al igual que las otras cuatro personas que estén esperando el turno para subirse a este juego (figura 1). En esta silla no hay volante alguno, pues usted no podrá decidir que dirección tome la barra, pero sí habrá un pedal de velocidad, un pedal de freno y una palanca de reversa o de avance. El juego consistirá en tener la habilidad de no parar en ningún momento el movimiento (claro está, mientras que su turno no termine), además, deberá coordinarse con los demás jugadores para no causar desastres, pues podría suceder algo parecido a lo que ocurre cuando uno rema en un lago y el compañero de paseo, al igual que usted, no cuenta con la coordinación física necesaria para mantener el curso de la barca, de manera que al cabo de un rato comienza uno a dar vueltas sin poderse dirigir a ningún lado.

Una utilidad distinta que también podría tener el volantín (esto no es una promoción de venta de volantines, aunque creemos que podría dar buenos resultados) es la de ser usado como andadera para niños. Basta tener la misma estructura, sólo que en vez de contar con cuatro sillas en las barras, se pondría un aditamento para que el niño estuviera cómodamente sentado en medio. Le garantizamos que su niño no corre el riesgo de ser aplastado por las barras, además de que puede tenerlo en un espacio muy reducido, pues no podrá ir muy lejos y, gracias al diseño de este artefacto, creerá que está recorriendo todo el mundo.

Para alimentar su imaginación y pensando en lo que viene en seguida, elija la presentación que más le guste y agregue a su modelo un aditamento en cada junta de las barras que permita ir dibujando de distintos colores el movimiento del artefacto. A este volantín mejorado podríamos llamarlo volantín plus (figura 2).

Ahora tiene usted toda la información para ver a los volantines (o volantines plus) de manera abstracta, es decir, como un matemático los describiría. Un volantín está formado por cinco curvas, cada una de distinto color y con las siguientes propiedades: 1) las curvas están dibujadas por los vértices de un pentágono de lados iguales, y 2) el punto medio de cada uno de los lados del pentágono tiene velocidad paralela a los lados de dicho pentágono, es decir, el punto medio sólo puede avanzar si lo hace en la misma dirección de cada uno de los lados del pentágono.

Si pudo imaginar estos volantines no tendrá problema en generalizarlos, es decir, en evocar volantines de más o de menos barras, y preguntar: ¿existirán los volantines de dos barras? ¿Y los de tres u ocho? ¿Habrá algunos más interesantes que otros? Contestemos algunas de estas preguntas.

¿Cómo puede ser un volantín de tres barras? Pues así como para los volantines matemáticos necesitábamos un pentágono de lados iguales, aquí necesitaremos un triángulo equilátero, donde los puntos medios viajen a velocidad paralela a los lados del triángulo, del mismo modo que el modelo mecánico tendrá tres barras con sus tres sillas.

Puede demostrarse de manera muy sencilla (inténtelo usted) que el único movimiento posible de un triángulo equilátero con estas restricciones es un círculo (figura 3). De manera que si usted planeaba poner en su feria un volantín plus de tres barras, no logrará el éxito esperado, o si usted deseaba hacer una andadera con este modelo, sólo logrará marear a los niños, en pocas palabras, el volantín de tres barras y tres sillas es poco atractivo.

Podríamos ilusionarnos un poco con los volantines de cuatro sillas, pues hay una gran variedad de cuadriláteros de lados iguales, así que, en principio, hay más alternativas para los volantines plus de cuatro barras. Pensemos qué cosa necesitamos para que este volantín tenga éxito. Podría suceder que al ponerlo en la feria, por más buenos y ágiles que sean los jugadores, no logren hacerlo avanzar, entonces, usted podrá reclamarnos que el volantín que le vendimos no funciona.

Comencemos con un cuadrilátero cualquiera, e intentemos darle un pequeño empujón inicial señalado con la flecha *f1* en el vértice *v1*; ahora note que para que la llanta marcada con el número 1 que está en la barra 1 avance (de manera paralela) es indispensable que la flecha *f2* sea una reflexión de la flecha *f1* respecto de la primera barra, es decir, es necesario que el ángulo que forman las flechas *f1* respecto de la barra 1 y *f2* respecto de la barra 1 sean iguales —esta propiedad se llama reflexión, pues si pensamos a la barra como un espejo y a la primer flecha viéndose por este espejo, la flecha dos será el reflejo de la primer flecha— figura 4a).

Note que si la flecha 1 y la flecha 2 no están en esta posición la primer llanta no avanzará; de la misma manera, si queremos que la llanta dos avance necesitamos que la flecha *f3* sea una reflexión de la flecha *f2;* si queremos que la tercer llanta avance, la flecha *f4* tiene que ser una reflexión de la flecha *f3*, y, finalmente, para que la cuarta llanta avance la primer flecha *f1* deberá ser una reflexión de la flecha *f4*. De manera que si todo lo anterior funciona, entonces el volantín funcionará, si no, instantáneamente éste se atasca y no habrá manera de moverlo (figura 4b).

Experimente usted tomando un cuadrilátero cualquiera y considere varias flechas iniciales; notará que hacer cumplir todas las condiciones anteriores es realmente difícil. De hecho, el único cuadrilátero que permite esta propiedad es el cuadrado, pues la geometría es clara en el sentido de que la suma de un número par de reflexiones es una rotación o, dicho de otra manera, un giro. Así, si usted arma su volantín de cuatro barras y le da empujones iniciales en todas las posibles direcciones no logrará hacer avanzar a su volantín en el primer instante, a menos que sea un cuadrado; y si queremos que se siga moviendo deberá ser un cuadrado todo el tiempo, en cuyo caso las llantas paralelas a las barras sólo se moverán en forma de un círculo y, por consiguiente, las curvas pintadas por los vértices también formarán un círculo, por lo cual este volantín no tendrá tampoco mucho éxito (figura 5).

Las mismas condiciones que analizamos hace un momento para que los volantines de cuatro barras funcionaran deben de aplicarse a cualquier volantín de *n* barras, y la misma propiedad geométrica respecto de que la suma de un número par de reflexiones es una rotación, nos dice que la suma de un número impar de reflexiones es una reflexión, lo que nos diría en principio que cualquier volantín de *n* sillas, donde *n* es un número impar, se va a mover, solamente habría que averiguar en qué dirección hay que darle en empujón inicial para asegurarnos que el volantín funcione.

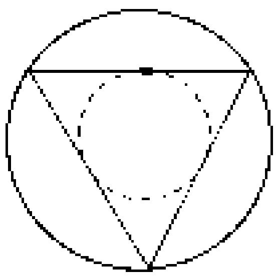


Figura 3

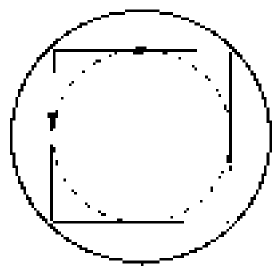


Figura 5

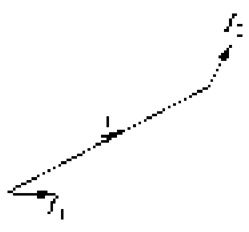


Figura 4a

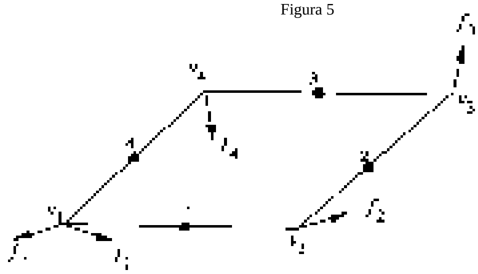


Figura 4b

Regresemos a los volantines originales de cinco barras. En este caso y con la idea de que cualquier volantín con un número impar de barras avanza, nos preguntaríamos: ¿cuántos posibles volantines de cinco barras existirán? Dicho de otra manera, ¿cuántos pentágonos de lados iguales existen? Resulta que hay una infinidad de ellos, más aún, si analizamos con cuidado las propiedades que necesita todo volantín para funcionar, es decir, si estudiamos las propiedades dinámicas de estos objetos, es posible, por un lado, determinar cuáles son las ecuaciones diferenciales que los rigen en todo momento y, por el otro, encontrar las condiciones iniciales necesarias para que en cada caso el volantín avance.

Veamos algunas imágenes obtenidas de los volantines (figuras 6, 7 y 8). ¿Que sucedería si tomamos como condición inicial un pentágono regular (de ángulos iguales)? Note que en el primer instante éste arrancará como un círculo; ¿se deformará después de un tiempo? Una de las propiedades que tienen los volantines es que preservan el área del polígono inicial, es decir, si comienza con un pentágono de área *A0* y lo echa a andar como volantín, al cabo de un tiempo arbitrario, si usted detiene el volantín y calcula el área del pentágono que quedó, el área de éste será *A0*. Por otro lado, existe un teorema en geometría que dice que de todos los polígonos de lados iguales, aquellos que tienen la mayor área son los polígonos regulares; de manera que si comenzamos con un pentágono regular y lo echamos andar como volantín, tendrá que preservar el área, que es máxima en todo momento, así el volantín estará dibujado por un pentágono regular que no puede deformarse, lo que implica que su movimiento corresponde al de un círculo.

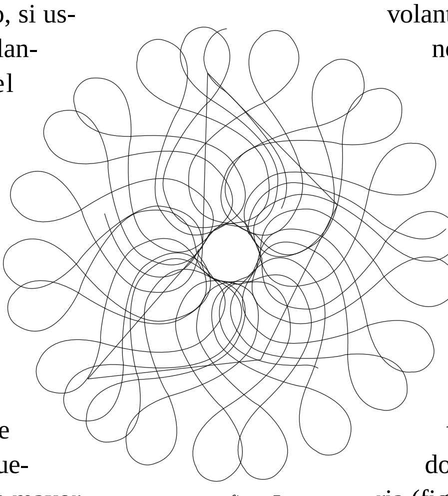


figura 7

Note que en la *figura 8* cada una de las curvas pintadas por los vértices del volantín se cierra en ella misma, y que las cinco curvas son entidades distintas. Por otro lado, en los ejemplos de las figuras *6* y *7* cada una de las cinco curvas dibujadas por los vértices ni se cierran ni coinciden. Observe que para el caso de los volantines de tres y de cuatro barras (figuras 3, 4a, 4b y 5), o en el caso del volantín de cinco barras que toma como condición inicial un pentágono regular, las curvas dibujadas por los vértices forman círculos, los cuales se empalman unos sobre otros. ¿Será que existen pentágonos iniciales (distintos del pentágono regular) en donde cada una de las curvas dibujadas por estos vértices se cierre y coincidan todas con todas? Este tipo de volantines se llaman volantines de Zindler, y para nosotros, como veremos más adelante, son muy especiales; de hecho, este tipo de volantines son difíciles de encontrar pero existe toda una técnica para hallarlos. Veamos dos ejemplos que, junto con los anteriores, serían divertidos ejemplares para la feria (figuras 9 y 10).

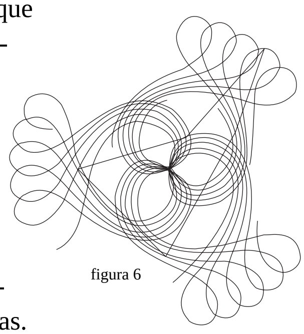
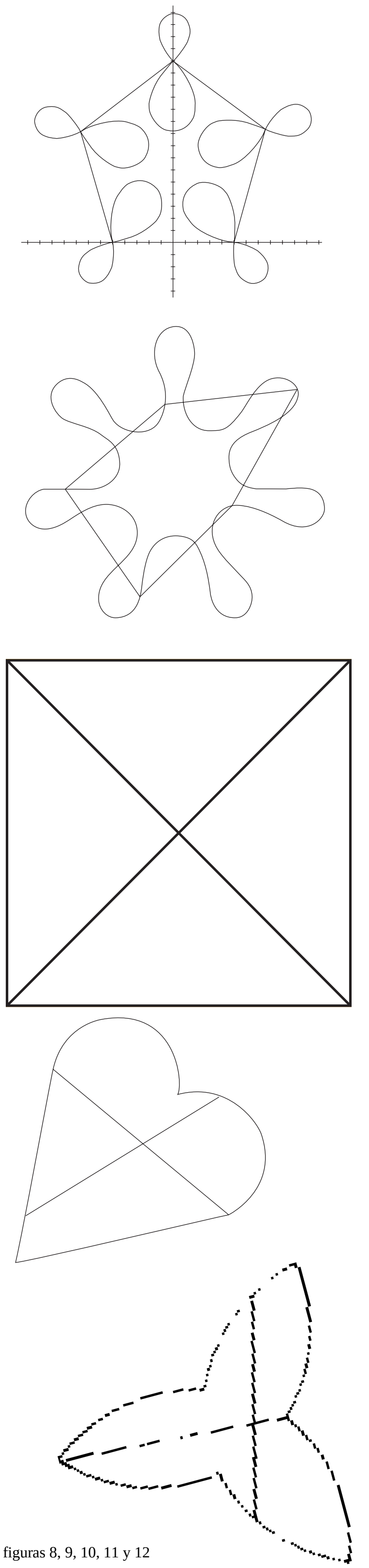


figura 6

Si usted echa a volar por un momento su imaginación notará que si el volantín de cinco barras es ya suficientemente complicado, entre más barras agregue será más complicado aún, sobre todo si tiene un número impar de lados. De hecho aunque se conocen las ecuaciones diferenciales que los rigen y se saben algunas propiedades de ellos, aún no se conocen por completo.

Ahora pensemos un poco cómo serían los volantines de dos barras. Resulta que los volantines de dos barras son muchísimos; de hecho cualquier volantín de *n* barras contiene varios volantines de éstos. Detengámonos un momento en la estructura mecánica del volantín de dos barras; este modelo tiene una sola silla, pues la primer barra debe estar engarzada con la segunda y la segunda con la primera, así que no permiten más que un solo jugador, lo cual no hace a este volantín menos atractivo. Note que este modelo de dos barras no sirve de andadera, ya que los niños quedarían inmediatamente apachurrados. Veamos algunos ejemplos que el jugador de un volantín plus puede pintar si sigue bien las reglas.

El ejemplo más sencillo es la línea recta, en donde cada vértice dibuja la misma línea y el punto medio se mueve también de manera paralela a las barras. Otro ejemplo sencillo es el círculo dibujado por los vértices como si fuera un compás doble. Otros ejemplos no tan sencillos son las figuras llamadas figuras de Zindler, las cuales, a pesar de que tienen propiedades muy interesantes, no describiremos aquí, pero el lector interesado puede encontrar información sobre ellas en otros de nuestros trabajos. Las figuras 11 y 12 nos muestran dos de estos ejemplos; las dos barras dibujadas en cada una de ellas nos muestran a la misma barra en dos tiempos distintos.



figuras 8, 9, 10, 11 y 12

Estos volantines nos recuerdan a los espirógrafos que venden en la calle. Por cierto, por qué no pedimos otro café y platicamos ahora de lo prometido, es decir, de la relación de los volantines con el problema de la flotación de los cuerpos.

El problema de la flotación

Existe una versión bidimensional del problema de la flotación que se refiere a figuras planas y no a sólidos; físicamente podemos pensar en un cilindro de densidad uniforme y suponer que mientras su eje permanezca paralelo a la superficie del agua éste flote en equilibrio sin voltearse o moverse, en cualquier posición en la que se deje. O pensar en una figura plana en donde el agua es plana también; entonces la pregunta diría, en el primer caso, ¿deberá ser este cilindro necesariamente circular?, o, en el segundo caso, ¿deberá ser esta figura de manera necesaria un círculo? De aquí en adelante será precisamente en esta versión bidimensional en donde centraremos nuestra atención.

Antes de continuar pongamos en claro algunas cosas. Primero, la noción de densidad uniforme se refiere a que estamos pensando en cilindros hechos de manera homogénea del mismo material, todo de madera o todo de plástico, etcétera. Esta densidad se mide con un número, al que llamaremos ρ; entonces, si consideramos una figura Φ de área A y la ponemos a flotar en varias posiciones, el hecho que la densidad de Φ sea ρ significa simplemente que la parte que está bajo el agua tiene un área ρA; por ejemplo, si la densidad es Φ, esto significará que al ponerla a flotar en cualquier posición, el área de la parte mojada es siempre la mitad del área total.

Si pedimos además que la figura flote en equilibrio en cualquier posición Φ la Ley de Arquímedes nos dice que esto significa que la línea que pasa por el centro de masa G de la figura, y por el centro de masa de la parte de la figura que está bajo el agua es perpendicular a la línea del agua (figura 13). Quisiéramos proponerle un interesante experimento: deje usted flotar a Φ en una posición dada; pinte de rojo el punto en donde se encuentra el centro de masa de la parte que está bajo el agua; cambie de posición y marque con un segundo punto rojo el centro de masa de la parte que en esta nueva posición se encuentra bajo el agua; cambie de nuevo de posición y repita esta operación para obtener un tercer punto. Si usted se queda toda la noche marcando de esta manera puntos rojos, notará que éstos, poco a poco, irán describiendo una curva roja a la que llamaremos la curva de los centros de masa y que tiene las propiedades que dedujo Auerbach hace mucho tiempo (figura 14).

Si coloca de nuevo la figura en una posición dada y por el punto rojo correspondiente pinta una línea azul que sea paralela al nivel del agua, obtendrá los siguientes resultados. Utilizando un poderoso microscopio con mucho aumento, pero cuyo campo visual permita ver sólo una pequeña parte de la figura alrededor de este centro de masa, será prácti-

“Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio —sin voltearse— en cualquier posición en la que se deje, ¿deberá ser éste necesariamente un esfera?”

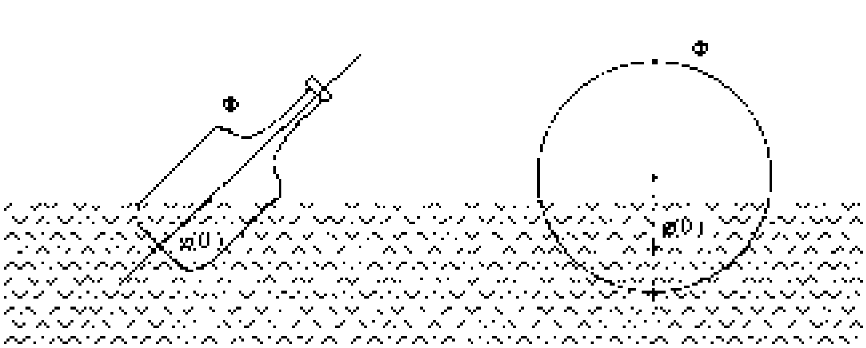


figura 13

camente imposible distinguir la línea azul de la curva roja de los centros de masas.

En términos matemáticos esto significa que por cada punto de la curva de los centros de masa, la tangente a la curva es paralela a la correspondiente línea del agua.

Observe ahora con cuidado la curva roja de los centros de masa, note que ésta está muy curvada en algunas partes y poco curvada en otras. ¿De qué dependerá qué tan curvada sea la curva? La respuesta es verdaderamente sorprendente y como todas las cosas profundas muy simple.

Note primero que si colocamos la figura en una posición, el nivel del agua dibuja una línea sobre la figura, la cual llamaremos cuerda de flotación. Resulta que la curvatura de la curva roja en un punto depende única y exclusivamente de la longitud de la cuerda que en este momento está marcando la línea del agua, es decir, si esta cuerda es larga la curva roja será poco curvada, y si la cuerda es pequeña la curva roja en el correspondiente punto será muy curvada. Es por demás decir que si la curva tiene siempre la misma curvatura entonces la longitud de todas las cuerdas de flotación será siempre igual y viceversa.

Una vez que sabemos esto podemos deducir que el hecho de que una figura flote en equilibrio en cualquier posición es lo mismo que decir que la curva roja es un círculo. Puesto que, de acuerdo con la ley de Arquímedes, la figura está en equilibrio en cualquier posición si y sólo si la línea que pasa por el centro de masa de la figura y un punto de la línea roja es perpendicular a la línea del agua, que por lo anterior es paralela a la tangente de la curva roja de los centros de masa. Si medita usted un minuto notará que esto implica que una figura flota en equilibrio en cualquier posición si y sólo si todos los rayos que salen del centro de masa de la figura son perpendiculares a la curva de los centros de masa.

Si usted dibuja una curva con la propiedad de ser perpendicular a todos los rayos que salen de un punto fijo verá que la única posibilidad es que esta curva sea un círculo con centro en este punto. Así, pues, una figura está en equilibrio en cualquier posición si y sólo si la curva roja de los centros de masa es un círculo. En particular el círculo satisface esto.

Por otro lado, también sabemos que si la curva roja de los centros de masa es un círculo entonces tiene la misma curvatura en todo punto si y sólo si todas las cuerdas de flotación miden lo mismo. Así hemos llegado a la siguiente conclusión: da exactamente lo mismo decir que una figura flota en equilibrio en cualquier posición que decir que la longitud de todas las cuerdas de flotación miden lo mismo.

Volvamos a pensar en una figura cualquiera (no necesariamente que flote en equilibrio en cualquier posición y por lo tanto con cuerdas de flotación de distinto tamaño) y pensemos ahora el siguiente experimento. Deje de nuevo flotar a la figura en alguna posición fija y observe la

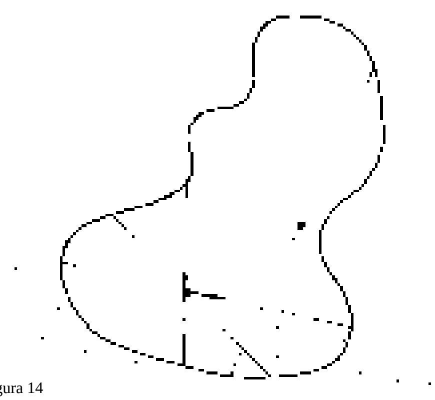


figura 14

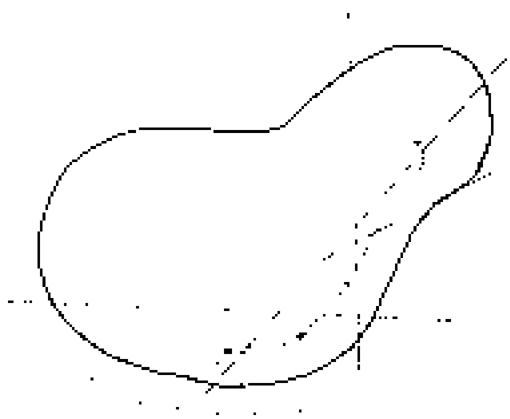


figura 15

cuerda de flotación. Pinte de verde el punto medio de esta cuerda de flotación; cambie de posición y vuelva a pintar de verde el punto medio de la nueva cuerda. Si usted tiene la paciencia de repetir este procedimiento para muchas posiciones irá observando que estos puntos verdes van formando una curva verde de los puntos medios (figura 15).

Tomemos de nuevo nuestro microscopio y observemos que alrededor de uno los puntos verdes resulta que es casi imposible distinguir a través del microscopio la curva verde y la línea del agua. Dicho de otra manera, la línea de agua es tangente a la curva verde de los puntos medios y esta propiedad es la que traduce el hecho de que la figura tenga densidad uniforme. Es decir, el hecho de que la línea del agua deje de un lado regiones con la misma área ρA es lo mismo que decir que la velocidad de la curva de puntos medios de las cuerdas es paralela a las cuerdas.

Ahora, la relación con los volantines de Zindler es obvia. Imagine usted que todas las curvas que dan lugar a nuestro volantín formaran una sola curva, entonces ésta tendrá la maravillosa propiedad de que todas las cuerdas de la figura que pasan por los lados del pentágono o polígono de *n* lados pueden ser pensados, por lo antes visto, como las cuerdas de flotación de la figura, y como éstas tienen la misma longitud, la correspondiente curva roja de los centros de masa es un círculo, y por lo tanto la figura flota en equilibrio en cualquier posición.

Count de Montizon, *El hipopótamo en los jardines del zoológico*, 1882.

Con esto tenemos que las figuras de Zindler, ejemplos 11 y 12, son figuras que flotan en equilibrio para densidad Φ, distintas del círculo, lo cual nos hace probar que la conjetura de Ulam es falsa. Por otro lado, desafortunadamente los volantines de Zindler de las figuras 9 y 10 no son ejemplos de figuras que flotan en equilibrio en cualquier posición, pues en el primer caso la figura tiene como inconveniente que las barras del volantín no son interiores a la figura, lo cual no permite que las correspondientes cuerdas sean de flotación, y en el segundo caso, la figura se cruza a ella misma de manera que no es propiamente una figura.

De cualquier forma todo lo anterior se traduce entonces a que, encontrar volantines de Zindler simples (sin autointersecciones) con cuerdas interiores distintas del círculo nos dan ejemplos de figuras que flotan en equilibrio en cualquier posición. Si usted encuentra un volantín de Zindler en donde sus *n* barras son interiores y no tiene autointersecciones, no sólo se hará rico con las ganancias de su juego, sino que podríamos incluir su hallazgo en nuestro libro del Café Tacuba.

Deborah Oliveros y Luis Montejano
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional autónoma de México

Bibliografía

• Auerbach, H., 1938, “Sur un probléme de M. Ulam concernant l’ equilibre des corps flottant”. *Studia Math.* 7: 121-124.
• Boltyanskii,V.G. and Yaglom, I.M., 1961, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.
• Bracho J., Montejano L., Oliveros D., “Carrousels, Zindler Curves and the floating Body Problem” (artículo enviado a revisión en junio 1998).
• Mauldin. R.D., 1981, *The Scottish Book; Mathematics from the Scottish Café*, Birkauser, Boston.
• Montejano P. L., 1989, *La Cara Oculta de las Esferas*. Colección La Ciencia desde México, núm. 75. Fondo de Cultura Económica, México.
• Oliveros B.D., 1997, *Los Volantines: sistemas dinámicos asociados al problema de la flotación de los cuerpos*. Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias UNAM.