¿Es o se parece?

ANA IRENE RAMÍREZ GALARZA

Una curva muy familiar para cualquier persona y tan común como la circunferencia, es la correspondiente a una cuerda suspendida entre dos postes. La vemos en los cables de luz, en las sogas de tender y en la cadena que nos impide el paso a algún lugar.

Sin embargo, lo más probable es que ignoremos su nombre, verdaderamente obvio si nos remontamos a la raíz de la palabra. Se llama catenaria, del latín *catena,* cadena.

Mi interés por escribir este artículo se explica no solo porque me gusta la geometría, sino porque el grado de desconocimiento sobre las curvas, aun las curvas planas, es tal que permite a la catenaria ser propuesta por los autores de un texto de autoinstrucción para bachillerato como ejemplo de... ¡parábola!

Al comentarlo con un grupo de profesores, uno de ellos me informó que el mismo error había sido cometido en la antigüedad por un sabio griego.

Pase por los griegos de la antigüedad, pero actualmente no hay excusa posible para un profesor de matemáticas, y menos si el error se asienta en un texto de autoinstrucción, pues el alumno autodidacta difícilmente tiene a la mano otros libros o personas con quienes consultar.

Tal vez el origen de la confusión del sabio griego y de los autores del texto mencionado sea que tanto en la trayectoria del tiro parabólico como en la forma de un cable suspendido, interviene de forma determinante la gravedad.

Pero una cosa es que dos curvas se parezcan y otra muy distinta es que sean iguales.

El desconocimiento sobre las curvas tiene un motivo muy simple: en los textos escolares, incluso a nivel bachillerato, rara vez se menciona una curva que no sea cónica.

Vemos espirales, pero nadie nos dice que hay una manera matemática de escribirlas, de estudiarlas, de distinguirlas. Y aunque al desenrollar un alambre para utilizarlo tenemos (casi) una hélice, no pensamos en que se trata de una curva no plana.

De hecho, el estudio de la geometría ha sido relegado por varias causas y tal vez una muy importante sea la de que relaciona materias distintas, como la física y las matemáticas y técnicas diversas, como mecánica, cálculo, álgebra y geometría; nuestro sistema escolar favorece una exposición artificialmente especializada, cuando una parte vital de la enseñanza debería ser justamente la de relacionar disciplinas diversas. Es necesario un poco de esfuerzo, pero suele ser muy enriquecedor.

Ahora veamos: si estas curvas son realmente ejemplos de parábolas ¿por qué nunca antes nos dijeron que las sogas de tender, las cadenas colgantes y los cables de luz entre dos postes, tienen la forma de una parábola? Pues, simplemente, porque la catenaria y la parábola son, como lo demostraremos, curvas distintas.

Ana Irene Ramírez Galarza: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

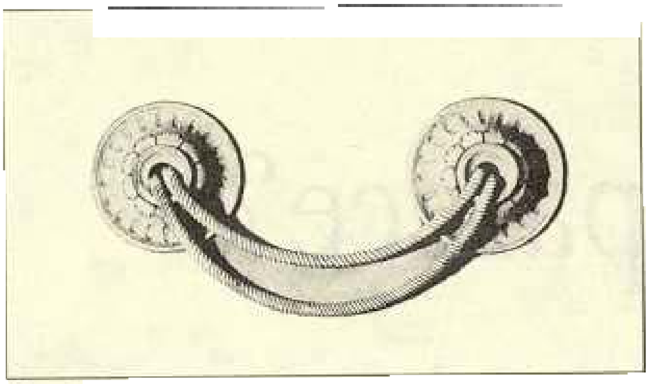


Figura 1

El problema es cómo comparar ambas curvas. La idea central para compararlas es hacerlo vía sus rectas tangentes; más precisamente, seguiremos a Liustérnik para obtener una expresión de la pendiente de la recta tangente en un punto de la catenaria y demostraremos que no hay parábola alguna que acepte como familia de rectas tangentes a las obtenidas en el caso de la catenaria.

Luego, para compensar al lector de los cálculos, presentaremos la superficie de revolución generada por una catenaria, llamada catenoide, y que puede ser fabricada con un par de arillos de alambre y agua jabonosa.

Supondremos que el cable de la catenaria es flexible pero no elástico; también supondremos que es homogéneo, es decir, trozos de igual longitud tienen pesos iguales. Al fijar el cable entre dos postes, éste queda bajo la acción de la fuerza de la gravedad y las de tensión, debido a que está sujeto a cada poste.

El principio físico del mínimo esfuerzo asegura, en este caso, que hay una posición estable para el cable: uno puede hacer el experimento de mover el cable en formas distintas y, cuando el balanceo termina, el cable toma siempre la misma posición, debido al equilibrio de las fuerzas que obran sobre él.

Además, si ya quieto el cable lo fijamos en los puntos B y B', en lugar de A y A' (lo cual implica acortar el cable, como lo muestra la figura 2), la forma de la catenaria no cambia, porque en cada punto las fuerzas están equilibradas. Y así como es posible tomar un arco más corto de la catenaria, también es posible extenderlo, es decir, la catenaria AA' puede considerarse parte de una catenaria infinita.

Si tomamos el punto más bajo, C, llamado *vértice* de la catenaria, y trazamos por él una recta vertical, los arcos CA' y CA son simétricos respecto a esa recta si A y A' están a la misma altura.

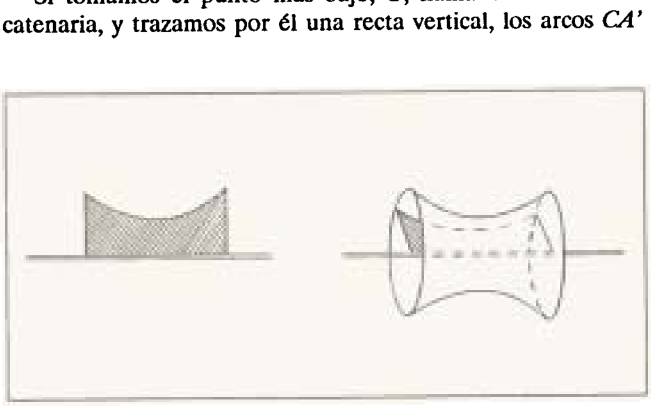


Figura 2.

Para obtener una ecuación que caracterice a la catenaria, analicemos cómo actúan las fuerzas en el cable. Ya que la forma de la catenaria no depende de los puntos de sujeción, podemos elegir dos cualesquiera; conviene elegir al vértice C como uno de los puntos de sujeción, pues como la fuerza de tensión en cada punto tiene la dirección de la tangente, la fuerza $\mathbf{F_0}$ en el punto C tiene la dirección horizontal y magnitud $\mathbf{F_0}$ (véase la figura 3) y eso simplificará la ecuación.

La fuerza de gravedad actúa en todos los puntos, así que podemos considerar la resultante $\mathbf{R}$, que tiene dirección vertical con sentido hacia abajo y magnitud $\mathbf{R}$ (nótese que el centro de gravedad no está en el cable). La fuerza $\mathbf{F}$, que actúa en el punto A, tiene una dirección que forma un ángulo α con la dirección horizontal y que corresponde a la tangente a la catenaria en el punto A.

Como las fuerzas están en equilibrio, la magnitud de la componente horizontal de $\mathbf{F}$, $F\cos\alpha$, debe ser igual a la magnitud de $\mathbf{F_0}$:

$$F_0 = F\cos\alpha \qquad (1)$$

y la magnitud de la componente vertical de $\mathbf{F}$, $F\operatorname{sen}\alpha$, debe ser igual a la magnitud de $\mathbf{R}$:

$$R = F\operatorname{sen}\alpha \qquad (2)$$

La magnitud R de la fuerza resultante es igual a la masa m de la porción CA del cable multiplicada por la constante g de aceleración de la gravedad:

$$R = mg.$$

En vista de la suposición inicial sobre la homogeneidad del cable, si la densidad es d y la longitud es s, la masa total es:

$$m = ds,$$

por lo que la ecuación (2) puede reescribirse como

$$dsg = F\operatorname{sen}\alpha.$$

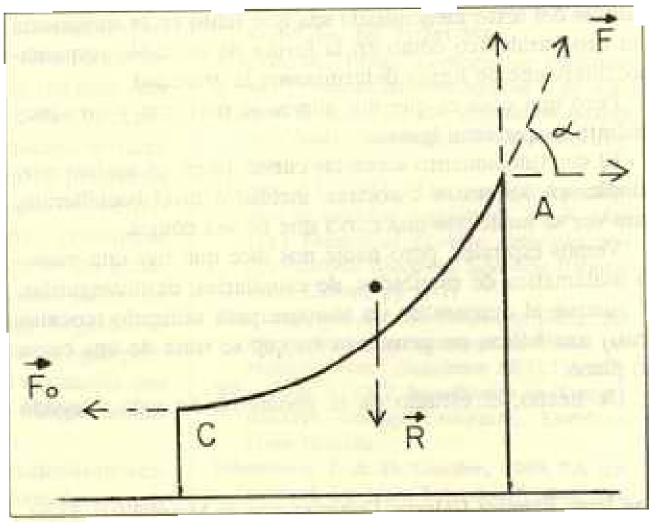


Figura 3

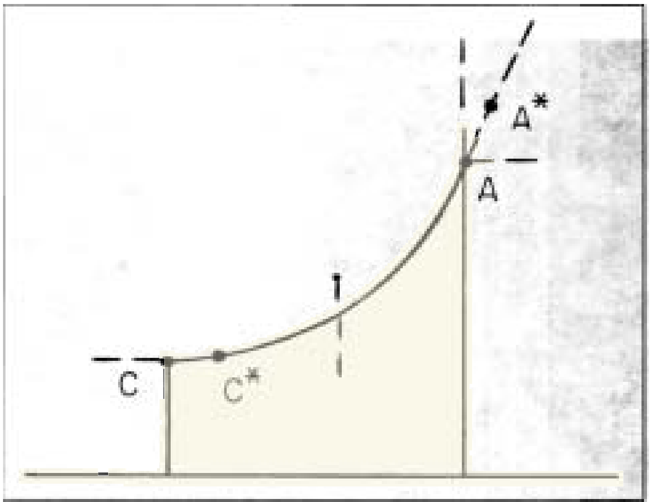


Figura 4.

Para llegar a la ecuación deseada, es necesario hacer ahora otro tipo de consideración. Imaginemos que desplazamos el tramo CA sobre la catenaria ampliada; cada uno de sus puntos recorre un arco de la misma longitud, h, hasta alcanzar la posición C^*A^*.

Si denotamos por T el trabajo total realizado para desplazar el cable, podemos calcularlo así: el trabajo realizado en el punto A por la fuerza $\mathbf{F}$ es Fh, y el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F_0}$ en el punto C es $-F_0h$ (porque nos movemos en sentido contrario a la fuerza $\mathbf{F_0}$), entonces el trabajo total es

$$T = (F - F_0)h \tag{3}$$

Otra manera de calcular el trabajo total realizado al desplazar el cable, es considerar la diferencia entre el arco original CA y el arco desplazado, C^*A^*, la cual consiste en la aparición del tramo AA^* en lugar del tramo CC^*

Ambos tramos tienen la misma masa, dh, pero distinta altura: y_0 para el punto inicial C del tramo CC^*, y para el punto inicial A del tramo AA^*. Por lo tanto, el trabajo total da como resultado llevar el tramo CC^* de altura y_0 al tramo AA^* de altura y, es decir,

$$T = Fd = mg(y - y_0) = dhg(y - y_0). \tag{4}$$

De las ecuaciones (3) y (4) obtenemos, cancelando h,

$$F - F_0 = gd(y - y_0). \tag{5}$$

En el caso especial en que la altura de C sea

$$y_0 = \frac{F_0}{gd},$$

la ecuación (5) se simplifica porque, como puede verificarse con la sustitución, el coeficiente de F_0 se anula, dando como resultado

$$F = gdy.$$

Esa posición especial de la catenaria se denomina *posición canónica*, precisamente porque da lugar a una expresión sencilla que facilita el análisis. Por ejemplo, de la ecuación (6) es inmediata la siguiente propiedad de la catenaria:

Si una catenaria está en posición canónica, la tensión en cada punto es proporcional a su ordenada.

Para obtener la ecuación deseada de la catenaria, solo falta relacionar la ecuación (1) con la (6); para ello multiplicamos ambos lados de (1) por $\frac{1}{gd}$:

$$\frac{F_0}{gd} = \frac{F}{gd}\cos\alpha$$

y como para la catenaria en posición canónica tenemos $y_0 = \frac{F_0}{gd}$, tomando en cuenta (6) podemos escribir la última ecuación como

$$y_0 = y\cos\alpha. \tag{7}$$

Esta relación debe ser satisfecha por cualquier punto de la catenaria, donde α es el ángulo de inclinación de la tangente a la catenaria en el punto genérico A de ordenada y.

Con esta ecuación ya podemos demostrar que la catenaria no es una parábola.

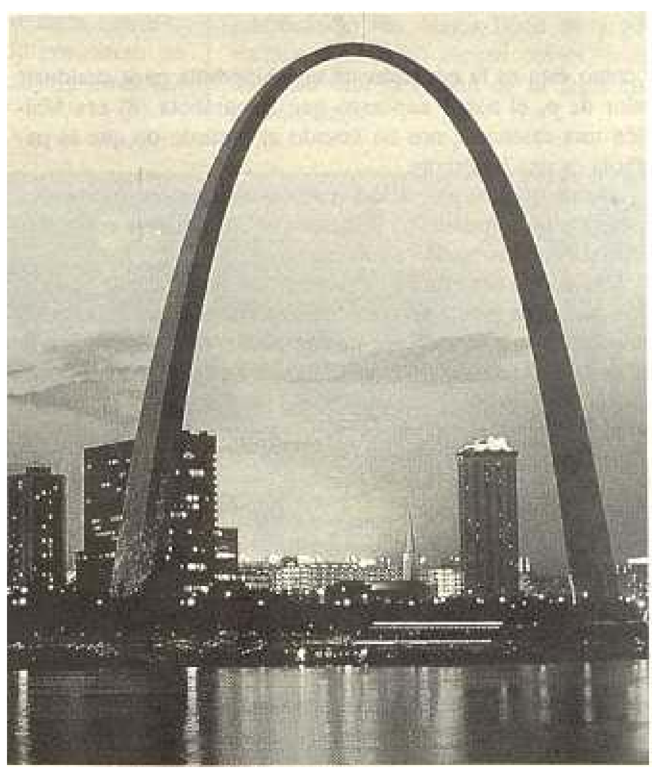
La ecuación de una parábola cuyo eje focal es vertical, que se abre hacia arriba y tiene vértice en $(0, y_0)$ es:

$$x^2 = 4p(y - y_0), \tag{8}$$

donde p es la mitad de la distancia del foco a la directriz.

Si despejamos y resulta

$$y = \frac{x^2}{4p} + y_0$$



La pendiente de la tangente a esta parábola en el punto (x, y), se obtiene derivando respecto a x la ecuación anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2p}$$

Si esta catenaria fuera la parábola de vértice C que pasa por A, las tangentes en ese punto, obtenidas a partir de cualquiera de las ecuaciones, deberían coincidir; eso significa que para la p correspondiente tendríamos

$$\tan\alpha = \frac{x}{2p} \tag{9}$$

Pero como el coseno y el seno de cualquier ángulo satisfacen la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1,$$

si dividimos entre $\cos^2\alpha \neq 0$ tenemos la identidad

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

El valor de tan α está determinado por (9), y el de cos α por (7) y al sustituirlos en la última igualdad resulta

$$1 + \frac{x^2}{4p^2} = \frac{y^2}{y_0^2}$$

que es equivalente a

$$\frac{y^2}{y_0^2} - \frac{x^2}{p^2} = 1,$$

y como ésta es la ecuación de una hipérbola para cualquier valor de p, el haber supuesto que la parábola (8) era también una catenaria, nos ha llevado al absurdo de que la parábola es una hipérbola.

Ahora que hemos demostrado que tenemos una curva distinta a la muy familiar parábola, es conveniente consignar la propiedad prometida de la catenaria.

Una forma sencilla de "visualizar" la superficie de revolución generada por la rotación de una curva plana en torno a una recta contenida en ese mismo plano, es imaginar que la recta es un alambre y que el pedazo de plano entre la curva y el alambre gira en torno a éste, como lo muestra la figura 5.

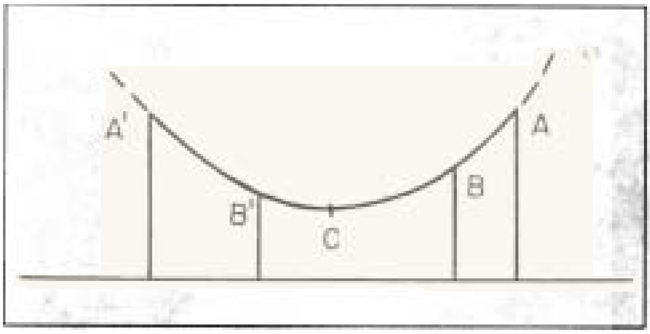


Figura 5.

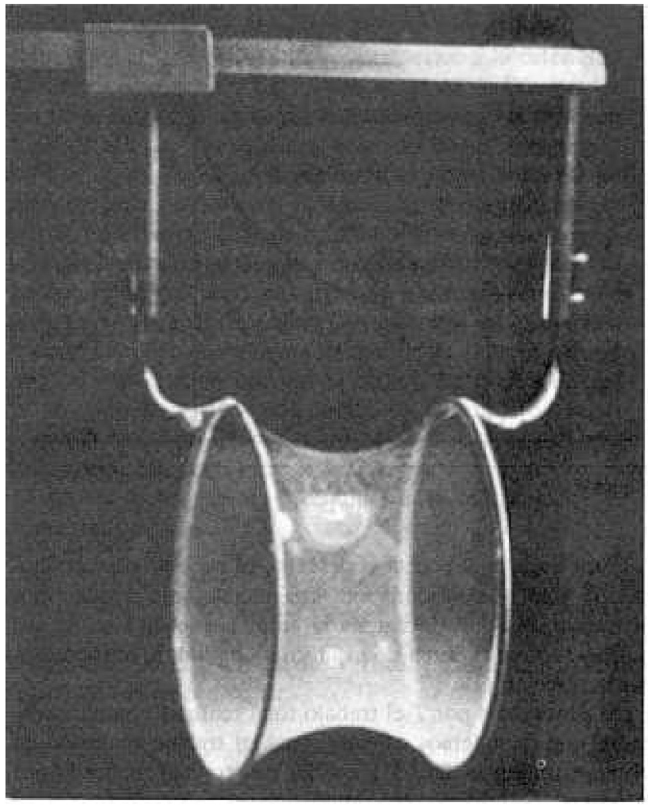


Figura 6.

La superficie de revolución generada por la catenaria se denomina *catenoide* (véase la figura 6), y tiene una propiedad que comparten todas las superficies llamadas *mínimas*.

La propiedad se entiende mejor si recurrimos a dos aros para hacer pompas de jabón: al sumergir juntos los dos arillos en la solución jabonosa y separarlos un poco manteniéndolos paralelos, la forma de la película de jabón es la de una catenoide.

Si movemos suavemente la película de jabón para intentar modificar su forma, la película volverá siempre a su posición inicial, porque es en ella donde se minimiza el área de la superficie jabonosa (y por lo tanto la tensión en la película), que en cualquier otra posición es mayor.

Desde luego, ya no haremos la demostración de que la forma de la película de jabón es una catenoide, pero el lector interesado puede recurrir al folleto de Liustérnik, p. 109, y si, como era mi intención, el interés abarca más tópicos sobre geometría, sería muy indicado consultar uno de los libros más bellos de geometría, el escrito por Hilbert y Cohn Vossen del cual se extrajo la fotografía de la figura 6.

Referencias

Hilbert & Cohn Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Co. EEUU, 1953.

Liustérnik, L. A., *Líneas más cortas. Problemas de variaciones*, Lecciones Populares de Matemáticas, MIR. Moscú, 1979.