Paradojas, intuición y lógica

JOSÉ ALFREDO AMOR

Introducción

La *intuición* es una apreciación inmediata de la realidad, que hace surgir una idea o concepto, de modo espontáneo y natural, de acuerdo a nuestra experiencia y sin que medie el razonamiento o la experimentación. Es una percepción clara e instantánea de una idea o de un hecho, que puede ser confirmada o refutada por la realidad misma o por el razonamiento.

El *sentido común* es la intuición que pertenece a casi toda la gente; es la sensatez admitida por la mayoría de las personas; podríamos decir que es la intuición colectiva.

Lo lógico es lo relativo a la lógica y la lógica matemática inicialmente se considera un modelo matemático del razonamiento correcto o válido. La lógica matemática ha tenido un desarrollo posterior nutriéndose de la teoría intuitiva de conjuntos y del álgebra universal, formando una rama más de la matemática moderna, que incluye a la lógica de primer orden, la teoría de modelos, la teoría de la prueba, la teoría de la recursión y otras.

El sentido común acerca de lo que es lógico y de lo que no lo es, muchas veces no coincide con el concepto lógico matemático de lo que es lógico y de lo que no lo es. Para ilustrar esta diferencia se darán algunos ejemplos de inferencias no-lógicas calificadas de "lógicas" por el sentido común y de inferencias lógicas calificadas de "no-lógicas" por el sentido común.

Una paradoja es una afirmación inverosímil o absurda para la intuición, que se presenta con apariencia de verdadera.

El objetivo principal de este trabajo es presentar algunas paradojas o contradicciones para nuestra intuición o sentido común, sobre el mundo real y sobre el mundo matemático, que realmente son golpes a nuestra intuición sobre conceptos e ideas básicas, sobre verdad y demostrabilidad y sobre lo que es lógico y lo que no lo es.

Los ejemplos de afirmaciones que pueden verse como paradojas y que presentaremos en este trabajo son de varios tipos:

1. Intuición sobre *proporciones físicas:* intuición *vs* realidad física.

José Alfredo Amor: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

2. Intuición sobre *razonamiento correcto:* intuición *vs* lógica matemática y consecuencia lógica.
3. Intuición sobre *demostrabilidad:* intuición *vs* lógica matemática.
4. Intuición sobre *el concepto de conjunto:* intuición *vs* lógica matemática.
5. Intuición y *la paradoja del mentiroso:* intuición *vs* el concepto de verdad.

Intuición sobre proporciones físicas

a. Considérese a la Tierra como una esfera perfecta e imagínese una cuerda ceñida alrededor del ecuador. Córtese esa cuerda en un punto, agréguese a ella *un metro* lineal de cuerda y colóquese concéntrica alrededor del ecuador. Habrá una separación entre la cuerda aumentada y el ecuador alrededor de todo el ecuador. Intuitivamente, ¿de cuánto es esa separación, aproximadamente? En forma intuitiva, ¿cuál es la respuesta aproximada? (Figura 1.)

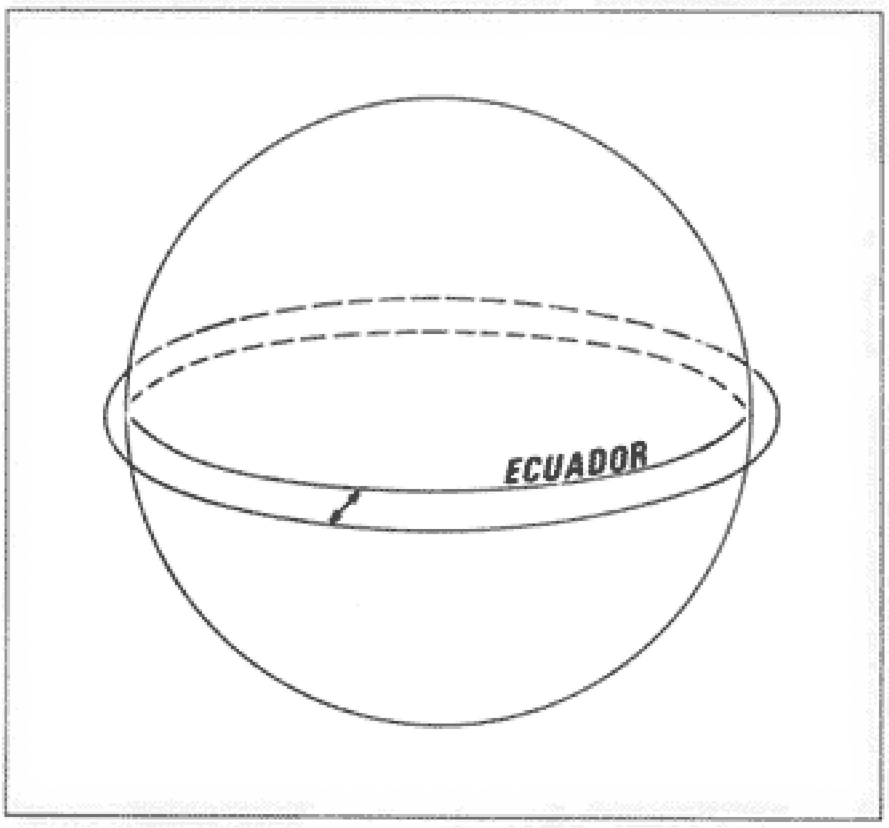


Figura 1.

b. Considérese a una naranja como una esfera perfecta y una cuerda ceñida alrededor del ecuador de la naranja. Córtese esa cuerda en un punto, agréguese a ella *un metro* lineal de cuerda y colóquese concéntrica alrededor del ecuador. Habrá una separación entre la cuerda aumentada y el ecuador de la naranja alrededor de todo el ecuador. Intuitivamente, ¿de cuánto es esa separación, aproximadamente? (Figura 2.)

c. En ambos casos se pide al lector una respuesta *aproximada* dada por la intuición; es decir *en forma espontánea* y *sin que medie el razonamiento.* El lector tendrá su respuesta, digamos S, expresada en unidades de longitud. Si el lector no tiene una respuesta intuitiva, por favor no siga. Medítelo y dé sin temor una respuesta intuitiva.

Posteriormente hacemos uso del razonamiento y calculamos esa separación en el caso a: si r es el radio de la esfera terrestre y R el radio de la circunferencia de la cuerda con un metro lineal más, tendremos que lo que queremos saber es la distancia $(R - r)$. Ahora bien, $2\pi R$ representa la longitud de la circunferencia con un metro más y $2\pi r$ la longitud de la circunferencia original del ecuador y entonces $2\pi R - 2\pi r = 1$ por construcción; de donde tenemos que $2\pi(R-r) = 1$ y finalmente que $(R-r) = \frac{1}{2}\pi \approx 0.1591$.

Así pues la separación entre la cuerda y el ecuador alrededor de todo el ecuador, es aproximadamente de ¡15.9 cm! Compare el lector esta medida con la medida S dada por la intuición. Es muy posible que haya una sorpresa con apariencia de paradoja. En tal caso lo que ocurre es que la intuición estaba equivocada. Una nueva sorpresa puede aparecer, al hacer la observación de que en el cálculo anterior es irrelevante el tamaño de r, es decir, la separación $\frac{1}{2\pi}$ es una constante para cualquier tamaño y en el caso b. la separación de la cuerda alrededor del ecuador de la naranja es exactamente la misma que en el caso a., aproximadamente ¡15.9 cm! Un caso particular es el hecho de que la circunferencia de longitud 1 tiene radio $\frac{1}{2\pi}$. Este ejemplo fue tomado de [6].

Intuición sobre razonamiento correcto

Un argumento o razonamiento es un conjunto ordenado, de dos o más afirmaciones, de las cuales se dice que la última, llamada conclusión, sigue a las anteriores, llamadas premisas.

Un argumento es correcto o válido si la conclusión se deriva como consecuencia lógica de las premisas.

Un ejemplo típico de argumento correcto es:

Todos los hombres son mortales.	afirmaciones anteriores
Sócrates es hombre	o premisas
∴ Sócrates es mortal.	conclusión

a. Considere el lector el siguiente argumento y diga si es lógico o correcto o si no lo es:

4 es número primo, si tiene exactamente dos divisores.
4 no tiene exactamente dos divisores. (Tiene tres: 1, 2 y 4)
∴ 4 no es número primo.

Si el sentido común indica que esa inferencia es "lógica", está equivocado, pues no lo es desde el punto de vista de la lógica; para aclarar esto, veamos otro ejemplo de la misma forma:

Juan vendrá, si hay un buen día.
No hay un buen día.
∴ Juan no vendrá.

Nótese que no es válido inferir que Juan no vendrá, ya que esto puede ser falso *aun cuando* sean verdad las dos afirmaciones anteriores; simplemente porque no está dicho qué hará Juan si no hay buen día. Obviamente tampoco es válido inferir que Juan vendrá.

Estas son inferencias no lógicas, calificadas de "lógicas" por el sentido común.

Hay que aclarar aquí, que un argumento es válido cuando in-

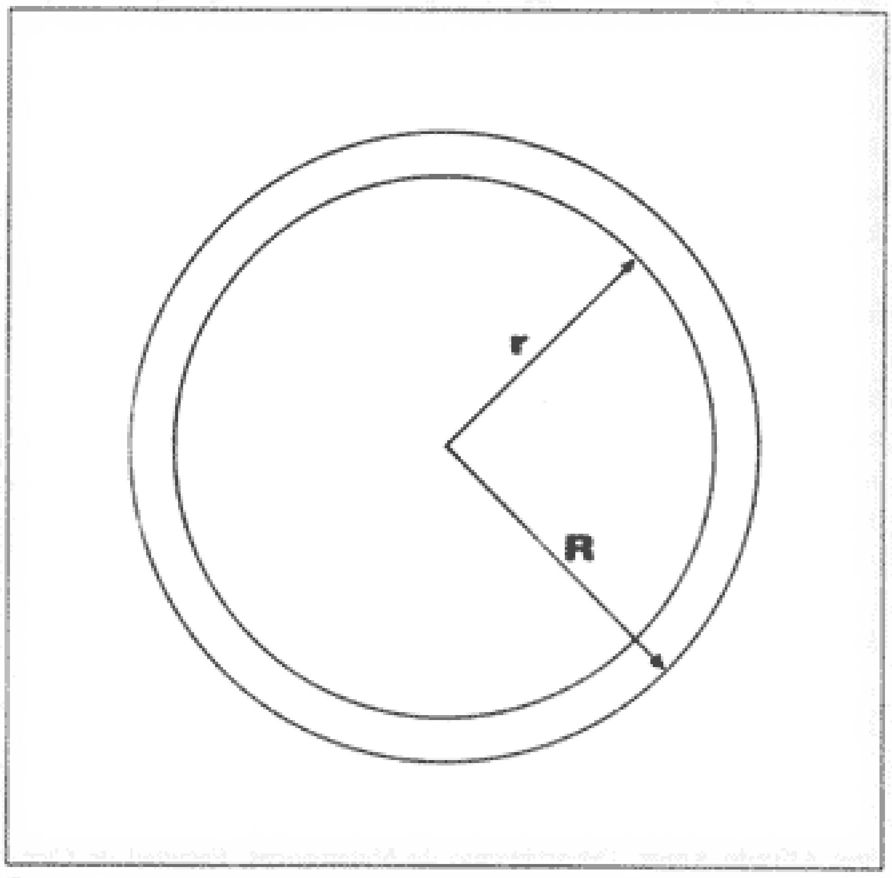


Figura 2.

dependientemente de la interpretación, la conclusión es *necesariamente verdadera* en el caso de que las premisas sean verdaderas; es decir, un argumento es válido si lleva *necesariamente* de verdadero a verdadero y no por casualidad, independientemente del significado de sus afirmaciones. Así pues, la verdad o falsedad de las premisas y de la conclusión, nada tiene que ver con la corrección lógica de un argumento; éste es correcto debido a su forma y no debido a su contenido o significado.

Para aclarar esto último, veamos un ejemplo más:

Todos los borogroves son kismis si alguien tirila.
Nito tirila y Pac es un borogrove.
∴ Pac es un kismi.

Este ejemplo fue pensado para que no fuera obvia una interpretación conocida; sin embargo, el lector estará de acuerdo en que, en el caso de que las primeras dos afirmaciones sean verdaderas (sin importar su interpretación) entonces *necesariamente* la conclusión será verdadera.

Esto debe aclarar por qué los dos ejemplos anteriores no son inferencias lógicas ya que no llevan de verdadero a verdadero en forma *necesaria*, sino que, si acaso llevan a verdadero, será por casualidad.

b. Considere el lector el siguiente argumento (con una sola premisa) y decida si es correcto o no lo es:

Cualquier barbero de Oaxtepec rasura a todos los hombres de Oaxtepec que no se rasuran a sí mismos y sólo a ésos.
∴ No hay barberos en Oaxtepec.

Nuevamente, la intuición o sentido común de lo que es lógico puede indicarnos aquí que el argumento es incorrecto; sin embargo estará equivocado pues en este caso, el argumento es correcto. Esta es una inferencia lógicamente correcta, calificada de "no lógica" por el sentido común.

Es fácil demostrar, por reducción al absurdo, que si la premisa es verdadera, entonces la conclusión es necesariamente verdadera.

Intuición sobre demostrabilidad

Los ejemplos que daremos aquí se refieren a demostrabilidad en teoría de conjuntos:

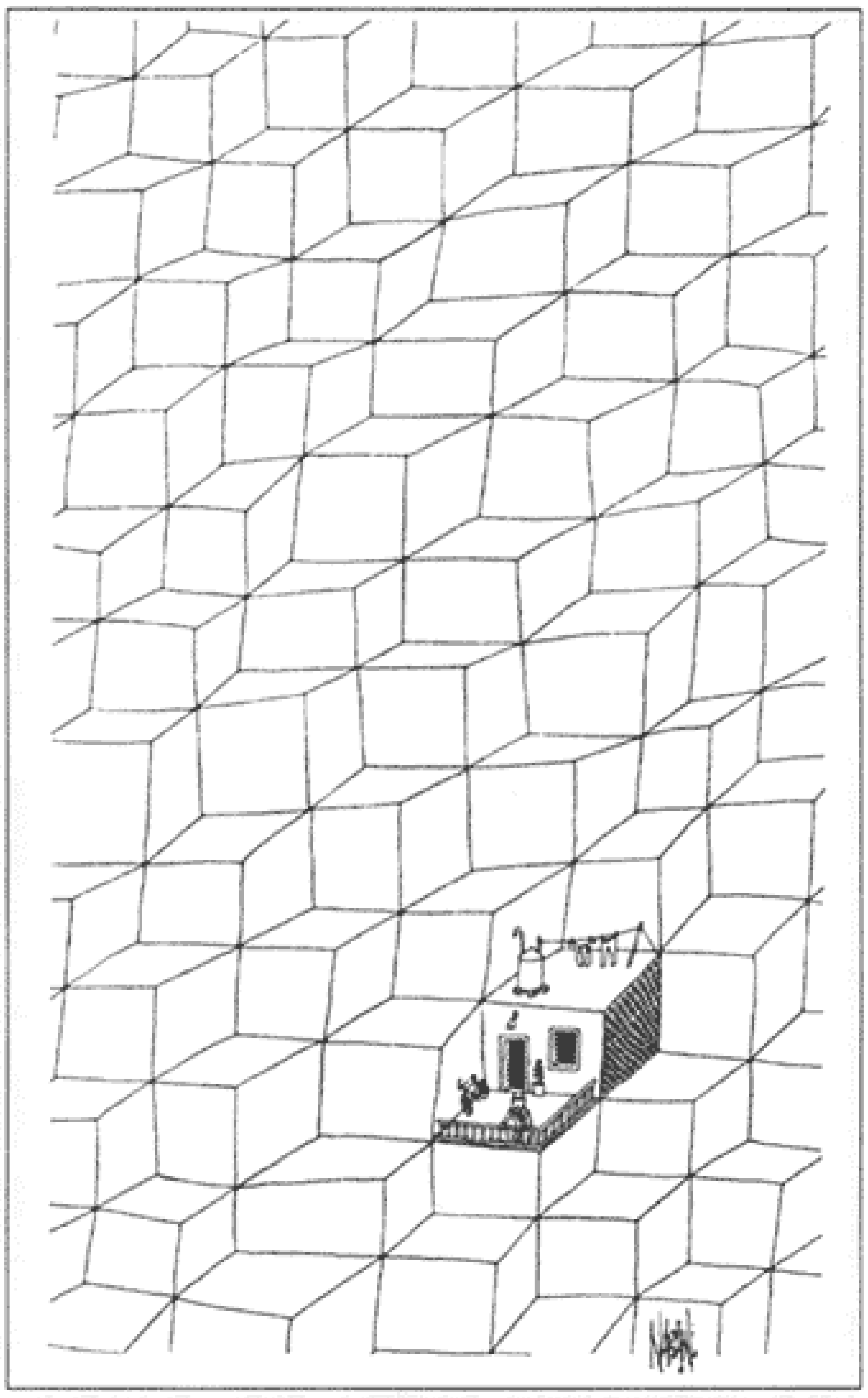
a. Considérense todos los buenos órdenes no isomorfos de N, el conjunto de los números naturales; es decir, considérense todas las maneras de bien ordenar a N salvo isomorfismo. Por ejemplo tres de tales buenos órdenes son:

0, 1, 2, 3, 4,.....
0, 2, 4, 6,........,1, 3, 5, 7,.......
0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...........,2, 3.

Considérense ahora todos los órdenes lineales o totales de N no isomorfos; es decir, todas las maneras de ordenar linealmente a N salvo isomorfismo. Es claro que:

i. Todo buen orden de N es orden lineal de N. Por lo tanto:

ii. El número de órdenes lineales de N es $\geq$ el número de buenos órdenes de N.



iii. Hay órdenes lineales de N que no son buenos órdenes, por ejemplo:

........,6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.
......9, 7, 5, 3, 1, 0, 2, 4, 6, 8,.......

¿Es mayor el número de los órdenes lineales no isomorfos de N que el número de los buenos órdenes no isomorfos de N, o son iguales los números de cada uno de ellos?

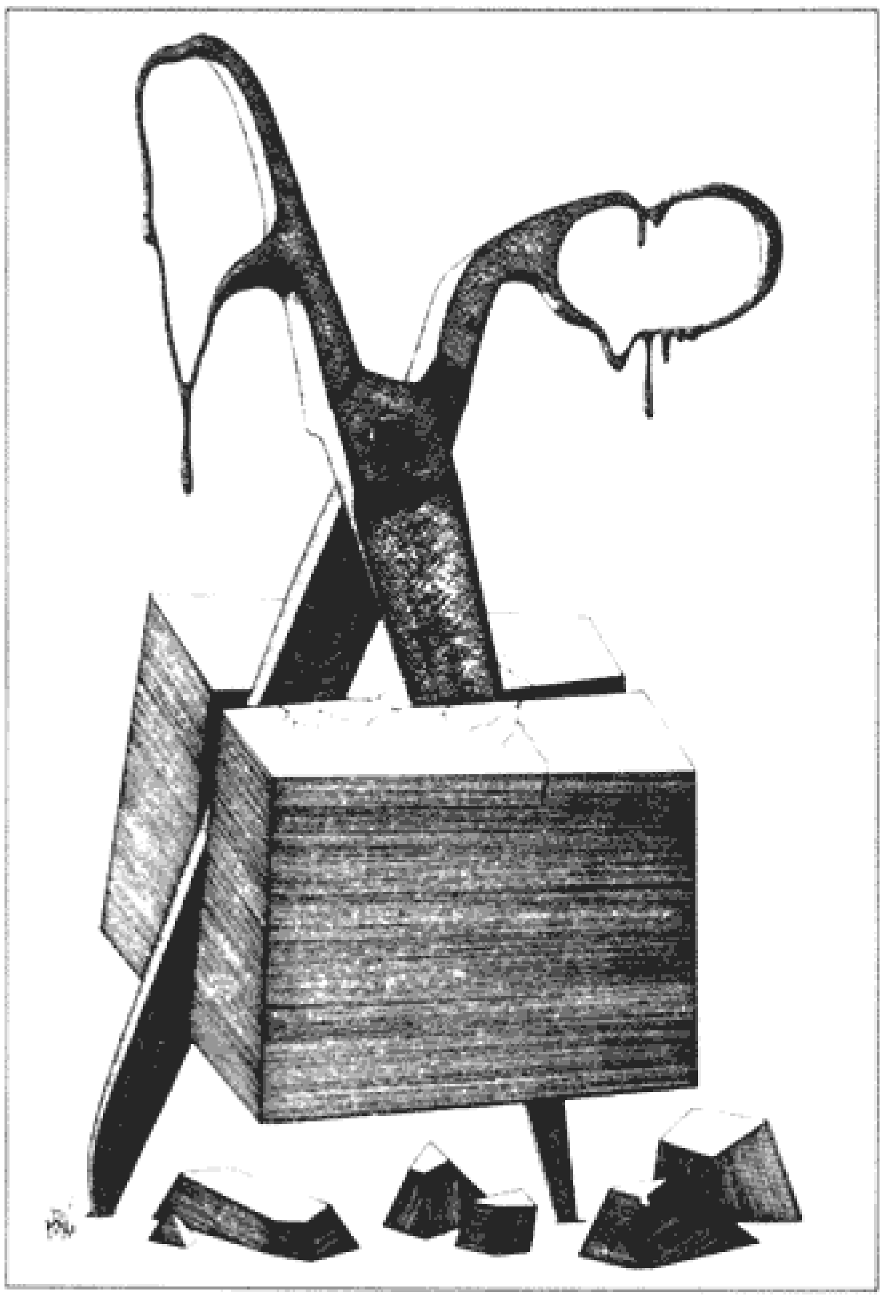
La intuición sobre lo demostrable puede indicarnos que alguno de los dos debe ser demostrable; nuevamente aquí la intuición está equivocada:

No sabemos la respuesta, pero además, ¡*no* la podemos saber!, ¡no se puede demostrar ninguna de las dos posibilidades!

b. Si A y B son conjuntos infinitos y A es biyectable con B, lo cual denotamos con $A \sim B$, entonces podemos demostrar que $P(A) \sim P(B)$:

Proposición. Si $A \sim B$ entonces $P(A) \sim P(B)$:

Supongamos $A \sim B$, con una biyección $f: A \longrightarrow B$. Definimos entonces $F: P(A) \longrightarrow P(B)$ tal que si $x \in P(A)$, $F(x) = f[x] = \{f(y) \mid y \in x\}$.



Es fácil verificar que $P(A) \underset{F}{\approx} P(B)$:

1-1) Si $x \neq x'$ y $y \in x - x' \Rightarrow f(y) \in F(x) - F(x') \therefore F(x) \neq F(x')$.

sobre) Si $z \in P(B) \Rightarrow z \subseteq B$ y sea $x_z = \{y \in A / f(y) \in z\}$
$\therefore F(x_z) = f[x_z] = \{f(y) / y \in x_z\} = Z$.

Se pregunta ahora la implicación inversa:

¿Si $P(A) \sim P(B)$ con A y B, conjuntos infinitos, entonces $A \sim B$?

Nuevamente, la respuesta es: no lo sabemos; pero además *no* lo podemos saber ¡es una afirmación indemostrable e irrefutable!

Lo anterior es equivalente a la pregunta formulada en términos de cardinales infinitos κ, λ, de la siguiente manera:

$$¿2^{\kappa} = 2^{\lambda} \Rightarrow \kappa = \lambda?$$

Se denota con $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ a los primeros números cardinales transfinitos, y estos cumplen la relación de orden estricto $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$ y $\aleph_0$ es el número cardinal del conjunto de los números naturales, así como de cualquier conjunto biyectable con él.

Si κ y λ son cardinales transfinitos, es posible (lógicamente posible) que $2^{\kappa} = 2^{\lambda}$ y $\kappa \neq \lambda$. Esto se basa en que es posible (lógicamente posible) que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ y que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ de donde en tal caso: $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ y, desde luego, es un hecho que $\aleph_0 \neq \aleph_1$, pues $\aleph_0 < \aleph_1$.

Intuición sobre el concepto de conjunto

Intuitivamente decimos que un conjunto es una colección de objetos que cumplen alguna propiedad.

Así, si P es una propiedad, entonces $\{x / x \text{ cumple } P\}$ es un conjunto.

Ésta es una formulación intuitiva, clara y útil del concepto de conjunto. Sin embargo, si consideramos la propiedad: "ser un conjunto y no pertenecer a sí mismo", tendremos el conjunto:

$$B = \{x / x \text{ es un conjunto y } x \notin x\}.$$

¿Es B realmente un conjunto? ¿Existe en el universo de los conjuntos?

Obsérvese que para todo objeto x, $x \in B \Leftrightarrow x$ es un conjunto y $x \notin x$.

Entonces para cualquier conjunto x, $x \in B \Leftrightarrow x \notin x$.

Si B es realmente un conjunto, en particular para B tenemos:

$$B \in B \Leftrightarrow B \notin B$$

lo cual es absurdo, por lo que no existe tal B como conjunto y no cualquier colección de objetos es un conjunto ¡y nuestra intuición estaba equivocada!

Esta es la famosa paradoja de Russell: *es el resultado de un razonamiento válido que nos muestra, por reducción al absurdo, que no existe el conjunto de todos los conjuntos, que no se pertenecen a sí mismos y que nuestro concepto intuitivo, claro y útil, es erróneo.*

Es muy interesante aclarar que la contradicción a la que se ha llegado, después de suponer que la colección B fuera un conjunto, no es contradicción de contenido conjuntista, sino que es una contradicción con la lógica. De hecho, suponer que existe $B = \{x / x \text{ es conjunto y } x \notin x\}$ niega una verdad universal, por lo cual la contradicción es contra la lógica. Tal verdad universal es la siguiente:

En *cualquier* universo de individuos y para *cualquier* relación binaria entre individuos de ese universo, *no hay ahí*, en ese universo, un individuo que tenga esa relación con todos los individuos de ese universo que *no* tengan esa relación consigo mismos y sólo con ésos.

En símbolos, si x, y varían sobre un universo cualquiera U de individuos y R es una relación binaria cualquiera entre individuos de U, entonces:

$$\neg \exists x \forall y \, [yRx \Leftrightarrow \neg yRy]$$

En una situación así, decimos que la afirmación anterior es un enunciado universalmente válido. Es decir, verdadero en cualquier interpretación.

Ahora, en particular, en el universo U de los conjuntos, si yRx se interpreta como "$y \in x$", se tiene que es una verdad lógica la de que no existe el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos.

Otras versiones populares de la paradoja de Russell se obtienen con diversas interpretaciones del Universo U y de la relación yRx, como por ejemplo:

a. Si U se interpreta como "los hombres de Oaxtepec" y yRx se interpreta como "x rasura a y", se tiene la verdad (en Oaxtepec) de que: "no hay un barbero en Oaxtepec que rasure a todos los hombres de Oaxtepec que no se rasuren a sí mismos y sólo a ellos"; ésta es la paradoja del barbero.

b. Si U se interpreta como "los adjetivos" y yRx se interpreta como "x se aplica a y", es decir, la propiedad denotativa de x se cumple para y, se tiene la verdad acerca de adjetivos de que "no hay un adjetivo que se aplique a todos los adjetivos que no se aplican a sí mismos y sólo a ésos"; ésta es la paradoja de Grelling: "no hay un adjetivo cuya propiedad denotativa se cumpla para todos los adjetivos cuya propiedad denotativa no se cumple para ellos mismos y sólo para ésos". Si un tal adjetivo se llama "heterológico", concluimos que no hay adjetivos heterológicos.

Los ejemplos anteriores y otros más, están dados en la siguiente tabla:

U	yRx	$\neg\exists x \forall y\ [yRx \Leftrightarrow \neg yRy]$
Los hombres de Oaxtepec	x rasura a y	No hay barberos en Oaxtepec que rasuren a todos los que no se rasuran a sí mismos y sólo a ésos.
Los catálogos de catálogos	x cataloga a y	No hay un catálogo que cataloga a todos los catálogos que no se catalogan a sí mismos y sólo a ésos.
Los conjuntos (Russell)	$y \in x$	No hay un conjunto al que pertenezcan todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos y sólo ésos. Es decir: No hay un conjunto $R=\{x\ /\ x \notin x\}$.
Los adjetivos (Grelling)	x denota a y	No hay un adjetivo que denote a todos los adjetivos que no se denotan a sí mismos y sólo a ésos. Es decir no existe el adjetivo heterológico.
Comunidad de los socios de clubes con nombres de socios	y es socio del club con el nombre de x	No hay persona tal que, socios del club con su nombre sean los que no son socios del club con su nombre y sólo ésos.
Los vértices de una gráfica dirigida G	x ——> y (x está conectado hacia y)	No hay vértice de G tal que esté conectado hacia todos los vértices que no están conectados hacia sí mismos y sólo hacia esos

Así pues, la lógica de primer orden muestra que:

i. Es una imposibilidad lógica la existencia del conjunto de Russell.

ii. El principio de abstracción o compresión: para cualquier propiedad P, existe el conjunto de los objetos que cumplen la propiedad P; o bien en símbolos, si $B(x)$ denota una propiedad acerca de x:

$$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow B(x))$$

es falso en general.

iii. La teoría intuitiva de conjuntos es *inconsistente*.

iv. El concepto de conjunto como "colección de individuos que cumplen una propiedad" o como "la extensión de una propiedad", aunque intuitivamente muy claro, *es erróneo*, lo que muestra que la intuición falla.

De lo anterior, la paradoja, como problema, está totalmente aclarada y no es un problema porque tenemos que aceptar que la concepción anterior de conjunto era equivocada.

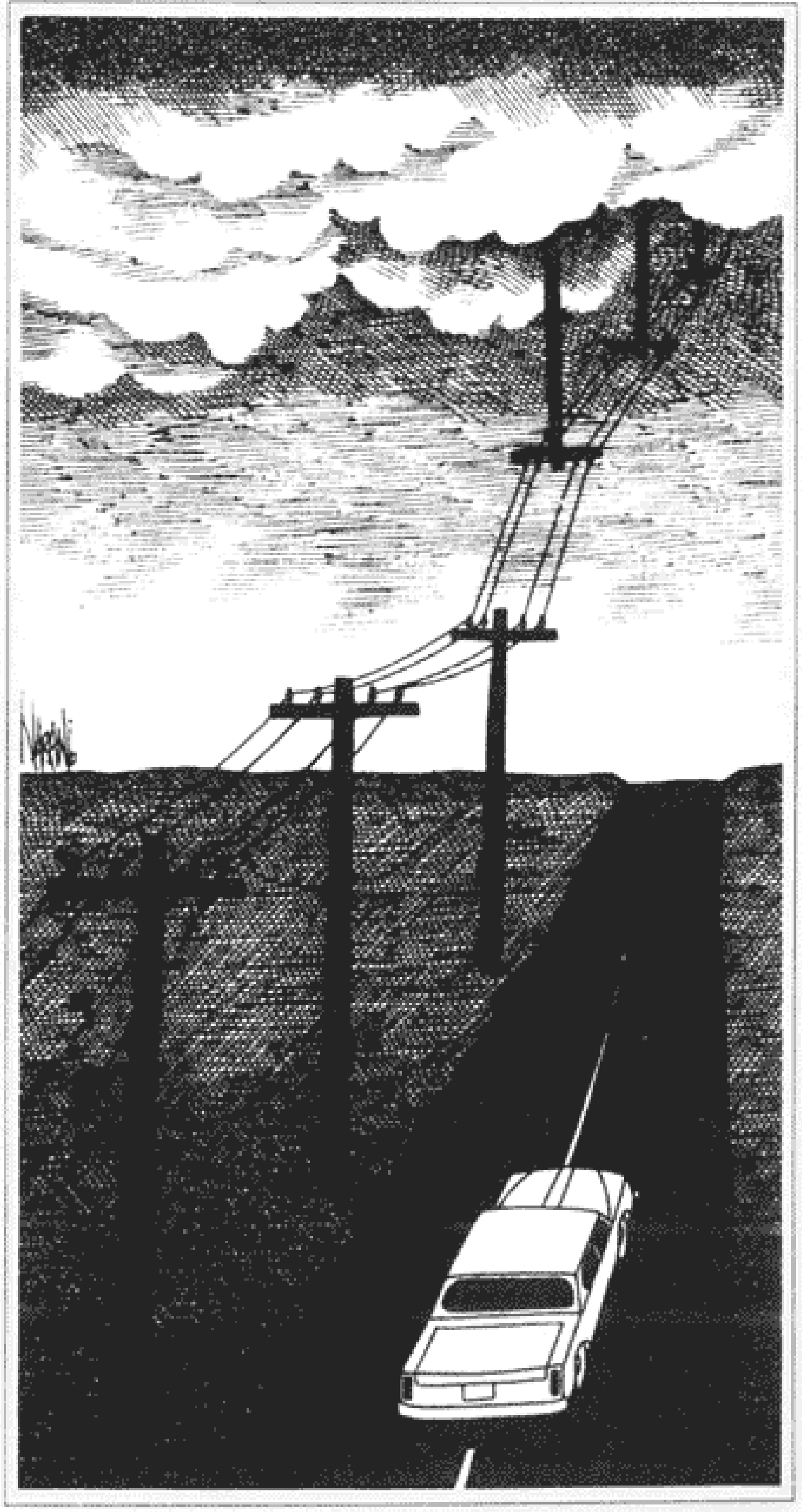
Si insistimos en mantener el principio de abstracción, entonces sí sigue siendo un problema: el de modificarlo sin cambiar la concepción de conjunto, y sin tener inconsistencias.

La mejor forma de conservar un principio de abstracción *restringido*, es la siguiente:

Para cualquier *conjunto* A y para cualquier propiedad P, existe el conjunto de los objetos *de* A que cumplen la propiedad P.

Al aplicar lo anterior, A puede ser un conjunto suficientemente grande para que se considere como universo local o universo del discurso. Sin embargo esto no resuelve el problema de saber si realmente A es un conjunto. Esto lo tenemos que suponer o probarlo en otro contexto más amplio.

No hay que confundir a las paradojas con las falacias o "pruebas" falaces que parten de afirmaciones falsas, o usan inferencias *no lógicas*.



Ejemplos de ellas son las "pruebas" de que *2=1* en las cuales se hacen divisiones entre cero, y las famosas paradojas de Zenón en las cuales hay una falacia en el argumento, por ejemplo que toda suma con un número infinito de sumandos es infinita, lo cual es falso en general.

A continuación damos algunas aparentes paradojas que realmente no lo son:

a. Supongamos que Epiménides es cretense y dice: "todos los cretenses son mentirosos".

No hay paradoja alguna, simplemente se concluye, por reducción al absurdo, que:

i. Epiménides es un mentiroso.

ii. Algunos cretenses *no son* mentirosos.

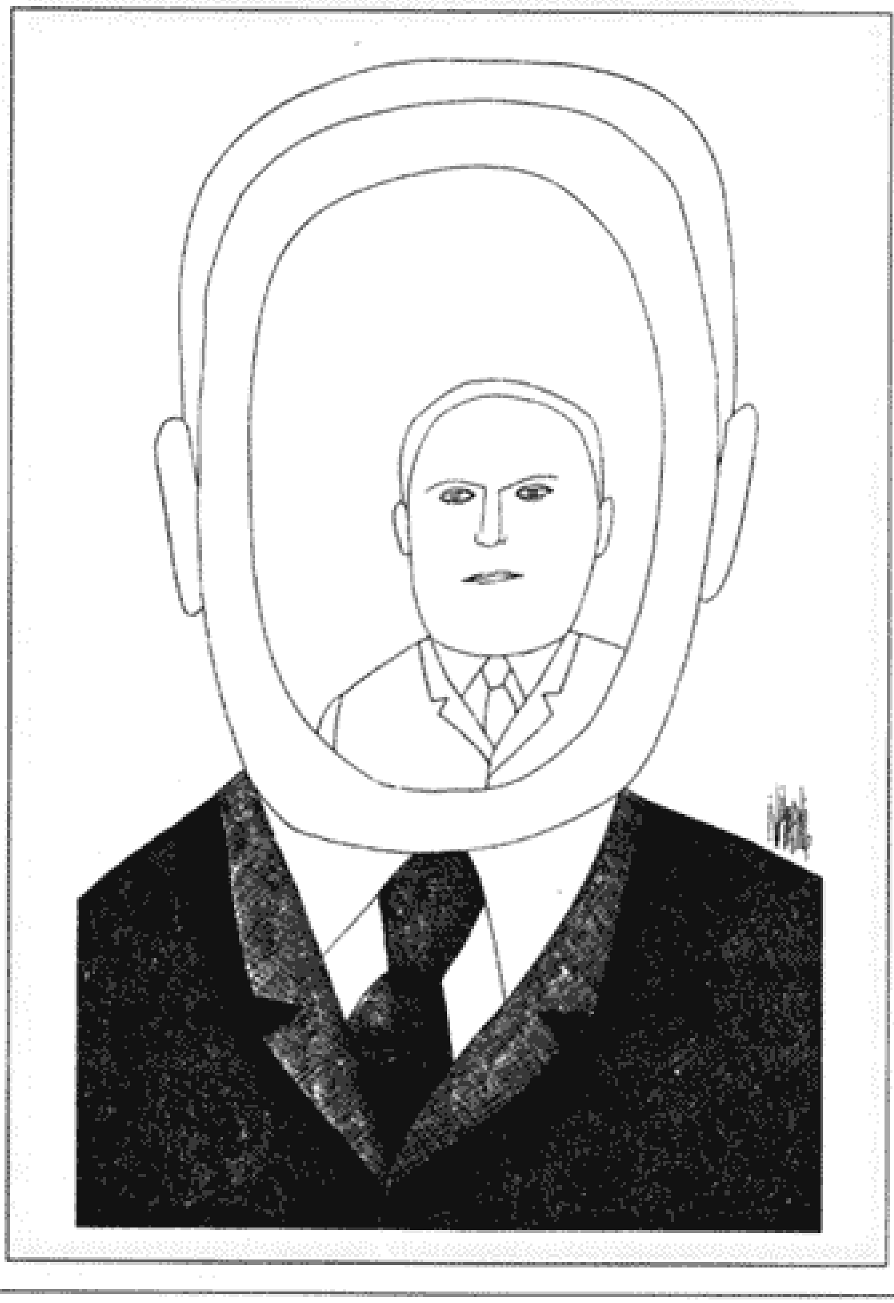
b. Imaginemos una isla en donde todos los individuos son o mentirosos o veraces y un nativo dice "yo soy mentiroso".

No hay paradoja alguna, simplemente, ahí *no* es posible que un nativo diga eso; es un engaño. (La prueba de ello es por reducción al absurdo.)

Intuición y la paradoja del mentiroso

Finalmente quiero discutir la más famosa paradoja; la llamada paradoja del mentiroso y su aclaración:

Si Epiménides fuera el único cretense y dice: "Todos los cretenses son mentirosos", entonces sí tendríamos una paradoja, equivalente a la versión de que una persona dice: "yo estoy mintiendo": si miente dice la verdad y si dice la verdad miente. No habría paradoja si suponemos además que fuera una persona consecuente o "invariante respecto a la verdad", con lo que tendríamos un caso análogo al caso b anterior. Pero si no suponemos eso, tenemos una paradoja, es decir, una contradicción con nuestra intuición, en este caso con nuestra intuición sobre el concepto de verdad.



La siguiente versión equivalente, es a la que nos referiremos como la paradoja del mentiroso; considérese la siguiente oración:

ESTA ORACIÓN ES FALSA (1)

¿Esa oración es verdadera o falsa?

Para decidir si una oración es verdadera, tenemos que entender el significado de la oración misma, es decir, tenemos que saber qué es lo que la oración afirma. Veamos algunos ejemplos:

i. '2 + 2 = 4', ¿es verdadera?

Sabemos que el significado usual de '2 + 2 = 4' es $2 + 2 = 4$ y sabemos también que efectivamente $2 + 2 = 4$ por lo que '2 + 2 = 4' es verdadera, en la interpretación usual de la aritmética.

ii. "Esta oración tiene cinco palabras", ¿es verdadera?

Sabemos cuál es el significado de "Esta oración tiene cinco palabras" y es: que la oración "Esta oración tiene cinco palabras" tenga cinco palabras, y sabemos también que efectivamente tiene cinco palabras, por lo que "Esta oración tiene cinco palabras" es verdadera.

Sin embargo, ¿qué pasa con el enunciado (1)? Veamos otro ejemplo:

"Esta oración es verdadera", ¿es verdadero?

El significado de "Esta oración es verdadera", es que: "Esta oración es verdadera" es verdadera, por lo que no es posible saber su significado ya que su significado se refiere a su verdad y su verdad se refiere a su significado. Este tipo de oraciones se llaman no bien fundadas. Véase [4].

Obsérvese que el problema *no* es la autorreferencia, pues no hubo problema en el ejemplo ii anterior; el problema es el hecho de ser no bien fundada. Algunos ejemplos de oraciones no bien fundadas son:

Esta oración es falsa.

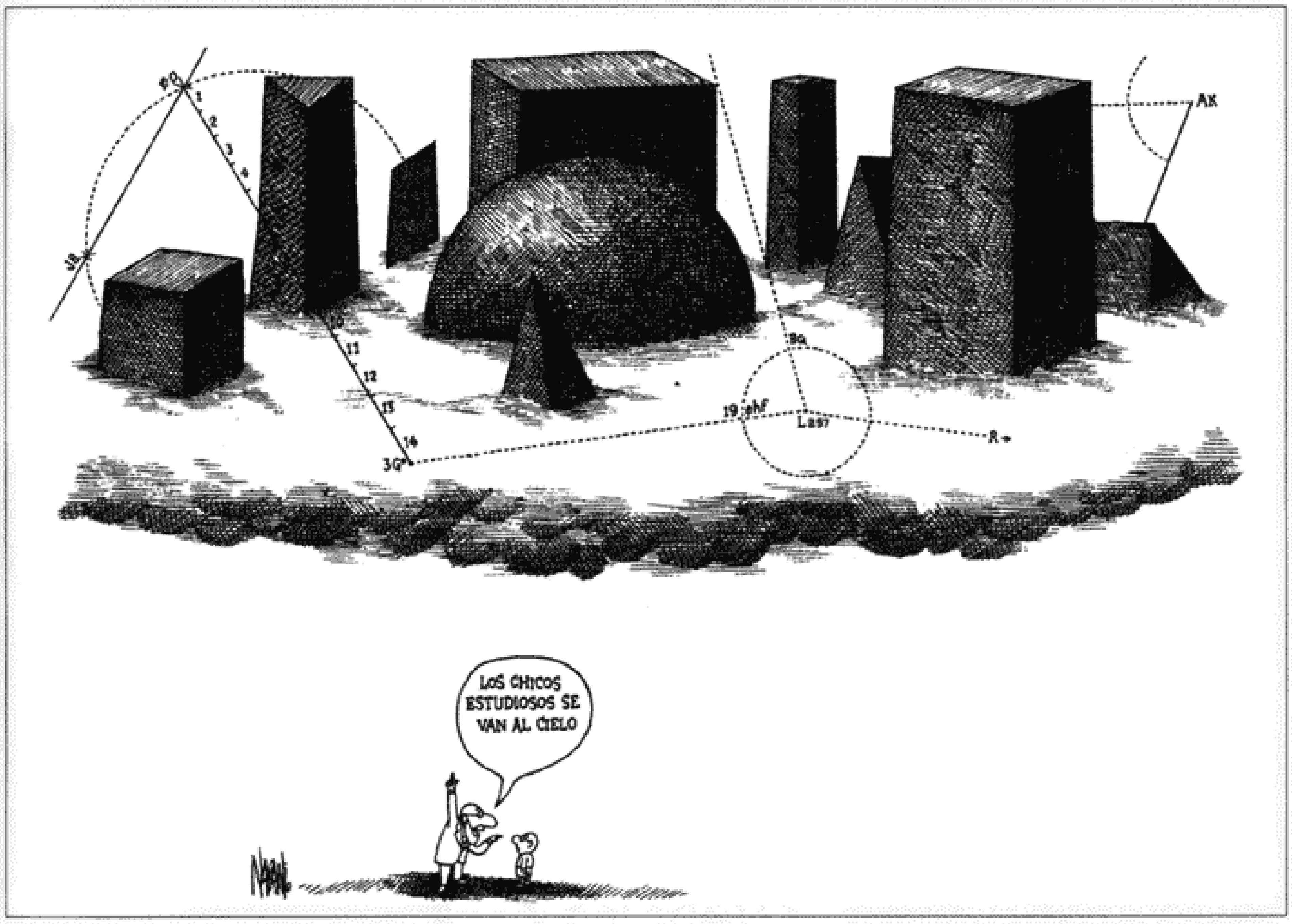
Esta oración es verdadera.

1) La oración que sigue es verdadera.
2) La oración anterior es falsa.

1) Esta oración tiene cinco palabras.
2) Esta oración tiene ocho palabras.
3) Una de las oraciones anteriores es verdadera y sólo una.

La paradoja del mentiroso y todas sus variantes se basan en el uso de oraciones no bien fundadas, las cuales no transmiten información alguna por lo que *no* son realmente oraciones y no se puede decir de ellas que sean verdaderas o falsas. Ésta es la aclaración de la paradoja del mentiroso, pues no tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas porque por ser no bien fundadas, no informan nada y no son calificables como verdaderas o falsas.

El concepto intuitivo de verdad indica que un enunciado es verdadero en una interpretación dada, si su significado se refiere a un hecho en esa interpretación dada; *excepto en el caso de que* su significado *se refiera a su propia verdad*, en cuyo caso es un enunciado no bien fundado, ya que su significado se refiere a su verdad y la verdad siempre se refiere al significado.



Conclusiones

Las paradojas son inferencias derivadas correctamente en una teoría o en un argumento, pero que chocan fuertemente con nuestra intuición o nuestro sentido común habituales.

No son afirmaciones erróneas, sólo chocan con nuestras intuiciones, pero serán estas últimas, las intuiciones, las equivocadas y las que tendremos que cambiar, aunque esto nos sea intelectualmente difícil. Creemos que eso mejora nuestra intuición.

Es importante mencionar que muchas paradojas contienen ideas nuevas que con una pequeña modificación nos llevan a un nuevo descubrimiento importante. Algunos ejemplos históricos de este proceso heurístico son los siguientes:

1. La existencia de los inconmensurables, a partir de la paradoja para los pitagóricos de que el lado del cuadrado fuera inconmensurable con la diagonal.

2. La creación de las geometrías no euclideanas, cambiando la intuición equivocada de que la única geometría posible era la euclideana.

3. La definición de infinito de Dedekind, tomando como concepto, precisamente lo que se había considerado paradoja: que un conjunto fuera biyectable con un subconjunto propio.

4. La prueba del Teorema de Incompletud de la Aritmética, de Gödel, cambiando en la paradoja del mentiroso, el concepto *"falso"* por el de *"indemostrable"*, con lo cual se construye un enunciado verdadero en la aritmética, pero indemostrable.

5. El concepto iterativo de conjunto, base intuitiva de la axiomática de Zermelo Fraenkel, cambiando la concepción extensional de conjunto, por la concepción constructiva de conjunto.

En general, convertir una aparente imposibilidad paradójica en una nueva posibilidad creativa, cambiando la intuición, puede llevarnos a un descubrimiento importante.

Quiero terminar con una cita de Quine: "...nuestro sentido común respecto a conjuntos, adjetivos y otros conceptos, proviene de los teóricos de la edad de piedra...quienes se equivocaron."[1] ❖

Referencias y bibliografía

1. Quine, W. V., "Russell's Paradox and Others", *The Technology Review*, noviembre, 1941.
2. Quine, W. V., "Paradox", *The Foundations of Mathematics*, abril, 1962.
3. Amor, J. A., "La paradoja de Russell es una imposibilidad lógica", *Miscelánea Matemática*, núm. 17, octubre, 1988.
4. Smullyan, Raymond M., *¿Cómo se llama este libro?*, Ed. Cátedra, Colección Teorema, 1978.
5. Tarski, Alfred, "Truth and Proof", *Scientific American*, junio, 1969.
6. Grijalva, Agustín, "Golpe a nuestra intuición", *Revista*, No. 15, Depto. de Matemáticas, Universidad de Sonora, 1988.
7. DeLong, H., "A Profile of Mathematical Logic", Addison Wesley, 1970.
8. Orayen, Raúl, "Sobre un enfoque clásico erróneo de las paradojas conjuntisticas", *Revista Latinoamericana de Filosofía*, vol. XIV, núm. 3, noviembre, 1988.