

# La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas vistos desde fuera de las matemáticas

ELISA BONILLA RIUS

**E**n este artículo se reseñan tres puntos de vista acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, éstos tienen la peculiaridad de haber sido producidos por personas cuya actividad primaria no eran las matemáticas, pero que, sin embargo, las consideraron fundamentales en la formación de los individuos. Estos tres ejemplos distan mucho de ser los únicos de su clase: mucha gente fuera de las matemáticas se ha preocupado por éstas y les ha encontrado un significado relativo a su actividad. Conviene señalar que la selección de los ejemplos no refleja necesariamente su importancia dentro del estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y es, hasta cierto punto, una selección arbitraria que responde, más bien, a las preferencias de la autora

## Introducción

En vista de la importancia que la sociedad en general otorga a las matemáticas como parte fundamental de una educación integral de los individuos, se ha generado gran interés en torno a su enseñanza y a las dificultades que parece presentar su aprendizaje. Sin embargo, los matemáticos y los profesores de matemáticas no han sido los únicos interesados en los problemas de enseñar y aprender matemáticas; este interés está tan generalizado, que dentro de campos tan diversos como la filosofía, la psicología o la pedagogía, entre

Elisa Bonilla Rius. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.



Una típica mesa de contar del siglo XVI. Tomado de Swetz, F.J. 1987. *Capitalism and Arithmetic*. Ed. Open Court.

otros, existe también la preocupación por darles solución. Por otra parte, este interés, tampoco es reciente y posiblemente se podrían encontrar referencias a los problemas de la educación matemática, que se sitúan en distintos siglos. Este interés aunque con altibajos, ha persistido a lo largo de la historia.

La población en general tiene también diversas opiniones acerca de cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas. Entre ellas están los tres trabajos que se presentan a continuación:

Primero: el conocimiento se transmite verbalmente y, por lo tanto, la clave de una buena enseñanza está en una presentación, clara y bien articulada, del material de enseñanza.

Segundo: el empleo de material didáctico facilita la comprensión de las matemáticas.

Tercero: la base de una buena enseñanza está en mecanizar y practicar mucho las matemáticas.

Antes de juzgar si estos puntos de vista son o no acertados, se revisarán algunas de las posturas que les dan sustento teórico, en particular las de Platón, María Montessori y Edward L. Thorndike.

## Platón y la transmisión del conocimiento

Entre las citas clásicas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

se encuentran algunas anotaciones de Platón; quien, en opinión de algunos autores, debe ser considerado como el primer filósofo de la educación<sup>1</sup> (Rousseau, por ejemplo, concibe a *La República* como el tratado más sofisticado de educación que nunca se hubiera escrito),<sup>2</sup> así que fue precisamente Platón, el primero en discutir en qué circunstancias una acción educativa es imperativa, además de abocarse al problema de definir qué conocimientos se requieren para cada una de las distintas profesiones:

“...si para ser un guerrero espartano -dice Platón- es necesario un duro entrenamiento físico, para ser guardián de la ciudad se requiere de saber matemáticas” (cfr *La República*).

Platón se destaca entre aquellos que defienden a las matemáticas como una componente fundamental de una formación integral. De acuerdo a su teoría, el estudio de las matemáticas desarrolla el alma en dos sentidos. Por un lado, da lugar a la reflexión, para así externar todas las contradicciones que permanecen ocultas tras los juicios que resultan de la percepción sensible. De este modo, el estudiante nunca habrá de conformarse con su primera impresión de las cosas, preparándose para avanzar del contexto de la imaginación al de la razón. Por otra parte, Platón afirma que el estudio de las matemáticas, conduce al estudiante por el camino del bien, que es el principal objetivo de cualquier tipo de aprendizaje en la vida.

Además de preocuparse por el papel de las matemáticas en la formación de los individuos, Platón nos legó su punto de vista sobre la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje (cfr *Menón*). Para él, enseñar equivale a “decir” y aprender a “haber escuchado”; postura, por otra parte, tan influyente, que ha perdurado hasta nuestros días: para la mayoría de los maestros de hoy, enseñar consiste, casi exclusivamente, en articular con claridad ciertas ideas, mientras que, por lo tanto, aprender consiste tan solo en escuchar con atención lo que se dice. De ahí, la frase tan frecuentemente oída en aulas de todos los niveles educativos:

“...lo repito -dirá el maestro- tantas veces como sea necesario”.

O dicho de otro modo, el aprendizaje del alumno sólo depende de que atiende, de que escuche con claridad.

En esta concepción no se le reconoce al alumno la actividad de “procesar” o “codificar” la información recibida. El proceso de información, o, como dirían algunos autores, la construcción del conocimiento, se presupone automática; concibiendo al alumno más bien como una “tabla rasa” sobre la que el maestro puede “escribir”.

Al respecto una de las citas más claras de Platón, la encontramos en el diálogo de Sócrates con Menón; de hecho, las primeras palabras con las que este último abre el diálogo resumen la concepción platónica sobre el aprendizaje:

Menón “¿Podrías tú decirme, Sócrates...?”

Menón quiere aprender, para lo cual requiere que Sócrates le diga... Su cono-

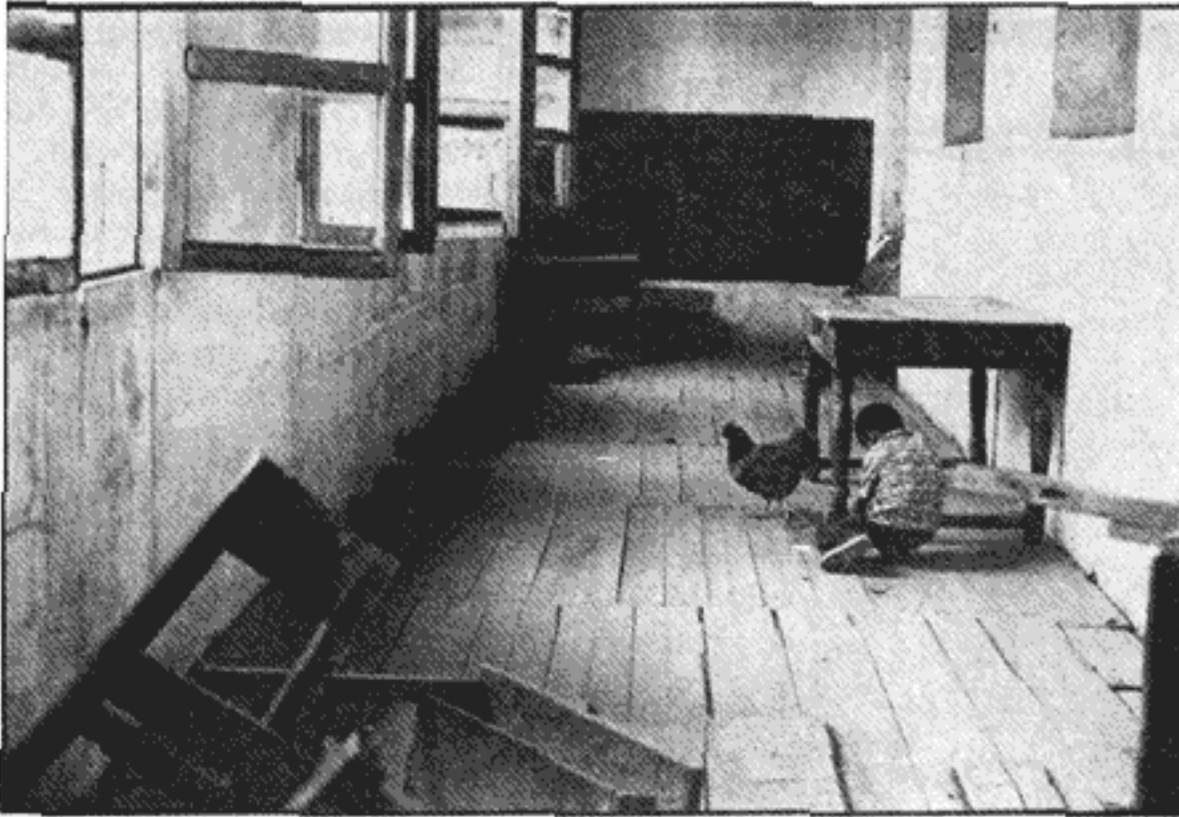
cimiento, entonces, depende fundamentalmente de Sócrates; es decir, que éste sea capaz de articular con claridad lo que habrá de enseñarle a Menón.

Para Platón el aprendizaje es, entonces, una recepción pasiva de la información.<sup>3</sup> Como ya se dijo, esta visión perduró por muchos siglos hasta llegar, con gran vigor, a nuestros días.

A continuación se presentarán otros dos enfoques pertenecientes a la primera mitad del siglo XX y, aunque distintos entre sí, ambos se oponen a la visión dada por Platón. Los dos recalcan la actividad del sujeto como promotora del aprendizaje, dando lugar sin embargo, a teorías diametralmente opuestas. En primer lugar, se expondrá el caso de María Montessori, precursora de la escuela activa y, posteriormen-



Ilustración de 1508 sobre la contienda entre quienes usaban el ábaco y los que usaban algoritmos. El espíritu de la aritmética, en forma femenina, preside la competencia. Tomado de Swetz, F.J. 1987. *Capitalism and Arithmetic*. Ed. Open Court.



te, el de Edward L. Thorndike, psicólogo conductista.

### María Montessori y el empleo de material didáctico

Entre los pedagogos que en este siglo se han preocupado por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, destaca María Montessori, cuyas aportaciones pedagógicas y didácticas influyeron, no sólo sobre la educación de su tiempo, sino también sobre la de épocas muy posteriores.

Montessori (1870-1956) dedicó la mayor parte de su vida a la educación pre-escolar, pugnando siempre por un desarrollo integral del individuo desde la más temprana edad; y, desde su punto de vista, las matemáticas juegan un papel fundamental en dicho desarrollo. Montessori concibe la mente humana como una "mente matemática" que está en actividad continua, y explica que, incluso en actos tan cotidianos como bajar escaleras o cruzar una calle, el ser humano emplea medidas visuales o bien aplica relaciones matemáticas. Montessori también hace énfasis en que este hecho no es el resultado del desarrollo de la ciencia moderna, ya que las civilizaciones de todos los tiempos han sido capaces de producir armas u otros instrumentos de precisión (que pueden ser admirados aún hoy en museos de todo el mundo), que requirieron de la aplicación de relaciones matemáticas. Mucho antes del floreci-

miento de la ciencia moderna, se construyeron edificios de gran calibre y se manufacturaron herramientas e instrumentos de alta precisión, lo que —desde su punto de vista— revela la acción de una mente matemática madura. De ahí, que dicha mente no sea necesariamente el producto de una ocupación específicamente científica. Ella, de hecho, sostiene que esta ocupación incluso puede llegar a ser contraproducente.

María Montessori afirma la existencia de esa mente en los niños e, independientemente de reconocer la presencia de diferencias individuales en lo que se refiere a habilidades. Uno de los móviles principales de su teoría consiste, precisamente, en probar que esta mente puede ser desarrollada a muy temprana edad y se apoya para ello en el empleo de material didáctico.

Una parte muy importante de la actividad de María Montessori es, por ende, la que se refiere al desarrollo de materiales didácticos, entre los que se cuentan materiales para aprender a contar, a manejar el sistema decimal, a trabajar con fracciones y a comparar magnitudes.<sup>4</sup> Materiales didácticos, en cuya aplicación Montessori sustenta, como ya se dijo, el desarrollo de las capacidades del niño, particularmente las relativas al aprendizaje de las matemáticas.

Este aprendizaje, apoyado en el empleo de materiales didácticos, ha sido muy bien acogido por distintas secciones del público y su uso se ha ido ha-

endo cada vez más popular. Lo que por otra parte ha implicado que se le tribuyan a éste potencialidades intrínsecas que parecen no depender de cómo se le utilice. En otras palabras se cree que si la enseñanza incluye el uso de material didáctico, tendrá el éxito asegurado.

Por este motivo se han hecho amplias investigaciones sobre los alcances del uso de material didáctico, de distintos tipos y en distintas circunstancias. Los resultados no siempre han sido tan satisfactorios como la creencia popular pareciera indicarnos.<sup>5</sup> De ahí que la eficacia de su empleo no sea automática. El cómo se emplea es, por lo general, más importante que el material mismo.

### Edward L. Thorndike: la mecanización y la práctica

Entre los exponentes de la psicología experimental se encuentra Edward L. Thorndike, conocido como el padre fundador de la "psicología para la instrucción matemática".<sup>6</sup> Como psicólogo, Thorndike trabajó en el desarrollo de la teoría del aprendizaje, basada en el "estímulo-respuesta", además de dedicar gran parte de su tiempo a intentar traducir los resultados de sus experimentos en lineamientos para la instrucción en el aula; publicó, en 1922, un libro con el título *Psicología de la Aritmética*, en el que recogió buena parte de dichos lineamientos. En este libro, Thorndike desarrolla su teoría de las "ligas" o "nexos", cada uno de ellos resultado de aparejar repetidamente un estímulo y su correspondiente respuesta (donde, por ejemplo: "2 + 2" es el estímulo y "4" la respuesta), y hace énfasis en el beneficio que traen consigo la mecanización y la práctica (*drill and practice*) para el aprendizaje de la aritmética:

"Cada nexo que se forma, debe hacerse considerando la formación de todos los nexos ya formados o que habrán de formarse en el futuro. Asimismo, cada habilidad debe practicarse en una relación, lo más efectiva posible, con las demás habilidades". (Thorndike, 1922:140.)

Desde su punto de vista, la tarea del profesor consiste exclusivamente en proveer y supervisar una mecanización

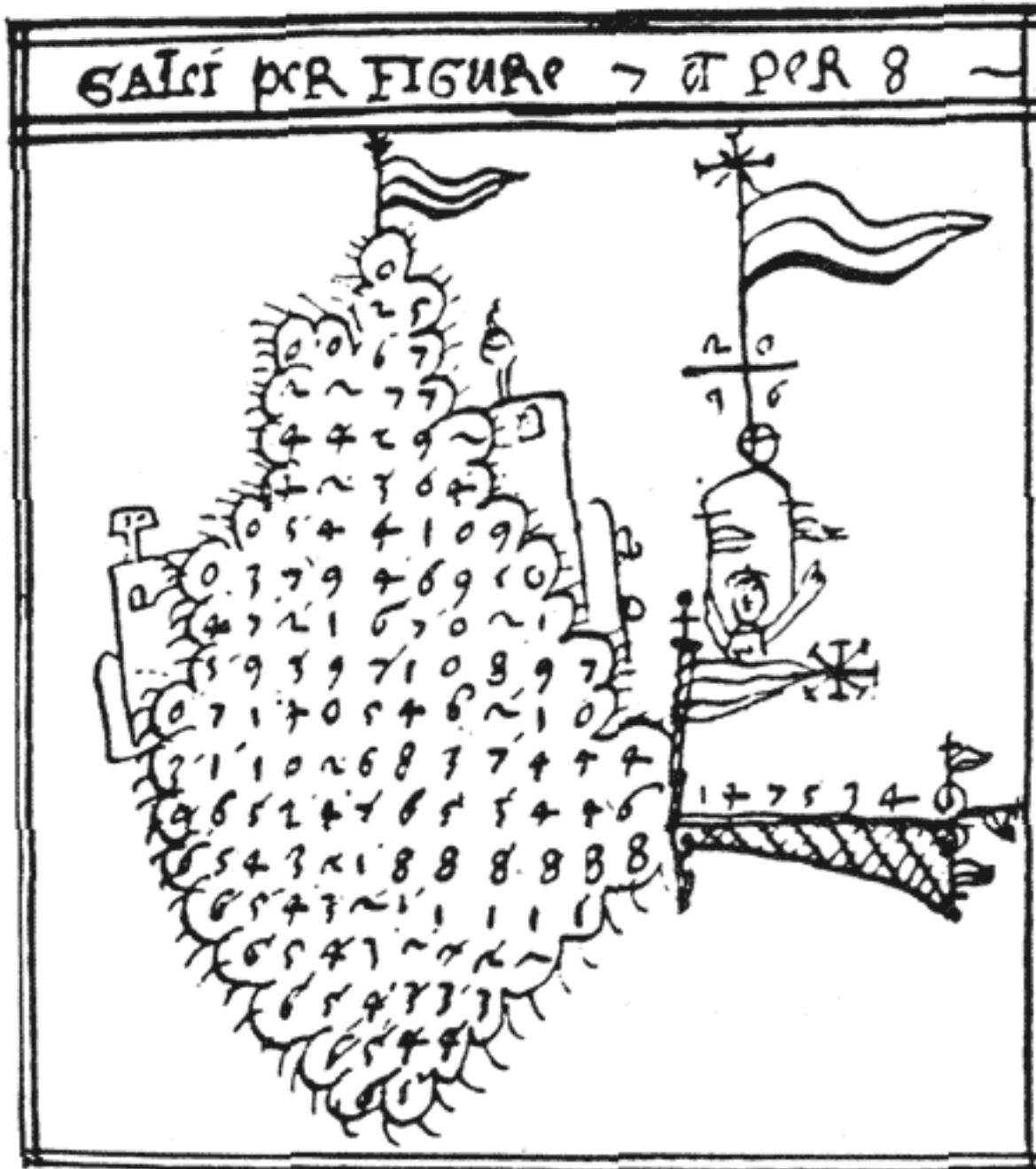


Ilustración del siglo XVI mostrando a una división hecha por un monje veneciano. Tomado de Swetz, F.J. 1987. *Capitalism and Arithmetic*. Ed. Open Court.

y práctica adecuadas, en cantidad y orden, para cada clase de problemas. El maestro debe identificar los nexos de los que está constituido cada tema a enseñarse, para así ordenarlos de acuerdo a su grado de dificultad, partiendo de los que considere más fáciles. Este enfoque supone que el aprendizaje de los nexos más simples ayuda en los aprendizajes subsiguientes. Una vez hecho esto, es decir, adquirida la mecanización, sólo resta que los alumnos practiquen los nexos para cada clase de problemas. Entre más a menudo se puedan presentar la mecanización y la práctica en el contexto de problemas reales, más fuertes serán los nexos que se establecerán. La recompensa ofrecida para reforzar los nexos aprendidos se obtiene cuando los problemas aritméticos se hacen interesantes, divertidos y con aplicaciones prácticas.

Así pues, a Thorndike también le preocupaba el significado intrínseco de los problemas y su relevancia para actividades cotidianas, externas a la escuela. A pesar de su preocupación por la cuestión semántica, muy poco común entre los conductistas, Thorndike tuvo muchos detractores. Entre ellos, otro psicólogo experimental, William Brownell, quien objetó duramente el método de la mecanización y la práctica, afirmando que para asegurar la comprensión y un aprendizaje significativo, a través de la instrucción, era indispensable

### LA VIDA DE MARÍA MONTESSORI

María Montessori nació en Italia en 1869. Estudió en la Universidad de Roma y se doctoró en medicina en 1894, siendo la primera mujer italiana que obtuvo ese grado. Al terminar sus estudios se dedicó a la investigación y tratamiento de niños mentalmente anormales, los que hasta entonces se consideraban ineducables, por su deficiencia mental, en las escuelas ordinarias.

Durante dos años, de 1898 a 1900, estuvo dedicada a preparar a los maestros de Roma en la aplicación de los métodos especiales de observación y de educación de niños anormales, y a la vez a la educación de estos niños:

"Mucho más ocupada que una mestra de primaria —dice M. M.— sin tener nunca vacaciones, yo estaba presente y enseñaba personalmente a los niños desde las ocho de la mañana hasta las siete de la tarde, sin interrupción. Estos dos años de práctica, son mi primer y mi mejor ganado título de pedagogía."

De esta experiencia le surgió la idea de que los métodos

empleados con los niños anormales podrían aplicarse asimismo a la educación de niños normales. Con este fin se matriculó en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Roma, donde siguió los estudios de psicología experimental, que acababan de introducirse en las universidades: al mismo tiempo, recogía en las escuelas primarias observaciones de "antropología pedagógica", estudiando los métodos y procedimientos en uso en esas escuelas para la educación de los niños normales.

La verdadera experiencia en el campo de la educación de los niños normales la empezó a realizar la Dra. Montessori en 1907, cuando se le encargó la organización de escuelas infantiles. La primera de éstas, bajo su dirección, abrió ese año con el nombre de "Casa de los niños" ("Casa dei bambini"). Otras tres casas se abrieron en Roma ese mismo año y en años sucesivos la idea trascendió a otros países europeos, fundándose escuelas Montessori en múltiples de ciudades. Hoy en día, las hay en todo el mundo.

## EL MÉTODO MONTESSORI

### Ideas:

1. La primera condición del método es la *libertad*:

"... es preciso que la escuela permita las libres manifestaciones del niño; ésta es la reforma esencial". (Montessori, 1909:29).

Esta libertad que se revela tanto en la supresión de las coacciones exteriores (mobiliario escolar fijo), como de las interiores (premios y castigos), tiene una segunda parte correlativa: "libertad ha de ser sinónimo de actividad". (Montessori, 1909:92).

2. La segunda condición es pues la *actividad*. Este método concibe al maestro como pasivo y al niño activo. Su trabajo está en impedir que el niño confunda el bien con la inmovilidad y el mal con la actividad. El objeto del método es entonces:

"... *disciplinar para la actividad, para el trabajo, para el bien; no para la inmovilidad, para la pasividad, para la obediencia. Una clase donde todos los niños se moviesen*

útilmente, inteligentemente y voluntariamente, me parecería una clase muy disciplinada". (Montessori, 1909:99).

3. Otra idea básica es la *independencia*; pues no se puede ser libre sin ser independiente. Pero esta independencia no quiere decir egoísmo, sino sólo desarrollo de la personalidad.

### Caracteres:

1. El método se sirve, en primer lugar, de un *material didáctico*, específicamente diseñado, destinado a cultivar y perfeccionar la actividad sensorial; es táctil, térmico, bórico, estereognóstico; tiene gusto, olfato y vista. Es, además, *autocorrector*:

"La maestra se ha de ver sustituida por el *material didáctico* que corrige por sí mismo los errores y permite que el niño se eduque a sí mismo" (Montessori, 1909:355).

2. El *ambiente* también tiene ese carácter *autocorrector*: de aquí que las escuelas Montessori aspiren a ser un medio depurado, un reflejo de la vida doméstica con todas las actividades de ésta.

ble tomar en cuenta las relaciones matemáticas subyacentes al cómputo y aplicación de algoritmos:

"Si se quiere tener éxito en el desarrollo de un pensamiento cuantitativo, éste debe estar fundado en los significados y no en una infinidad de respuestas automáticas... La mecanización no da lugar al significado. La repetición no lleva al entendimiento". (Brownell, 1935:10).

A pesar de críticas tan acérrimas como la anterior, la mecanización de algoritmos a ultranza tiene, hasta la fecha, gran cantidad de seguidores, particularmente entre algunos maestros de nuestras aulas: ¿quién, como alumno, estuvo a salvo de padecer planas y planas de operaciones administradas sin ton ni son? Sin embargo, los defensores de la mecanización están tranquilos, después de todo, su punto de vista tiene ya fundamento en una "teoría científica", de cuya paternidad es responsable, entre otros, el mismo Thorndike.

### Nota final

Cabe señalar que, ésta no ha pretendido ser en realidad una exposición crítica, sino una introducción al tema que incite al lector a ahondar en los detalles. Sin embargo, pueden obtenerse algunas conclusiones sobre el material presentado.

Como se ha visto, el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, cuenta con distintas aportaciones y análisis sobre los problemas y situaciones que hay que enfrentar al enseñar y aprender matemáticas. Los tres casos revisados aquí son una pequeña muestra de posturas que, independientemente de cuándo fueron concebidas, tienen aún vigencia dentro

de este campo. Entre las razones que movieron a su inclusión en este trabajo, está principalmente la de que, de alguna manera, representan el sustento de puntos de vista muy arraigados en la población en general sobre lo que es, o debiera ser, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Cada postura tiene, seguramente, algo que ofrecerle a una enseñanza y a



W. Grey Walter  
EL CEREBRO VIVIENTE



EL CEREBRO  
VIVIENTE

W. GREY WALTER  
BREVARIOS  
Fondo de Cultura Económica

Sir Charles Sherrington, fisiólogo inglés, veía en el cerebro humano "un telar cintilante en continua transformación". Para conocer los complejos mecanismos neuronales la ciencia ha ideado distintas metodologías de estudio. Una de las más ricas ha sido el registro electrofisiológico de la actividad cerebral. Sobre esta base, el autor traza un perfil del sistema nervioso, que nos acerca de manera precisa, pero divertida, a su fascinante estructura.

De venta en librerías

un aprendizaje exitosos de las matemáticas, sin embargo, adoptadas como panacea no sólo resultan visiones parciales, sino propuestas proclives al fracaso.

Quién puede negar que una buena enseñanza requiere de claridad en la exposición de los temas a enseñarse, pero dicha claridad de exposición no es más que una condición necesaria en la educación. No basta ser claro para que los alumnos aprendan. No es posible olvidar que el sujeto que aprende es un ser activo y que, por ende, su conocimiento no depende exclusivamente de factores externos. De aquí, que los educadores hayan buscado apoyo, por ejemplo, en las teorías del aprendizaje como fundamento de sus estrategias.

El reconocimiento de que el sujeto que aprende juega una parte activa en la construcción de dicho aprendizaje, ha dado lugar a grandes esfuerzos intelectuales, dirigidos explícitamente a facilitar dicho aprendizaje. Los dos últimos ejemplos presentados ilustran este hecho. En particular el diseño y la manufactura de material didáctico, cada vez más populares, están guiados por la creencia de que el empleo de material didáctico en la enseñanza es siempre beneficioso: pero, como nos muestran entre otros autores Hart y Sinkinson (1989), la administración de dicho material debe hacerse con cautela, reconociendo que el material, por sí mismo, no provoca la construcción del conocimiento.

Asimismo, reconocer la postura activa del sujeto en la producción de su propio conocimiento, se ve muy pobremente caracterizada cuando ésta se interpreta como mera repetición automática. La mecanización y la práctica, como ayudas colaterales al aprendizaje, pueden tener algún sentido, pero éste se esfuma cuando se les considera explícitamente como las mismísimas posibilitadoras del conocimiento.

Consideraciones de este tipo dieron lugar a la necesidad de producir un conocimiento sistemático sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Con este objeto surgió, hace aproximadamente unos veinte años, una disciplina de investigación conocida como *Educación matemática*; algunos de cuyos resultados más relevantes e interesantes esperamos reseñar, próximamente, en estas páginas. ♦

Bibliografía

- Barker, Ernest. 1959. *The Political Thought of Plato and Aristotle*. Dover, Nueva York.
- Brownell, William. 1935. "Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic", en *The teaching of arithmetic, the tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Teachers College, Columbia University, Nueva York.
- Chateau Jean, et al. 1959. *Los grandes pedagogos* (Estudios realizados bajo la dirección de Jean Chateau). Fondo de Cultura Económica, México.
- Hart, Kathleen y Sinkinson, Anne. 1989. "They're Useful Children's view of concrete materials", *Actes de la 13<sup>a</sup> Conférence Internationale, Psychology of Mathematics Education*. París, 9 al 13 de julio de 1989. Vol. 2. págs. 60 a 66.
- Helmig, Helene. 1972. *El Sistema Montessori*, Editorial Luis Miracle, S. A., Barcelona.
- Montessori, María. 1909. *El método de la pedagogía científica*, Editorial Araluce, Barcelona.
- Platón. 1977. "El Menón" en *Obras Completas*, Aguilar, Madrid. pp. 433-460.
- Platón. 1971. *La República*, UNAM, México.
- Resnick, Lauren y Ford, Wendy W. 1981. *The Psychology of Mathematics for Instruction*, Lawrence Erlbaum Associates Publ., Nueva Jersey.
- Scolnicov, S. 1988. *Plato's Metaphysics of Education*, Routledge, Londres.
- Thorndike, Edward. 1922. *The Psychology of Arithmetic*. The Macmillan Co., Nueva York.

Notas

1. Chateau, et al. 1959, proporciona un análisis bastante detallado de la faceta pedagógica de Platón.
2. Citado por Barker (1959; 120).
3. Para una discusión más amplia sobre esta interpretación de la postura platónica acerca de la enseñanza y el aprendizaje, ver Scolnicov (1988).
4. Para una descripción detallada de los materiales y de los modos de empleo sugeridos, ver Montessori (1909) y Helmig (1972).
5. Ver, por ejemplo, Hart y Sinkinson (1989) cuya investigación muestra las dificultades que presentan los niños para reconocer que las actividades que han realizado con materiales concretos están relacionadas con una etapa posterior de la enseñanza, consistente en formalizar los conceptos que el maestro pretendía introducir, mediante el uso de dichos materiales. Esto es, que la manipulación de materiales no necesariamente da lugar, a la formalización.
6. Para una discusión más amplia sobre el trabajo de Thorndike, ver Resnick y Ford (1981).