

Teoría de catástrofes

RADMILA BULAJICH*
RAFAEL MARTÍNEZ ENRÍQUEZ*

INTRODUCCIÓN

Vivimos en un mundo en que los conceptos matemáticos y sus generalizaciones ocupan un sitio de privilegio. La descripción y el entendimiento de los fenómenos naturales y sociales recurren en forma creciente a las matemáticas, a sus técnicas y a sus formas de conceptualizar. El camino no es nuevo, nace con las antiguas civilizaciones, y ya en la Grecia de los clásicos era transitado por insignes y experimentados pensadores. Platón, durante una exposición que sembró polémicas entre sus contemporáneos, discutió su visión de un Universo organizado sobre la base de principios matemáticos. Una interpretación moderna de esa idea —debida a F. Browder— podría iniciar contemplando a las matemáticas como “la ciencia de la forma significativa... la forma última y transparente de todo conocimiento humano”.¹ Algo similar fue expresado por el matemático y filósofo A. N. Whitehead: “la noción de que la existencia de una norma o patrón es algo importante es muy antigua. Todo arte descansa en el estudio de los patrones. La cohesión de los sistemas sociales depende de la continuidad de los patrones de comportamiento. De ahí que buscar patrones que provean de unidad a los eventos naturales y descubrir la estabilidad de tales patrones, así como sus posibles modificaciones, es la condición necesaria para la realización de lo excelso. Las matemáticas son la herramienta más poderosa para el entendimiento de patrones y el análisis de sus relaciones”.²

El desarrollo de la matemática ha sido multifacético, y de vez en vez ha contribuido a revolucionar nuestras formas de concebir lo que significa entender y conocer. Una de las revoluciones más profundas en el pensar surgió de las aportaciones de Newton y Leibniz. Su cálculo diferencial e integral permitió una descripción detallada de una amplia gama de fenómenos naturales, desde los movimientos planetarios hasta la estructura del átomo. Sin embargo su rango de aplicabilidad se limita a problemas que involucran un comportamiento “suave” o, dicho de otra manera, cambios en una(s) varia-

ble(s) produciendo cambios “equiparables” —llamados continuos por los matemáticos.

La realidad —sin atender a nuestra comunidad— con frecuencia se aparta de las consideraciones anteriores y nos presenta serias dificultades: si los sistemas en cuestión sufren cambios bruscos o “discontinuidades”, el aparato matemático que se origina en el cálculo se enfrenta a obstáculos insalvables para su aplicación exitosa. Paradójicamente este tipo de problemas ha atraído en los últimos años a muchos de los grandes matemáticos, quienes han aceptado el reto que surge de intentar analizar los fenómenos que se resisten a ser descritos por el cálculo clásico. Estos fenómenos abundan, algunos



* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la UNAM.

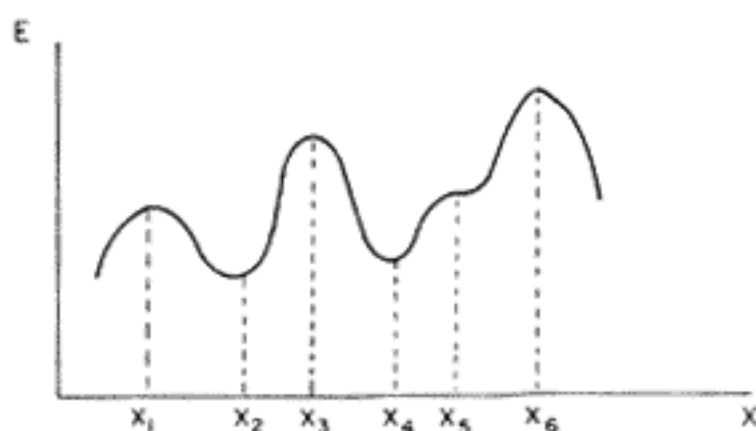
han sido "identificados" en términos del lenguaje de la ciencia moderna —ondas de choque, transiciones de fase, rompimiento de estructuras sujetas a esfuerzos— y otros nos han llegado desde los tiempos clásicos, como por ejemplo, la turbulencia y el nacimiento de las formas, tanto en los seres vivos como en el mundo de lo inanimado.

En un intento de explicar —y en lo posible de clasificar— directamente los tipos de procesos discontinuos que pueden aparecer, el matemático francés René Thom desarrolló a principios de los setentas una teoría cuyo rasgo más sobresaliente es la conclusión de que las relaciones matemáticas que describen este tipo de procesos pertenecen a sólo siete tipos básicos distintos de comportamiento. Con el objeto de enfatizar el carácter "instantáneo" de los cambios Thom les llamó catástrofes y, por consiguiente, el aparato matemático que las estudia fue bautizado con el atractivo nombre de Teoría de Catástrofes.

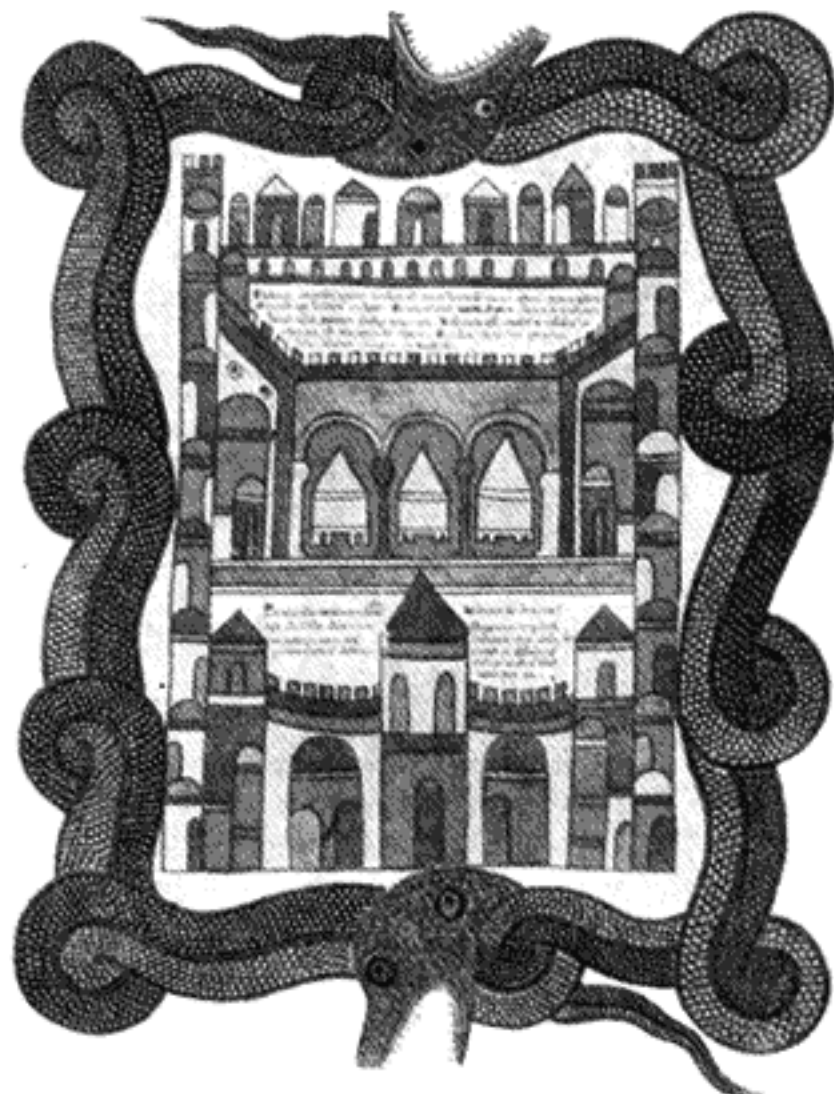
PERFIL DE LA TEORÍA DE CATÁSTROFES

La Teoría de Catástrofes (TC) tiene su aplicación inmediata en los sistemas cuya descripción matemática corresponde, si hacemos una analogía con la mecánica, a un sistema con un alto grado de fricción, y que obedece a la Ley de Aristóteles (velocidad es proporcional a la fuerza), en lugar de a la conocida Segunda Ley de Newton (aceleración es proporcional a la fuerza). El comportamiento del sistema se puede considerar determinado por una *función de energía E* —que no necesariamente es la energía física del sistema— que nos indica que el sistema tiende rápidamente a un estado estacionario o a uno de equilibrio.

Esta situación perfila uno de los elementos que contribuyen al atractivo de la TC, a saber, su estrecho apego a lo visual, a la posibilidad de mostrar gráficamente las características de los sistemas o procesos bajo estudio. Esto resulta evidente si, por ejemplo, suponemos que el estado en que se encuentra un sistema puede ser descrito por una variable x , y que además conocemos el comportamiento de la función E en cuanto a su dependencia respecto de x . Una posible gráfica sería la siguiente:



Los puntos de equilibrio corresponden a los puntos donde la tangente es horizontal y podemos distinguir tres tipos de puntos: x_1 , x_3 y x_6 , puntos donde E es un máximo y corresponden a estados de equilibrio inestable; en x_5 hay un punto de inflexión (cambia de concavidad la gráfica) y x_2 , x_4 , donde E es mínima, y son los estados de equilibrio estable. Estos últimos se consideran los más interesantes pues, como su nombre lo indica, son los estados del sistema a los cuales éste regresa si es perturbado ligeramente. La mejor forma de ilustrar estas ideas y las que son propias de la TC, es observando cómo se utilizan en un ejemplo sencillo en cuanto a su funcionamiento, pero rico en lo que concierne al manejo del aparato conceptual de la TC. A lo largo del desarrollo que sigue se hace evidente la capacidad de la información cualitativa —que se aprecia vi-



sualmente en las gráficas y los diagramas— para lograr un entendimiento de las características del proceso bajo estudio.

UN EJEMPLO ELEMENTAL

Para entender cómo fuerzas continuas pueden producir saltos catastróficos E. C. Zeeman diseñó un juguete educativo que es muy fácil de construir e ilustra este fenómeno en el caso de la catástrofe denominada cúspide.^{3,4}

El procedimiento más sencillo para construirlo es tomar dos ligas elásticas casi iguales. La longitud de las ligas sin elongar será la unidad. Cortamos un disco de cartón cuyo diámetro es una unidad y le colocamos una tachuela en el punto Q cerca de la circunferencia, como se indica en la figura 1. Montamos el disco, con la tachuela hacia arriba, en una base de madera y lo fijamos, en el centro de la base, con un clavo colocado en el centro del círculo O. Amarramos las ligas en la tachuela, punto Q, y una de ellas la fijamos con otro clavo en el punto R de la base a dos unidades del centro O. La otra liga queda libre de un lado; a este punto le llamaremos el punto control c . Por lo tanto, el espacio control C será la superficie de la madera y el "estado" de la máquina estará dado por la posición del disco. Dicha posición estará determinada por el ángulo $x = \angle ROQ$. Las posibles posiciones del disco corresponden a los puntos de un círculo llamado el espacio de estados.

Cuando movemos el punto control c suavemente en la superficie de la madera el estado x también cambiará suavemente, excepto en algunos puntos donde se registrará un salto brusco. Si marcamos un punto en la superficie cada vez que observemos un salto, muy pronto nos daremos cuenta que dichos saltos ocurren en una curva que tiene forma de diamante curvo, tal y como se ilustra en la figura 1. Esta curva se conoce como el conjunto de bifurcación B. Sin embargo, algunas veces se ve que c cruza el perímetro sin causar ningún salto. Por ejemplo, si hacemos que c cruce en ambas direcciones por los ángulos rectos de los ejes de simetría de la máquina, entonces sólo saltará en una de las dos direcciones, y estos saltos no

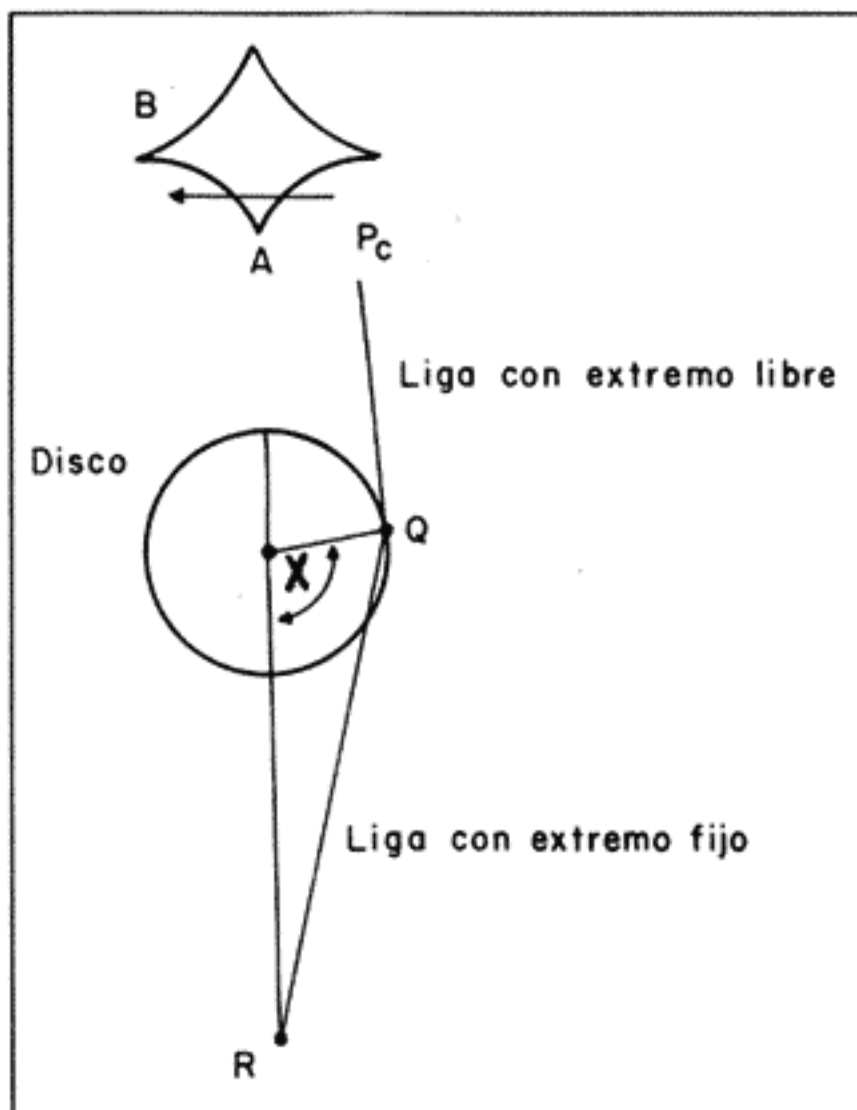


Figura 1. La máquina de catástrofes.

ocurren en el mismo lugar, es decir, se observará un salto brusco cuando abandonamos la región B siempre y cuando hubiésemos entrado previamente por el lado opuesto. Finalmente, se puede ver que si c se encuentra fuera del diamante, entonces sólo hay un estado de equilibrio del disco, pero si c se encuentra dentro del diamante, entonces hay dos posiciones estables en las cuales puede permanecer el disco, una con Q inclinada hacia la derecha, y la otra con Q hacia la izquierda. Si tenemos cuidado al mover el punto c podemos encontrar un tercer punto de equilibrio, pero éste es inestable.

Con el objeto de entender mejor la forma como se hace el

modelaje matemático, analizaremos este ejemplo con cierto detalle: consideremos para un punto control dada la función $f_c : X \rightarrow R$, la cual nos da la energía potencial de la ligas para distintos posibles estados x . Esta energía resulta ser una función suave $f : C \times X \rightarrow R$, donde $f(c, x) = f_c(x)$. Para una c dada la máquina tenderá rápidamente a un estado donde la energía potencial se minimiza, es decir donde f alcanza un mínimo. Para c fuera del conjunto de bifurcación B, f_c tiene solamente un mínimo, es decir, un único punto de equilibrio estable, y la posición del disco estará determinada unívocamente. Para puntos dentro de B, f_c tiene dos mínimos separados por un máximo (el punto de equilibrio inestable). En cuál de los dos mínimos la máquina decida estar, dependerá de su estado previo.

El máximo y el mínimo de f_c están dados por

$$\frac{df_c}{dx} = \frac{\partial f_c}{\partial x} = 0$$

La gráfica de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ —haciendo variar c en el espacio control C — genera una superficie suavemente doblada M contenida en $C \times X$ con dobleces que se proyectan sobre B. Para la región de C cercana al punto cúspide A (ver figura 1), y para pequeños valores de x , esta región se muestra en la figura 3. La parte superior e inferior de M representan los mínimos de f_c dados por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, y la parte intermedia de la sábana representa el máximo de f_c dado por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$.

Los distintos estados que toma la máquina estarán siempre sobre la superficie M , variando entre la parte superior e inferior de mínimos, pero no apareciendo en la región del máximo (inestable). Esto nos explica el comportamiento de la máquina, ya que si el punto control c lo movemos a lo largo de la línea l marcada en el espacio control C (véase figura 3), el estado x cambia suavemente a lo largo de la trayectoria l' en la superficie M . Pero si c viaja a lo largo de la línea p de izquierda a derecha, entonces x cambia suavemente hasta alcanzar el punto Q_2 , donde "saltará" de la sábana inferior a la sábana superior de la superficie, es decir, la máquina "salta" de un estado al otro. Hablando en términos de las gráficas de f_c , es decir, las gráficas de energía, el mínimo se une con el máximo y desapa-

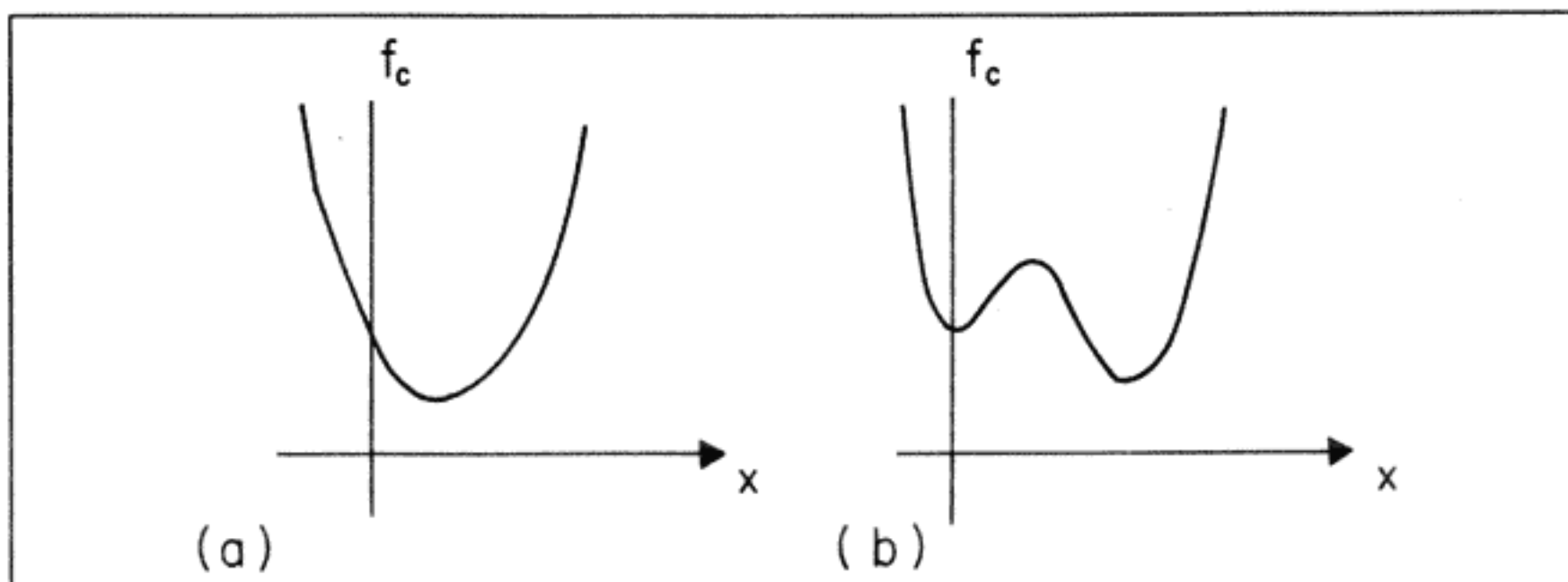


Figura 2. Gráficas de la energía en las ligas para pequeños valores de x , y puntos control cercanos a 0. En (a) se representan puntos fuera de B y en (b) puntos dentro de B.

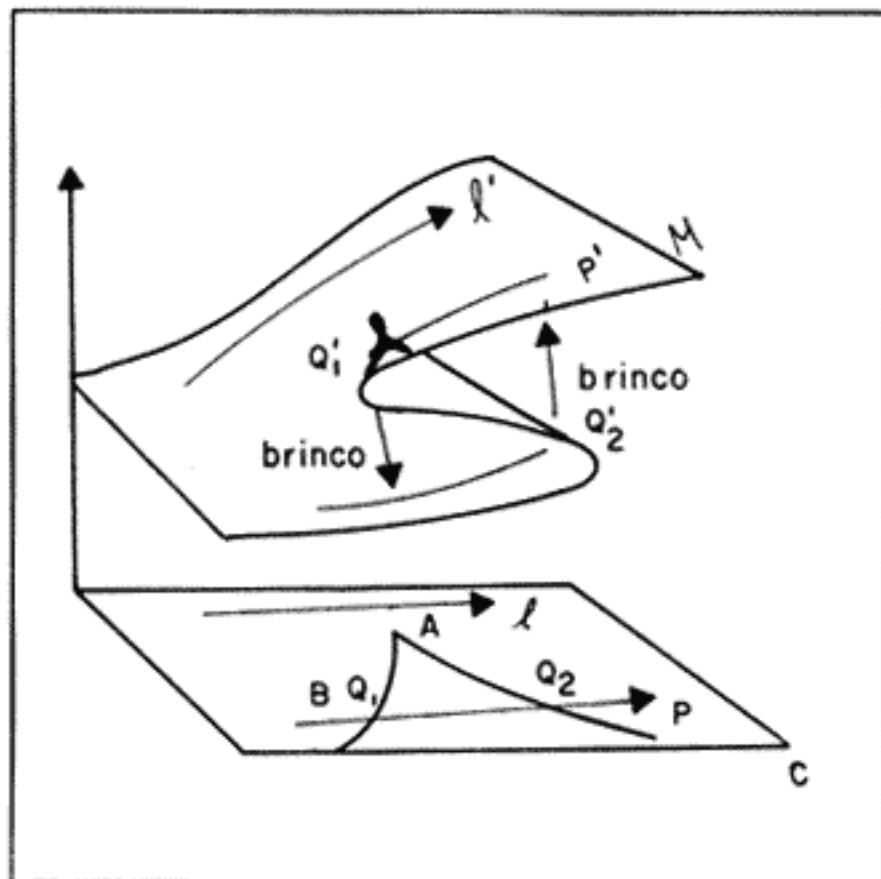


Figura 3. La superficie de la cúspide.

rece; es entonces que el estado salta al mínimo restante, causando así el salto brusco (véase la figura 4).

Si c viaja a lo largo de la línea p , pero ahora en dirección opuesta, x permanecerá en la sábana superior y el salto no ocurrirá hasta llegar al punto Q_1 . Por tanto, el estado de la máquina cambiará suavemente con c hasta cruzar el conjunto B por segunda vez. Esto ocasiona que los saltos de la parte superior a la parte inferior de la superficie M , y de la sábana inferior a la superior, no ocurran en el mismo punto. A este hecho se le conoce con el nombre de histéresis (por analogía con el fenómeno físico así denominado).

Regresando a la máquina de catástrofes, y experimentando más, se puede ver que la cúspide frente al punto A tiene un comportamiento similar, pero las otras dos cúspides son duales, en el sentido de que los papeles del máximo y los mínimos están invertidos (figura 1). Es decir, los mínimos son inestables y el máximo representa un punto de equilibrio estable. Las

diferencias se pueden observar haciendo pequeños círculos con los puntos control alrededor de cada una de ellas.

LA CATÁSTROFE CÚSPIDE

Una vez detallado el comportamiento observado y la forma de descripción, procedemos a introducir lo que sería una explicación más detallada en cuanto a la parte matemática.

Usando la ley de Hooke obtenemos una ecuación de tipo gradiente para la fuerza, de donde se deriva la ecuación de energía para las ligas. Si calculamos la ecuación que genera la superficie M obtenemos⁴

$$1.3a + 1.8bx - 1.3ax^2 - x^3 = 0$$

donde (a,b) son las coordenadas en el espacio de parámetros C , centrado en el origen, tal como se muestra en la figura 3. Esta ecuación es una aproximación, ya que los términos de grado mayor que 3 en x , y mayores que 1 en a y b , han sido ignorados. De hecho, para escribir la ecuación que mejor describe la superficie M se necesita una serie de Taylor infinita en x . Sin embargo, el teorema de clasificación de Thom^{4,6,7} nos dice que M es localmente equivalente a la cúspide canónica, la cual está dada por

$$a + bx - x^3 = 0$$

Al hablar de equivalencia local estamos pensando que existe un cambio de coordenadas en una vecindad del origen, tal que M está dada precisamente por esta ecuación. Por tanto el teorema de Thom nos dice que podemos reemplazar la serie de Taylor infinita —con la cual resulta difícil trabajar— por una ecuación cúbica.

La figura 3 representa la superficie dada por esta ecuación. El conjunto de bifurcación B es la proyección sobre un plano perpendicular al eje x de los dobleces de la superficie y nos da la cúspide $27a^2 = 4b^3$.

Si tomamos una sección de la superficie de la cúspide dejando b constante, $b > 0$, obtenemos la catástrofe llamada doblez (ver figura 5).

Un hecho importante de estas catástrofes es que ambas son estables, donde por estable se entiende que para pequeñas per-

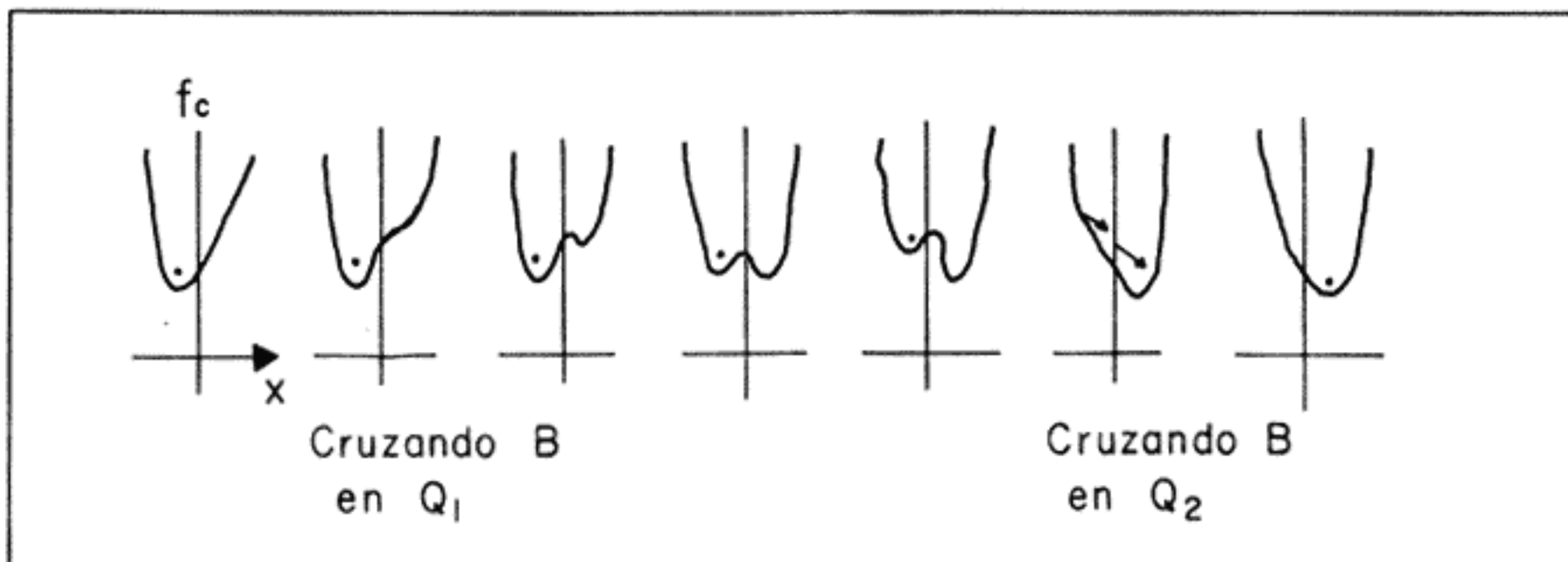


Figura 4. Cambios en las gráficas de f que resultan de desplazar el punto c a lo largo de la recta p .

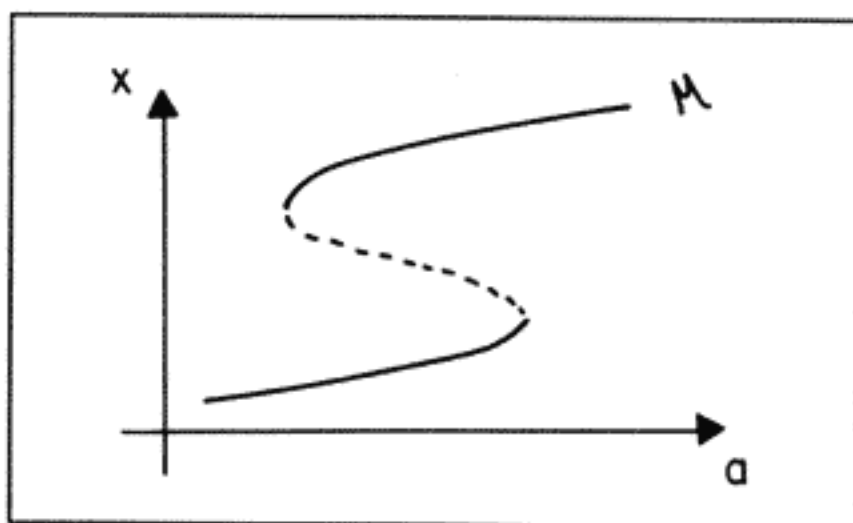


Figura 5. Dos catástrofes doblez, cuyo conjunto de equilibrio está dado por $a + bx - x^3 = 0$ ($b > 0$).

turbaciones de la función de energía obtenemos una superficie que es equivalente localmente a la original.

Para todos debe resultar obvio que cualquiera que sea el proceso descrito, una vez determinada la ecuación para M , y si ésta resulta como en nuestro ejemplo previo, todo lo dicho en la sección anterior sigue siendo válido con sólo "interpretar" el significado de las variables en juego.

Hay que enfatizar que el resultado matemático que permitió la simplificación, sin la cual la TC no tendría la fuerza que posee, es el teorema de clasificación de Thom. Dada su importancia procedemos a explicarlo con más detalle.

EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE THOM

Con el fin de establecer un balance entre la sofisticación inherente al teorema y el carácter de divulgación de este escrito daremos únicamente una idea intuitiva del teorema.

Teorema. Dado un espacio de estados n -dimensional, X , un espacio de control, C , de dimensión 2 y f una función genérica suave* definida en X y parametrizada por C . Entonces M , el conjunto de puntos singulares de f (es decir M está definida por $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$), es una superficie suave contenida en $C \times X$, y las únicas singularidades que aparecen en la proyección de M en C son puntos doblez y cúspides.

En otras palabras, la figura 3 ilustra las estructuras de M más complicadas que pueden aparecer localmente; globalmente pueden existir varias cúspides.

La reducción de la dimensión del espacio control C —de dos a uno— implica que el conjunto M de puntos singulares de f es una curva cuyas únicas singularidades son dobleces.

El teorema se extiende a espacios control de dimensión mayor. El aumento de la dimensión en el espacio control da lugar a nuevas catástrofes. De hecho, si el espacio control es de dimensión 3 tenemos tres nuevas singularidades, cuyos conjuntos de bifurcación aparecen en la figura 6.

Si aumentamos la dimensión del espacio control en uno, es decir, que la dimensión de C sea igual a 4, obtenemos dos

* Suave quiere decir que la función tiene derivadas de todos los órdenes. Genérica significa que si f_c es la función correspondiente al punto control c , para cualquier punto c' suficientemente cercano a c , la función correspondiente $f_{c'}$ es de la misma forma que f_c , es decir, las funciones son equivalentes.

nuevas singularidades: la catástrofe mariposa y la parabólica umbilica.⁴ El Teorema de Thom afirma que siempre es posible efectuar un cambio de coordenadas suave y reversible, con la propiedad de que en la vecindad de un punto dado, el sistema presenta uno de los siete tipos posibles de comportamiento mencionados anteriormente. Éstas son las llamadas catástrofes elementales.

Uno de los hechos sorprendentes del teorema de clasificación es que admite sólo un número finito de posibilidades, y que el número de puntos singulares es en realidad muy pequeño. Sin embargo, esta clasificación perdería fuerza si estas catástrofes no formaran un conjunto abierto y denso en el espacio de funciones suaves definidas en X , es decir, tenemos la posibilidad de afirmar que casi todas las singularidades son de este tipo.^{4,7} Las catástrofes elementales poseen otra propiedad fundamental que recibe el nombre de estabilidad estructural. Esto significa, a *grosso modo*, que la geometría no sufre cambios relevantes al modificar —o perturbar, como diría un experto— ligeramente la función de energía. Este hecho revela su importancia si consideramos que todo fenómeno que ocurra con suficiente regularidad como para ser identificado como tal, debe poseer algún tipo de estabilidad propia ante las pequeñas perturbaciones que ocurren en su medio ambiente.

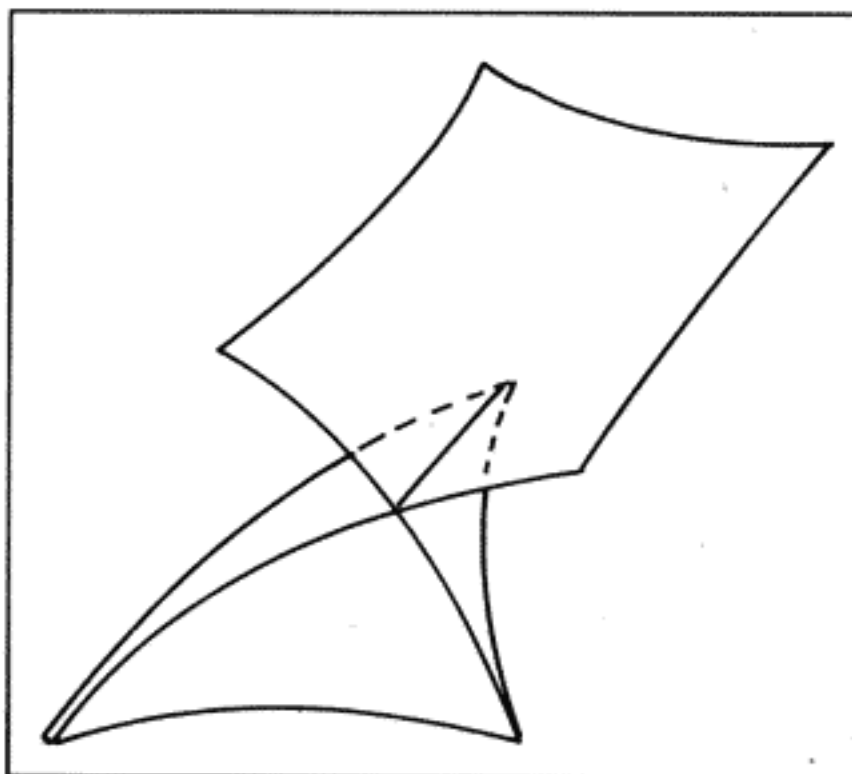


Figura 6. Conjuntos de Bifurcación. (a) Cola de Golondrina,

Una demostración completa del teorema de Thom se puede encontrar en [4]. Para dimensión del espacio control ≥ 5 la clasificación fue extendida considerablemente por Arnold y la escuela Soviética.^{8,9} Thom se avocó al estudio de estas siete singularidades que corresponden al espacio control de dimensión ≤ 4 , ya que estaba especialmente interesado en aplicaciones a la embriología, en la cual C representa el espacio-tiempo.

Antes de pasar a discutir algunas aplicaciones quisiéramos enfatizar que las catástrofes elementales no son solamente importantes por los diversos fenómenos que se han logrado explicar con ellas, sino que la geometría de cada una de ellas es sorprendente e interesante por sí sola.^{4,7,13} Es importante recalcar que en muchas aplicaciones la dinámica no está determinada por una ecuación del tipo gradiente, y en estos casos la

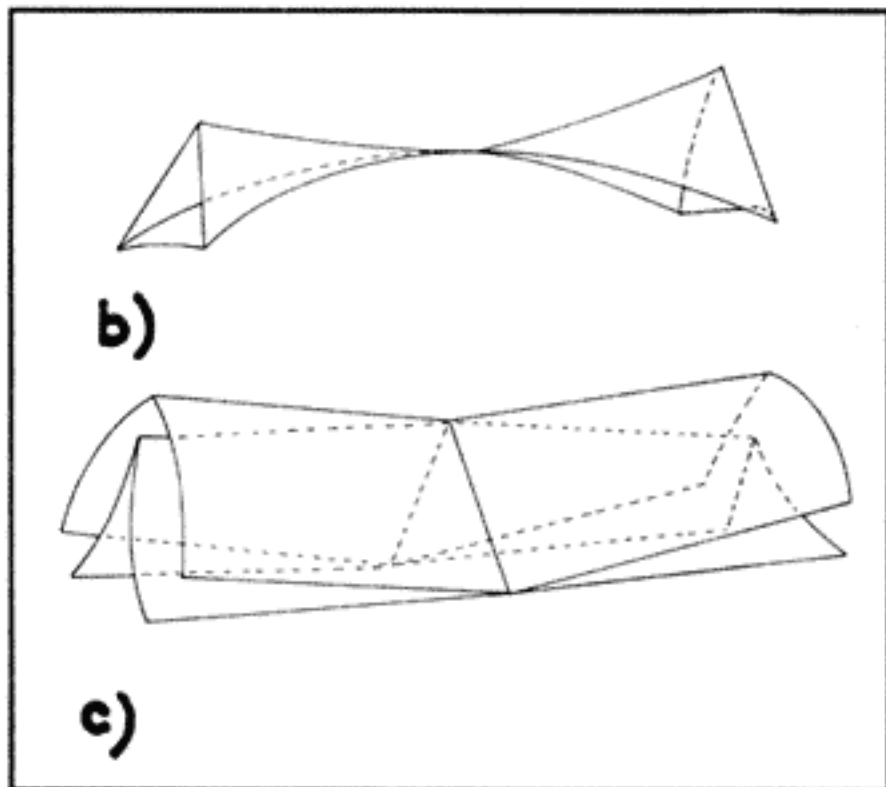


Figura 6. Conjuntos de bifurcación. (b) Elíptico umbílico, (c) Hiperbólico umbílico.

teoría de catástrofes no nos puede decir mucho, ya que catástrofes no elementales pueden ocurrir. Un ejemplo clásico en este sentido es la bifurcación de Hopf.¹⁰

APLICACIONES

Desde sus inicios la TC hizo un reclamo en cuanto a su aplicabilidad a una gama muy amplia de situaciones y de problemas, todos ellos caracterizados por cambios discontinuos o catastróficos en alguna(s) de su(s) variable(s) conforme se sucedían variaciones suaves en los parámetros que determinaban las características del sistema. El interés que despertó entre los hombres de ciencia dio como resultado la aparición de una gran cantidad de artículos en donde la TC daba cuenta, en forma por demás elegante, de varios problemas que hasta entonces habían sido objeto de estudios con resultados poco satisfactorios en cuanto al esclarecimiento de los mecanismos generales que determinaban la dinámica de los sistemas en cuestión. Las limitaciones propias de este tipo de presentaciones hacen difícil ilustrar en detalle el uso de la TC, razón por la cual, en aras de esbozar el "paisaje", sólo mencionaremos algunos problemas en donde se hace patente la "belleza" de este enfoque.

La óptica fue una de las primeras ramas de la ciencia que hizo uso de la TC, en particular en el estudio de las "cáusticas".¹¹ Un ejemplo sencillo de cáustica es la brillante silueta en forma de cúspide que se observa sobre la superficie de una taza de café cuando la luz se refleja en la orilla de la taza e incide en la superficie líquida. Las matemáticas nos dicen que en este caso se presenta la llamada "catástrofe de cúspide". Los rayos de luz forman en un "espacio fase" adecuado una superficie con un doblez que al ser proyectado en el espacio real resulta en una cúspide. Es posible demostrar que los únicos tipos de cáusticas que pueden presentarse son las correspondientes a las catástrofes. Más aún, el arcoiris, que permaneció tanto tiempo en espera de una descripción adecuada, tiene en la catástrofe de doblez a un modelo del comportamiento de los reflejos de la luz solar en las gotas de lluvia. Otro ejemplo muy interesante en donde la TC juega un papel importante es la estabilidad de estructuras elásticas que se estudian en ingeniería (puentes, pilares, etc.).¹² El comportamiento de este tipo de estructuras es modelado en forma aceptable por el hiperbólico umbílico.

Un último ejemplo, y posiblemente de los más ambiciosos en cuanto a riqueza conceptual y posibles consecuencias para el quehacer matemático, es el expuesto por Thom en su libro *Stabilité structurelle et morphogénèse* (1972).⁶ En esta obra la TC es presentada como una teoría general de la morfogénesis (nacimiento o creación de formas), con la biología ocupando un lugar importante. Dado que presenta "líneas de acción generales, mucho de lo ahí expresado sólo alcanza el nivel de conjetura", y por ello quedó sujeto a comprobación tanto a nivel experimental como metodológico. La idea principal era modelar procesos morfogenéticos en términos matemáticos, enfatizando los aspectos cualitativos (de ahí el papel clave que juega la topología), y encontrar y clasificar las propiedades generales que dichos modelos deberían poseer. El crecimiento de un organismo era contemplado como una serie de cambios graduales provocados por cambios catastróficos en los procesos bioquímicos del sistema. Los cambios suaves a su vez podrían ser la causa de la aparición de otras catástrofes y así sucesivamente. Los procesos así tratados de ésta se consideraban vinculados a alteraciones —en otras escalas de tamaño— de las formas de los organismos. Estas ideas fueron tomadas posteriormente por E. C. Zeeman,¹⁴ quien las utilizó en la descripción de un embrión de anfibio. Aquí cabe recordar que sin importar lo bello que una teoría pueda parecerse, su utilidad está fuertemente asociada a su verificación experimental. En dichos términos las ideas de Thom han superado la prueba, y desde la década de los años setenta proliferaron las aplicaciones de la TC en otras ramas del conocimiento tales como astronomía,¹¹ mecánica de fluidos,^{11,12} fenómenos críticos,¹¹ psicología,^{4,11} lingüística,¹⁵ además de en las ciencias sociales: economía, sociología e historia.^{11,25}

CONCLUSIÓN

La Teoría de Catástrofes es con todo rigor una rama de las matemáticas. Plenamente establecida, es una parte de la teoría de singularidades. Su campo de acción nace con el cálculo y continuará creciendo en tanto el estilo de hacer ciencia —el marco conceptual en que se sitúa— siga siendo el de la ciencia actual. Pocas ramas de la matemática en las últimas décadas han generado el entusiasmo que la TC produjo en los años recientes. Entendida adecuadamente la TC aporta nuevos puntos de vista y manera de revelar los elementos esenciales en el desarrollo de ciertos procesos naturales, sociales o del intelecto. Sin embargo, a final de cuentas la TC decepcionó a mucha gente.¹⁶ Los críticos decían: "los modelos de la TC son simplemente 'descripciones' y no aportan nada nuevo en cuanto a explicación del fenómeno". En el caso de los procesos embriológicos estudiados por Thom se decía que lo conducente era recurrir a modelos basados en la biología molecular, es decir, había que remitir la explicación a los elementos físicos básicos que conforman el sistema. Sólo con base en ellos se puede hablar de una explicación. De estos argumentos queda claro que lo que está en juego es algo relacionado con la distinción entre modelos descriptivos y modelos explicativos. Los puntos finos de este debate poseen un grado de sofisticación que rebasa las intenciones de esta presentación. Aun así cabe hacer algunas consideraciones. ¿Cuáles son los criterios que permiten calificar a un modelo como poseedor de un mayor poder de explicación que otro? ¿Podríamos considerar a la Ley de Gravitación Universal como un modelo descriptivo? Ciertamente no explica todo en tanto que no señala cuál es el mecanismo concreto que permite se genere la interacción entre dos cuerpos separados por una distancia finita (el mismo Newton se rehusó a discutir esta cuestión al declarar *Hypotheses non fingo*). Y sin embargo sería absurdo negar que la ley de Newton es uno de los más fantásticos éxitos del pensamiento a lo largo de la



historia. Permite englobar una gran cantidad de hechos empíricos a la vez que ofrece la oportunidad de someter a una sola ley fenómenos aparentemente no relacionados (el movimiento planetario, las mareas, la caída de los cuerpos a la superficie terrestre). Queda la duda entonces de qué es lo que debemos considerar como una explicación. Thom ha señalado que una posible respuesta debería apuntar a considerar como explicativo a todo cuerpo teórico que permita un decremento en la arbitrariedad de la descripción de un conjunto de datos empíricos. Desde este punto de vista no se tiene una explicación a menos que el modelo asocie el fenómeno, analógica o formalmente, a situaciones de mayor generalidad. Una teoría que reuniera esta característica sería a la vez una generadora de modelos. Qué tanto responde la TC a estas características está aún a discusión, y pudiera ser que solo el paso del tiempo y nuevos avances o cambios en las formas de discurrir y entender podrán dilucidar la cuestión.¹⁷ Que así pudiera suceder no es tan inusitado como podría parecer. Una y otra vez teorías que habían sido descartadas han vuelto a resurgir, y aunque la dinámica de este acontecer es muy compleja, podemos citar dos ejemplos de teorías que no hace más de tres años cobraron notoria popularidad, la primera por sus implicaciones científicas y tecnológicas y la segunda por su capacidad de ampliar nuestro poder descriptivo: la superconductividad, con la obtención de materiales superconductores a temperaturas cada vez más cercanas a que tengan un uso práctico, y la teoría de fractales, que aborda el estudio de objetos de geometría tan extravagantes como la de los copos de nieve vistas al microscopio o de las caprichosas formas que adoptan las nubes. Y sin embargo, en algún momento en el pasado, ambas disciplinas parecieron agotadas en cuanto a su objeto de estudio. ▀

REFERENCIAS

1. Browder F. E. y S. Maclane. 1978. The Relevance of Mathematics. *Mathematics Today*. Ed. Lynn A. Steen. Springer-Verlag N.Y.
2. Whitehead Alfred North. 1956. Mathematics as an element in the history of thought. *The World of Mathematics*. Ed. J.R. Newman. Vol. 1. Simon and Shuster, N.Y.
3. Zeeman E. C. 1982. A catastrophe machine. *Towards a theoretical biology* 4, Ed. C.H. Waddington, 276-282.
4. Zeeman E.C. 1977. *Catastrophe Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley (Colección de artículos de Zeeman).

5. Saunders P. T. 1980. *An introduction to Catastrophe Theory*. Cambridge University Press.
6. Thom R. 1975. *Structural Stability and Morphogenesis*. W. A. Benjamin, inc.
7. BrockerTh. 1975. *Differentiable Germs and Catastrophes*. Cambridge University Press.
8. Arnold. V. I. 1974. Critical points of smooth functions, *Proc. Int. Cong. Math.*, Vancouver 19-39.
9. Arnold V.I. 1975. Critical points of smooth functions and their normal forms. *Russian Math. Surveys* 30, 1-75.
10. Marsden J. E. y M. MacCracken. 1976. *The Hopf Bifurcation and its applications*. N.Y. Springer-Verlag.
11. Poston T. & I. Stewart. 1978. *Catastrophe theory and its applications*. Pitman, London.
12. Gilmore R. 1981. *Catastrophe theory for scientists and engineers*. Wiley-Interscience.
13. Woodcock A. E. R. & T. Poston. 1973. A geometrical study of the elementary catastrophes. *Lectures notes in Math.*, Springer-Verlag 373.
14. Zeeman. E. C. 1974. Primary and Secondary Waves in Developmental Biology. *Lectures on Mathematics in Life Sciences* vol.7, A.M.S.
15. 1975. Stewart I. *The Seven Elementary Catastrophes*. New Scientist.
16. Tonietti. 1983. *T. Catastrofi, una controversia scientifica*. Ed. Dedalo.
17. Thom.R. 1984. Matemática y Teorización Científica. En: *Pensar la Matemática*. Varios Autores. Tusquets Editores. España.

