La solución de ecuaciones algebraicas: una visión histórica*

CELIA MARÍA FINAZZI**

INTRODUCCIÓN

El problema de encontrar las raíces de una ecuación algebraica, o sea, de un polinomio, ha sido objeto de estudio de la humanidad desde tiempos muy remotos.

Se tiene conocimiento de que alrededor de 1500 años antes de Cristo, egipcios y babilonios resolvieron problemas que corresponden a simples ecuaciones de primer y segundo grado. Los babilonios llegaron a tratar de solucionar problemas correspondientes a las ecuaciones polinomiales de grado tres y también de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Estos problemas serían hoy simples ejercicios para jóvenes estudiantes de primaria, que los ejecutarían sin mucha dificultad. Por ejemplo en Boyer, 1968, pag. 34 se encuentra un viejo problema tratado por los babilonios: hallar el lado de un cuadrado, si el área, menos el lado, es 14.30. Este problema es, en nuestros días, ejemplificado fácilmente por la fórmula $x^2 - x = 870$, donde x representa el lado del cuadrado,[1] fórmula que le sería sencillo determinar a un estudiante de 13 o 14 años. Esta ecuación de segundo grado tiene las siguientes soluciones: $x_1 = 30$ y $x_2 = -29$ (esta última no es adecuada al problema).

Mientras tanto, como veremos más adelante, problemas como éste y otros, eran tratados de tal manera que hoy, nosotros, los encontraríamos pintorescos.

En el transcurso de este artículo veremos cómo se desarrolló en la historia el tratamiento de las ecuaciones polinomiales, en especial las de grado menor o igual a cuatro. Algunas situaciones aparecerán revelando una característica de profunda naturaleza humana: la competencia, que en muchos casos se ha revelado como la impulsora del desarrollo cultural de la humanidad.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA, ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

Un resultado fundamental en el estudio de los polinomios se establece a continuación:

T.F.A. "Todo polinomio de coeficientes reales o complejos, tiene por lo menos una raíz, real o compleja".

El Teorema Fundamental del Álgebra (T.F.A.) es conocido desde tiempos muy antiguos y su evidencia provino de muchos ejemplos. Era tan fuerte, que incluso era usado antes de ser demostrado. En 1746 d'Alembert lo probó por primera vez, aunque su demostración no fue muy rigurosa, y consecuentemente sí muy criticada, pero la idea fue aprovechada por Weirstrass, quien la desarrolló con un poco más de rigor. La

* Traducción: Silvia Torres Alamilla.

** Instituto de Ciencias Matemáticas de São Carlos, Universidad de São Paulo, Brasil.

[1] Los babilonios adoptaron el sistema de numeración de base 60 y 870, es el valor, en la base decimal, correspondiente a 14.30 en la base 60: $14(60) + 30 = 8(10)^2 + 7(10) + 0 = 870$.

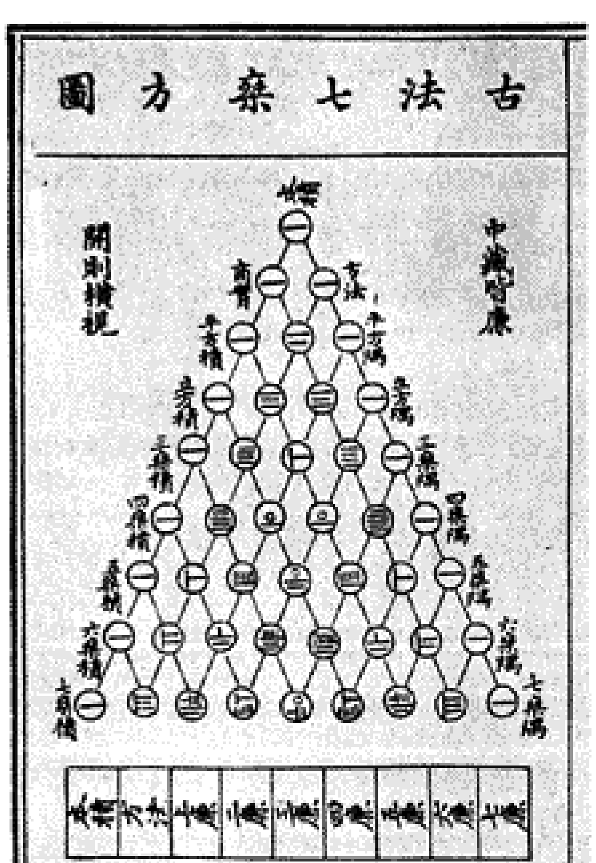
primera prueba realmente satisfactoria fue realizada por Gauss en 1799. Este gran matemático hizo otras tres pruebas, la última, puramente de existencia, en 1849. Otros matemáticos, Cauchy y Sturm, también lo demostraron. Una demostración clara se encuentra en Schreier & Sperner, 1951, pag. 238.

Como consecuencia inmediata del T.F.A. tenemos:

"Todo polinomio de grado n de coeficientes reales o complejos, tiene n raíces, reales o complejas."

Sin embargo las demostraciones citadas del T.F.A., nada ayudan en lo que se refiere a sus aspectos constructivos, ya que todas son puramente de existencia; esto es, prueban que las raíces existen, y de alguna manera "construyen" las raíces del polinomio.

Es claro que la humanidad se preocupaba desde tiempos remotos por el problema de resolver una ecuación algebriaca, y es claro que, en los primeros tiempos, era utilizada para casos bien simples.



Las primeras soluciones de que se tiene noticia, fueron sin duda, de ensayo y error.

3. ECUACIONES LINEALES.

Estas ecuaciones son las correspondientes a los polinomios de primer grado, por tanto de la forma:

$$ax + b = 0.$$

Las informaciones de que disponen los historiadores, registran a los egipcios como el primer pueblo en tratar una ecuación lineal. Entre los papiros de aquel pueblo, el más importante de naturaleza matemática, es sin duda el *Papiro de Ahmes*, también conocido como el *Papiro de Rhind*, que se encuentra en el Museo Británico. Fue adquirido en 1858, en una ciudad al márgen del Nilo por el escocés Henry Rhind, siendo compilado en 1654 a.c. por Ahmes de quien toma el nombre (Boyler, 1968, pag. 12). Los egipcios no se referían a problemas que involucraran objetos concretos, pero ya se hablaba de *"aha"*, que son lo que hoy conocemos como incógnitas. Por ejemplo, el problema 24 del Papiro de Ahmes, que pide el valor de *"aha"* si *"aha"* y un séptimo de *"aha"* es 19. En forma moderna escribiríamos:

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

La solución presentada por ellos se hace de manera tentativa: un valor arbitrario, o sea, un *"falso"* es supuesto para *"aha"* y se realizan las operaciones indicadas al lado izquierdo de la igualdad; el resultado de estas operaciones se compara con el resultado deseado y usando proporciones, se encuentra la solución

Presentamos a continuación el procedimiento que usaban los egipcios:

Sea 7 el falso. Entonces, usando la forma del texto:

1 vez	da 7
$\frac{1}{7}$	da 1
$1\frac{1}{7}$	da 8

Tantas veces cuantas necesitemos multiplicar 8 para obtener 19, tantas veces 7 deberá ser multiplicado para dar el resultado deseado

	1 vez	da 8
	2	da 16
	$\frac{1}{2}$	da 4
	$\frac{1}{4}$	da 2
	$\frac{1}{8}$	da 1
Juntos	$2, \overline{1/4}, \overline{1/8}$	dan 19

Multiplicando 2, 1/4, 1/8 por 7 se obtiene el resultado deseado

1	vez da	2, 1/4, 1/8
2	da	4, 1/2, 1/4
4	da	9, 1/2
Juntos 7	dan	16, 1/4, 3/8, y es el resultado.

La sencillez de este procedimiento, cuando es aplicado a problemas que involucran fracciones, se muestra en el ejemplo que sigue, extraído de un trabajo de Trenchant de 1566:

Una cisterna se vacía por medio de tres llaves distintas en 2, 3 y 4 horas respectivamente. La pregunta es, cuántas horas son necesarias para vaciar la cisterna si las tres llaves se abren simultáneamente.

La solución se presenta a continuación:

si el tiempo usado fuese	12 horas
la primera llave vaciaría	6 veces
la segunda llave vaciaría	4 veces
la tercera llave vaciaría	3 veces

Así, en 12 horas, las llaves vaciarían la cisterna 13 veces. Entonces para vaciarla 1 vez se necesitan 12/13 horas, o sea 55 5/13 minutos.

El método anterior fue conocido por los hindúes y árabes y más tarde fue introducido a Europa con el nómbre de "*posición falsa*".

Una variación de este método es la regla de la "*doble posición falsa*", según la cual se hacen dos tentativas y se anota el error correspondiente a cada una de ellas. Podemos entender el procedimiento a partir del ejemplo siguiente, transcrito del trabajo "*Ground of Arts*", (1542) del matemático inglés Robert Recorde:

One man said to another,
I think you had this year two thousand
Lambes: so had I said the other;
but what with paying the tythe
of them, ant then the several losses
they are much abated: for at
one time I lost half as many as
I have now left, and at another time
the third part of so many,
and the third time 1/4 so many.
Now guesse
you how many are left.

Un hombre dijo a otro,
creo que este año tuviste 2 millares de carneros:
así fue dijo el segundo; y qué de la paga
de la décima parte del total y luego las cuantiosas
pérdidas con los que son reducidos,
pues en una ocasión perdí la mitad
de los que ahora tengo y en otra
la tercera parte de dicha cantidad y
la tercera vez un cuarto de ella.
Ahora averigua cuántos quedan.

La solución presentada por Recorde fue:

Después del décimo, sobran 1800

1) Si el total sobrante fuese 12, al principio el hombre tenía 12 + 6 + 4 + 3, o sea, 25; error correspondiente: 1775.

2) Si el total sobrante fuese 24, al principio el hombre tenía 24 + 12 + 8 + 6, o sea, 50; error correspondiente: 1750.

Enronces, él coloca el siguiente diagrama :

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 24 \\ & \times & \\ 1775 & & 1750 \end{array}$$

y la diferencia entre los productos de dos números unidos se divide por la diferencia entre los errores para obtener el resultado pedido:

$$\frac{42600 - 21000}{1775 - 1750} = 864$$

El procedimiento es exactamente el que conocemos hoy por *método de las secantes.*

Es interesante y pintoresco notar que Recorde, en el trabajo anteriormente citado, publica esta regla en forma de verso:

Gesse at this woorke as happe doth leade.
By chaunce to truthe you may procede.
And firste woorke by the question,
Although no truthe therein be don.
Suche falsehode is so good a grounde,
That truth by it will soone be founde
From many bate to many mo,
From to fewe take to fewe also.
With to much ioyne to fewe againe,
To the fewe adde to manye plaine.
In crossewaies multiplye contrary kinde,
All truthe by falsehode for to fynde.

Observa este trabajo que al suceder enseña
Quizá a la verdad puedas acceder.
Primero trabaja en lo que el problema muestra,
Aunque ninguna verdad ahí se encuentre.
Tal falsedad es tan buen fundamento,
Que mediante él la verdad pronto se encontrará.
De muchas disputas a muchas más,
De tomar algo a tomar menos.
De mucho unir a poco de nuevo hacerlo,
A demasiado poco añadir lo demasiado pleno.
en formas cruzadas multiplica esencias contrarias,
Y así toda la verdad encontrar por falsedad.

Recorde verdaderamente sorprendía a sus amigos al proponer problemas difíciles que entonces resolvía con esa regla. Es claro que, por lo expuesto, concluimos que las ecuaciones lineales fueron tratadas en los tiempos más remotos por métodos preferentemente artiméticos, en lugar de métodos algebraicos. Conviene recordar aquí lo importante que fue la contribución en este campo de los escritores árabes, los cuales establecieron y aplicaron axiomas de transición de términos y redujeron ecuaciones implícitas a explícitas. Ellos introdujeron, a través de Al Khowarisme (825 d.c.) el nombre de álgebra, que hasta hoy se usa.

4. ECUACIONES CUADRÁTICAS.

Las ecuaciones polinomiales de segundo grado fueron resueltas aritméticamente por los egipcios, geométricamente por Euclides y sus seguidores y algebraicamente por los hindúes. El escritor árabe Al Khowarisme desarrolló reglas aritméticas que demostró por métodos geométricos.

El tratamiento *aritmético* aparece en otro documento matemático dejado por los egipcios: el *Papiro de Berlín*, que data de 2 000 a.c. aproximadamante. Contiene ecuaciones cuadráticas que fueron resueltas usando la regla del falso. Utilizando notación moderna, la explicaríamos así:

Dadas las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y = \frac{3}{4}$$

Si $x = 1$, entonces $y = \frac{3}{4}$ y $x^2 + y^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$.

En estas condiciones $x^2 = \frac{100}{25/16}$ y $x = 8$.

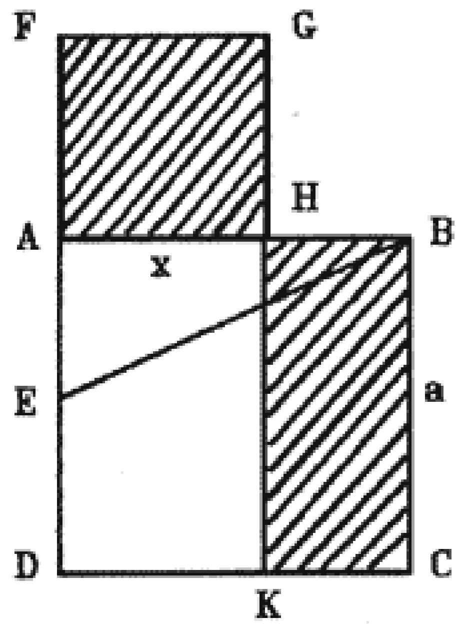
Los griegos resolvieron ecuaciones cuadráticas por métodos geométricos. La relación entre estas ecuaciones y áreas se originó con los pitagóricos. En los célebres *"Elementos"* de Euclides (300 a.c.), aparecen diversos problemas de esta naturaleza. Citaremos un ejemplo para ilustrar:

Dado un segmento de línea de longitud a, cortarlo en dos segmentos: uno de largo a menos x y otro de largo x, de tal manera que el cuadrado con base en x tenga una área igual a la del rectángulo de lados a y a menos x.

En forma moderna representamos este problema con la ecuación:

$$a(a - x) = x^2 + ax = a^2.$$

A continuación se presenta la solución dada por Euclides:



Dada la línea AB construya un cuadrado ABCD.

— Bisecte AD en E y dibuje EB.
— Extienda AD a través de A hasta F tomando EF = EB.
— En AF construya un cuadrado AFGH y extienda GH para cortar DC en K.
— Entonces el rectángulo HC es igual al cuadrado AG.

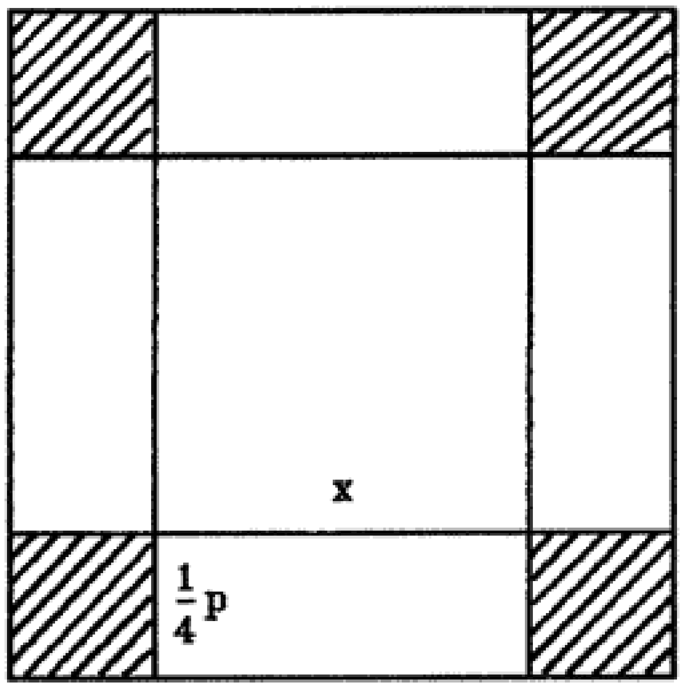
Es mucho más fácil probar, aplicando teoremas de área a la figura, que las áreas sombreadas son iguales entre sí, o sea,

$$a(a - x) = x^2.$$

En la India, las cuadráticas fueron tratadas algebraicamente. Sridhara (1025 d.c.) parece haber sido el primero en establecer el llamado "método hindú" para cuadráticas. Es citado por Bhaskara (1150 d.c.) en la siguiente forma: "Multiplique ambos lados de la ecuación por un número igual a cuatro veces el término cuadrado y sume a ellos un número igual al cuadrado de la cantidad original por encontrar. Entonces extraiga la raíz."

En la simbología moderna este enunciado es simple: dada $ax^2 + bx = c$, tenemos inicialmente $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$ y entonces $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$, por tanto $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$. La raíz negativa era omitida.

Los árabes también trabajaron con cuadráticas. Entre ellos Al-Khowarizme (825 d.c.), que tiene demostraciones geométricas para sus dos reglas algebráicas, basadas en modelos griegos. Citaremos una de ellas, correspondiente a la ecuación $x^2 + px = q$, donde $p = 10$ y $q = 39$.



Al-Khowarizme construye un cuadrado como el de la figura anterior. Entonces, el área de la figura completa $(x + 1/2\ p)^2$ es igual a la suma de la parte no sombreada $(x^2 + px)$ más la parte sombreada $(p^2/4)$. En el caso específico presentado, $x^2 + 10x = 39$ queda:

$$(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64;\ x + 5 = 8;\ x = 3.$$

Como siempre acostumbraba suceder, aquí también la raíz negativa era omitida.

Hay también una regla de Omar Khayyam (1100 d.c.) para la ecuación $x^2 + px = q$.

Más tarde, en 1590 aproximadamente, Vieta realizó avances en los métodos algebráicos. Consiguió reducir una cuadrática general a una cuadrática pura utilizando una hábil sustitución. Su ecuación general es puesta de la siguiente manera:

"a quadr. + B2 in A aequantur Z plano".

En nuestros días esto se traduciría como $x^2 + 2ax = b$. Con la sustitución $x = u + z$ y después $z = a/2$, la ecuación se transforma en:

$$u = \sqrt{a^2 + b},\ \text{por lo tanto}\ x = -a + \sqrt{a^2 + b}.$$

Después de Vieta encontramos soluciones por factorización con Harriot (1631). Entre los métodos más modernos citamos aquél que usa determinantes, introducido por Euler (1750) y Bezout (1775) y mejorado por Sylvester (1840) y Hesse (1844).

5. CÚBICAS: UNA CONTROVERSIA HISTÓRICA

El caso de las cúbicas, tal vez por presentar mayor dificultad, tiene una historia más interesante.

Se tiene noticia de que Arquímedes (225 a.c) trabajó con una cúbica proveniente de un problema de Geometría. Diophantus, un siglo más tarde, enfrentó una cúbica en un problema geométrico. Los árabes también trabajaron con ellas y el poeta algebrista Omar Khayyam (1100 d.c.) clasificó trece casos de cúbicas que él consiguió resolver. En el siglo XIII Fibonacci (1225) fue desafiado en un debate a resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Observamos que fue decisivo el papel de los debates en el progreso de la solución de ecuaciones algebráicas, como veremos más adelante.

En 1397 Gutemberg inventa la imprenta, lo que representó un factor de suma importancia para el progreso de toda la ciencia y la humanidad, inclusive en el campo que ahora tratamos.

Los italianos fueron, sin duda, los que más destacaron en la solución de las cúbicas. Pero la historia no nos da condiciones para responder con seguridad a la pregunta:

¿Quién propuso la solución de la ecuación de tercer grado?

A principios del siglo XVI un matemático de Boloña, Scipione del Ferro, resolvió cúbicas del tipo $x^3 + ax = b$. Según la costumbre de la época, él no reveló su descubrimiento, excepto a un estudiante, Antonio María Fior.

Veinte años después, Fior y otro italiano de nombre Tartaglia, realizaron un debate: cada uno de ellos enviaba treinta problemas al otro, y el que resolviese un mayor número de problemas en 50 días sería proclamado vencedor. Ansioso por derrotar a Fior y sabiendo que su oponente tenía el esquema para cierto tipo de cúbica, Tartaglia dedicó su tiempo a la cúbica en la que faltaba el término de primer grado. Descubierto el esquema, se dedicó a la cúbica en la que faltaba el término de segundo grado. Él mismo cuenta que descubrió la solución menos de dos semanas antes del debate. Equipado

Jerome Cardan

con los dos esquemas, uno conocido por Fior y otro no, Tartaglia resolvió todos los problemas que le fueron enviados por Fior en dos horas y derrotó completamente a su oponente.

El historiador Ball cuenta, en su libro (Ball, 1915), que Cardano pidió el esquema a Tartaglia, pero éste se rehusó. Cardano, diciendo a Tartaglia que había un noble interesado en la solución, combinó un encuentro con él en Milán. Cuando Tartaglia llegó, descubrió el engaño, pero fue finalmente persuadido a ofrecer a Cardano su descubrimiento, bajo promesa de guardar el secreto. La solución fue ofrecida en forma de verso:

Quando chel cubo con le cose appresso	
Se agguaglia à qualche numero discreto	$x^3 + bx = c$
Trouan dui altri differenti in esso	$u - v = c$
Dapoi terrai questo por consueto	
Che 'l lor produtto sempre sia eguale	$uv = (b/3)^3$
Al terzo cubo delle cose neto,	
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sostratti	
Varra la tua cosa principale	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Cuando el cubo con la cosa se ha formado	
se iguala a algún número discreto	$x^3 + bx = c$
Encuentra otros dos que en eso difieran.	$u - v = c$
En adelante considerado esto conocido	
Que su producto sea siempre igual	$uv = (b/3)^3/$
Al cubo de la tercera parte de la cosa neta,	
De ahí el residuo en general	
De sus lados cubos bien restados.	
Valdrá tu cosa principal	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

y Tartaglia afirmó haber dado toda la teoría a Cardano. Éste admite haber recibido la solución de su oponente, pero sin explicaciones. De cualquier modo, ya era posible resolver $x^3 + bx = c$ y $x^3 + ax^2 = c$. La reducción del caso general a la primera de las formas no fue considerada por Tartaglia. El hecho es que Cardano, en 1545, publicó su "Ars Magna" y en él, la contribución de Tartaglia; cuando el segundo protestó, Ferrari, un estudiante de Cardano, afirmó que su maestro había recibido la solución de Ferro. Habiendo recibido de Tartaglia el desafío para un duelo, Cardano envió a Ferrari y se sabe que los seguidores de éste eran tan agresivos y sarcásticos, que Tartaglia agradeció el haber salido vivo de ahí.

Desde esa época, la solución es conocida bajo el nombre de Cardano.

A continuación presentamos la solución en su forma moderna:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$h = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}ab - \frac{1}{27}a^3$$

$$w_1^2 = -3(a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2)$$

$$w_2^3 = h + \frac{1}{18}w_1$$

$$w_3^3 = h - \frac{1}{12}w_1$$

$$x = -\frac{1}{3}a + w_2 + w_3$$

Hay dos valores para w_1 y por lo tanto seis valores para w_2 y w_3. Seleccionamos las parejas w_2, w_3 tales que

$$w_2w_3 = \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b.$$

Aunque haya duda en cuanto a quién fue el verdadero autor de la fórmula, es un hecho que Cardano contribuyó mucho al desarrollo de la teoría de las ecuaciones algebráicas.

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE TRES

La solución de la ecuación de cuarto grado fue encontrada por Ferrari en circunstancias también interesantes. Consta que Cardano, habiendo recibido un problema de Luanne de Tonini da Coi, con la conjetura de que no había solución, no consiguó resolverlo y lo entregó a su discípulo Ferrari. Éste, no obstante su juventud, tuvo éxito donde su maestro falló. Con la publicación de *Ars Magna*, el proceso se volvió muy conocido. En Tietze, 1965, pag. 213, se encuentra el complicado esquema para la ecuación general de cuarto grado, con simbología moderna.

Más tarde Euler encontró un método diferente del de Ferrari para reducir una ecuación de cuarto grado a una de tercer grado. Imaginó entonces, conforme publicaciones suyas de 1732 y 1749, que podía reducir ecuaciones de quinto a cuatro grado. Lo mismo supuso Lagrange, pero ambos fallaron.

Leibnitz no creía que había solución para las ecuaciones generales de grado superior a cuatro, conforme se deduce de sus cartas de 1678 y 1683; él llegó a afirmar que había probado este hecho. Un siglo más tarde Gauss afirmó lo mismo.

El primer trabajo encaminado a probar, sin mucho rigor, que una ecuación de quinto grado no puede ser resuelta por métodos algebraicos, se debe a Ruffini (1803-1805). En 1826 Abel dio la primera prueba realmente rigurosa.

El gran matemático Niels Henrik Abel tuvo una corta y sufrida existencia. Nació en Noruega el 5 de agosto de 1802 y aún muy joven contrajo tuberculosis, falleciendo a los veintisiete años. Muy tímido y de temperamento melancólico, nunca imaginó haber contribuido tanto al desarrollo de la Matemática, por la cual comenzó a interesarse a los dieciseis años. En 1821 entró a la Universidad de Christiania y estudió los trabajos de Euler, Lagrange y Legendre. En 1823 llegó a creer que había descubierto la solución para la ecuación de quinto grado, pero luego percibió que estaba en un error. Trató entonces de probar la imposibilidad y su prueba, bastante difícil, fue publicada inicialmente en 1824, en forma de panfleto y posteriormente en una revista de matemática. Abel estudió otros innumerables problemas y estuvo en Berlín, Italia y París. En este último lugar escribió un largo trabajo, pero el manuscrito fue extraviado por el "referi", que era Cauchy. Posteriormente éste fue exiliado, y el trabajo cayó en manos de Gergonne, habiendo sido finalmente publicado en 1845. Es un hecho que Abel tuvo problemas hasta de orden financiero para vivir, y que, habiendo sido llamado en 1829 para dirigir un gran Instituto Politécnico, murió antes de conocer dicha noticia.

Otro gran matemático que desarrolló profundas teorías que se relacionan con las ecuaciones algebráicas fue Evarsite Galois, nacido el 25 de octubre de 1811 en el sur de París. En 1828, siendo un estudiante de diecisiete años, anunció sus primeros descubrimientos matemáticos. No se interesaba por otros asuntos que no fueran de índole matemática, y en 1829, no consiguió entrar a la Escuela Politécnica, pero logró en el mismo año un lugar en la Escuela Normal, de donde fue expulsado por mezclarse en política y criticar al director. Tres manuscritos suyos fueron rechazados para ser publicados por la Academia de París. Murió en un duelo, el 30 de mayo de 1832, debido a un caso banal de amores. Durante la noche anterior a su muerte, dejó una carta-testamento de sus descubrimientos a su amigo Chevalier. De la famosa Teoría de los Grupos, debida a Galois, se deduce con facilidad el hecho de que las ecuaciones de grado superior a cuatro, no tienen solución que pueda ser expresada por medio de una fórmula algebráica.

7. CONCLUSIÓN

Este trabajo representa un breve relato sobre la historia del desarrollo de las ecuaciones algebráicas. A lo largo de su lectura nos dimos cuenta más de una vez, de hechos reveladores y de características siempre presentes en el hombre: ansia del descubrimiento, profundizaje del conocimiento, destreza y sagacidad, sentimientos de competencia, y por qué no decirlo también, de envidia, ambición, egoismo y megalomanía. Es innegable que tales factores representan, entre otros, motivos determinantes para el desarrollo de las ciencias.¤

Revisión del texto: León Kushner S.
Traducción de los versos: Concepción Ruiz y Rafael Martínez.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, W.W. Rouse 1915: *A Short Account of the History of Mathematics*, London.

Boyer C.B. 1968 *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, USA.

Sanford, V. A 1930, 1958. *Short History of Mathematics*, The Riverside Press, USA.

Schreier, O., Sperner, E.1951. *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Chelsea Publishing Company, New York.

Smith, D.E. 1925, 1953. *History of Mathematics*, Vol. II, Dover Publications, New York.

Tietze, H. 1965. *Famous Problems of Mathematics*, Graylock Press, New York.