Un problema famoso: la trisección del ángulo

NIEVES MARTÍNEZ*

El problema de la trisección del ángulo, junto con la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo forman un grupo de problemas imposibles, conocidos como "los tres problemas griegos". Éstos, desde su planteamiento en el siglo V a.c. hasta su solución en el siglo XIX, hicieron pensar a muchos grandes matemáticos, motivaron el desarrollo de diversas áreas de las matemáticas y el descubrimiento de nuevas teorías.

Partes del Álgebra, la Geometría y el Cálculo surgieron o se enriquecieron con el estudio de estos problemas. Las curvas que conocemos como cónicas (elipse, parábola e hipérbola) (figura 1), de indudable utilidad en física y matemáticas, se descubrieron de la misma forma. Sin las cónicas, no podríamos calcular en qué dirección disparar un cañón para que dé en el blanco, ni existirían instrumentos ópticos como el microscopio.

Otros intentos de resolver los Problemas Griegos llevaron al desarrollo de la Teoría de Ecuaciones y, en una forma más indirecta, al desarrollo de la Teoría de Grupos, fundamental para el Álgebra Moderna.

Algo muy notable acerca de estos problemas es que no solamente despertaron el interés de grandes matemáticos, sino también el de médicos, abogados, sacerdotes, banqueros, militares, etc.; esto hace que nos planteemos las siguientes preguntas:

¿Por qué estos problemas han tomado un lugar tan sobresaliente en la historia de las matemáticas?

¿Qué hace que gente de origen e intereses tan diversos se ocupe de ellos?

Y la respuesta podría ser que los tres tienen en común características que los convierten en algo que podríamos llamar "un buen problema matemático" y que de forma resumida son:

a) Su formulación es clara y elemental, de manera que puede entenderlo cualquiera.

b) A pesar de tener una formulación tan simple, su solución requiere de mucho ingenio y creatividad.

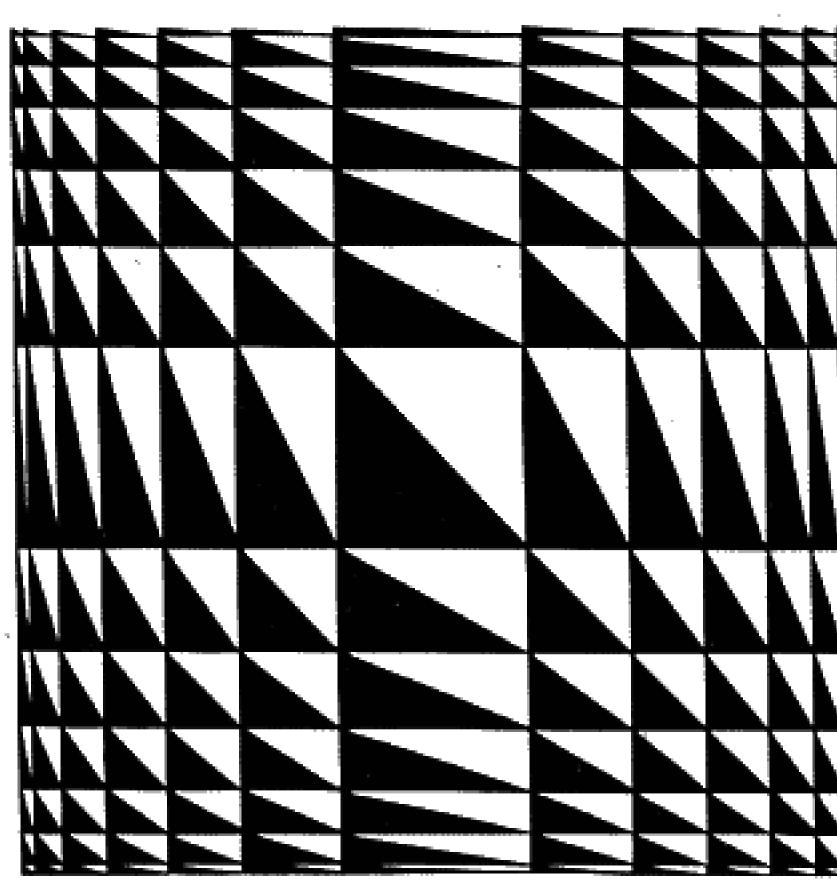
* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

c) Su solución no solamente nos permite dilucidar el problema mismo, sino que da luz en relación a una clase más amplia de problemas.

Ahora bien, pasando al tema que nos ocupa específicamente diremos que el problema de la Trisección del Ángulo consiste en lo siguiente:

TRISECAR CON REGLA Y COMPÁS CUALQUIER ÁNGULO

Todos sabemos que bisecar cualquier ángulo es fácil (figura 2). Es natural pensar que mediante un procedimiento semejante podríamos trisecarlo; sin embargo puede demostrarse matemáticamente que tal procedimiento no existe. Esto no quiere decir que ningún ángulo es trisecable, existen ángulos que sí lo son, como por ejemplo el ángulo de 90°. La trisección de este ángulo involucra la construcción con regla y compás del hexágono regular y la bisección del ángulo (figura 3). Ya que el ángulo de 90° es trisecable, también lo es el de (90°/2=45°,



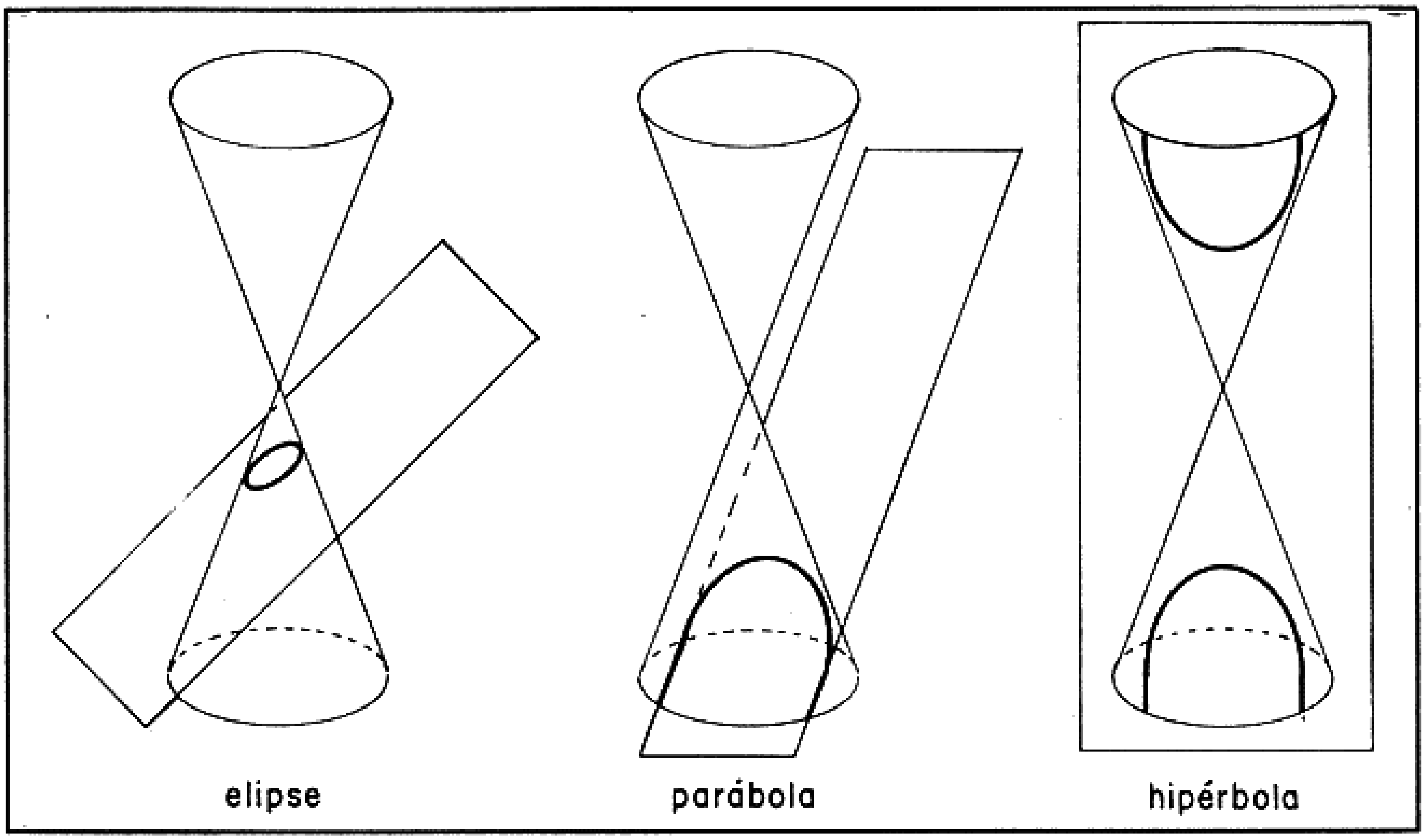


Figura 1.

figura 4) y repitiendo este proceso, también son trisecables los de la forma 90°/2k con k=1, 2, 3, ...

El método de Arquímedes

Así como existen métodos para trisecar ciertos ángulos con regla y compás, existen métodos muy ingeniosos con otros instrumentos para trisecar cualquier ángulo. Un método muy sencillo que se le atribuye a Arquímedes es el siguiente:

Sea α el ángulo dado, formado por las rectas l y m; sea C su vértice (figura 5).

Construcción:

1° Trazamos un semicírculo S con centro en C y radio arbitrario. Sean B y D las intersecciones de S con l y sea A la intersección de S con m.

2° En una regla, marcamos la distancia igual al radio CB del semicírculo. Sean 1 y 2 estas marcas.

3° Colocamos la regla de tal modo que 2 coincida con algún punto del semicírculo S, 1 con algún punto de la recta l y que, al mismo tiempo, la regla pase por A. Sean E y F los puntos de l y S que acabamos de localizar con las marcas 1 y 2 respectivamente.

El ángulo AEB es un tercio del ángulo α.

Para demostrar que es verdadera la afirmación que acabamos de hacer, hagamos las siguientes consideraciones.

El triángulo EFC es isósceles porque EF=FC, y por lo tanto

$$\text{ángulo CEF} = \text{ángulo FCE} = \gamma$$

lo cual implica que

$$\text{ángulo EFC} = 180°\text{-}2\gamma.$$

Como E, F, A están alineados:

$$\text{Ángulo CFA} = 2\gamma$$

(ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes).

El triángulo FCA es isósceles porque FC = CA y por lo tanto

$$\text{ángulo AFC} = \text{ángulo CAF} = 2\gamma$$

y además

$$\text{ángulo FCA} + 2\,\text{ángulo AFC} = \text{ángulo FCA} + 4\gamma = 180°(1)$$

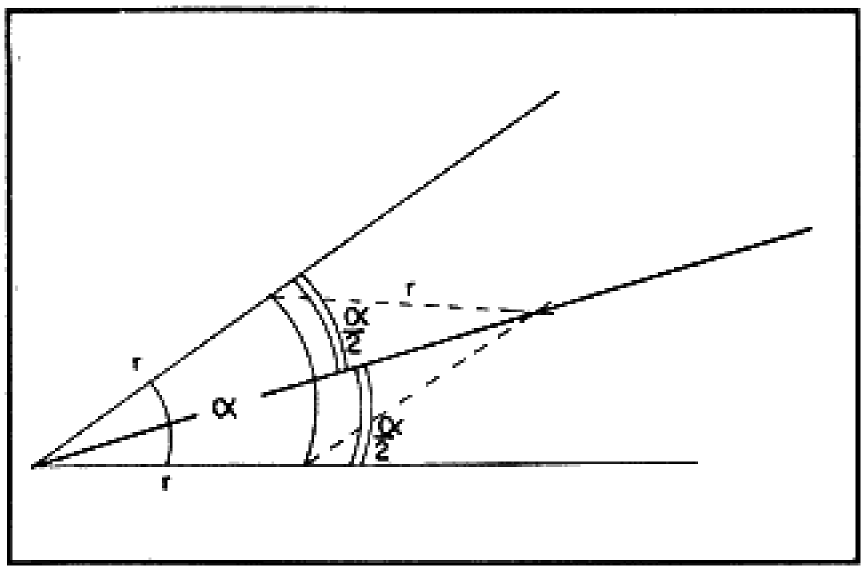


Figura 2.

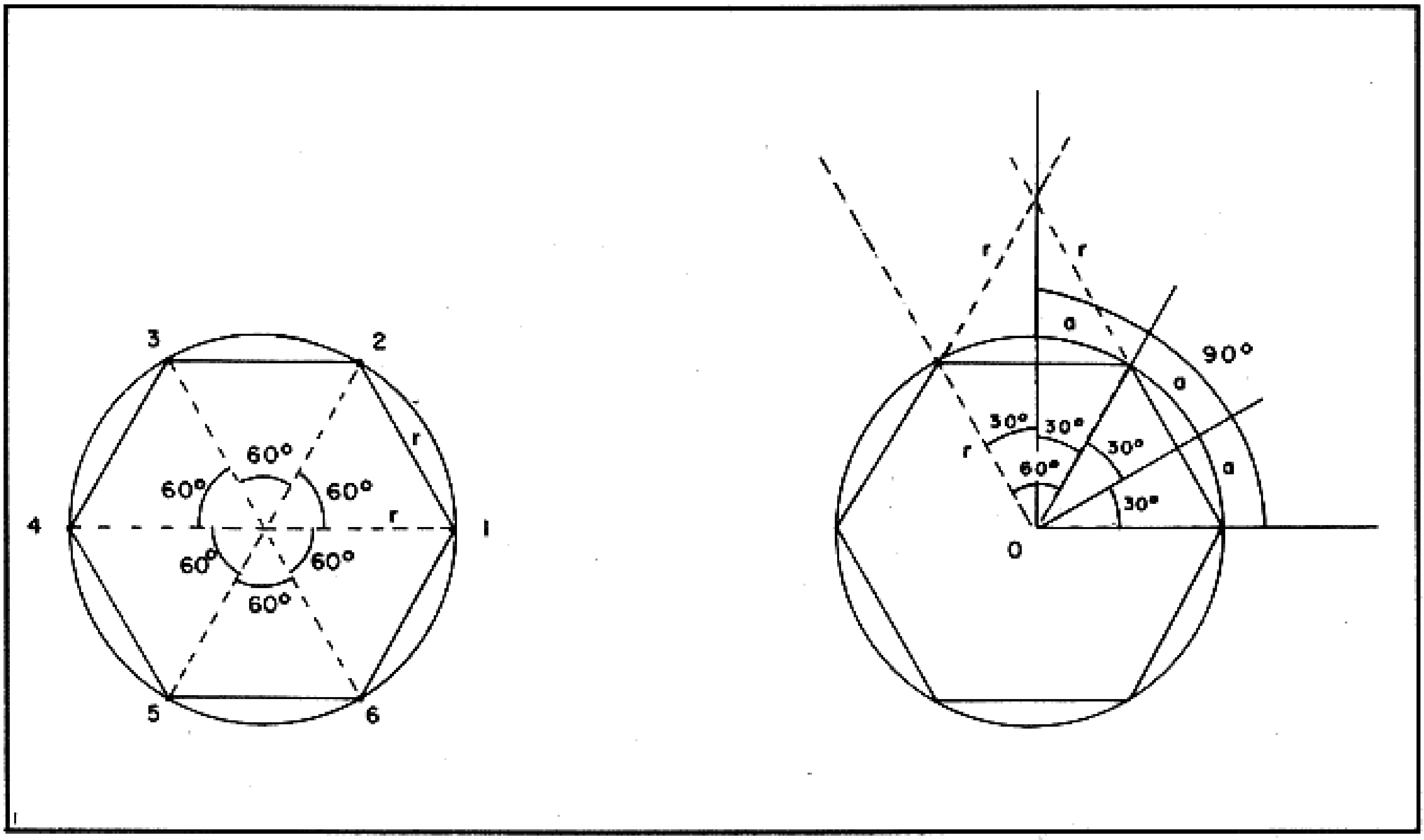


Figura 3.

Como D, C, B están alineados:

$$\gamma + \text{ángulo FCA} + \alpha = 180°$$

Por (1) tenemos que:

$$\text{ángulo FCA} + 4\gamma = \text{ángulo FCA} + \gamma + \alpha$$

y esto implica que

$$\alpha = 4\gamma - \gamma = 3\gamma,$$

concluimos que

$$\gamma = \alpha/3.$$

Con este método, hemos construido un ángulo que es un tercio del ángulo dado y transportándolo con compás, trisecamos el ángulo α.

Sin embargo hemos localizado ciertos puntos en nuestra construcción de manera indebida según las normas establecidas para el uso de la regla y compás.

Las normas de cómo pueden utilizarse la regla y el compás las estableció Platón (430-349 a.c.).

¿Como pueden utilizarse la regla y el compás?

• La regla puede utilizarse para trazar la recta que pasa por dos puntos y para prolongar indefinidamente cualquier segmento de recta.

• El compás puede utilizarse para trazar la circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio y para transportar distancias.

Un problema de construcción con regla y compás podemos decir que está resuelto si su solución consiste en un número finito de aplicaciones de la regla y el compás, respetando las normas de uso que acabamos de establecer.

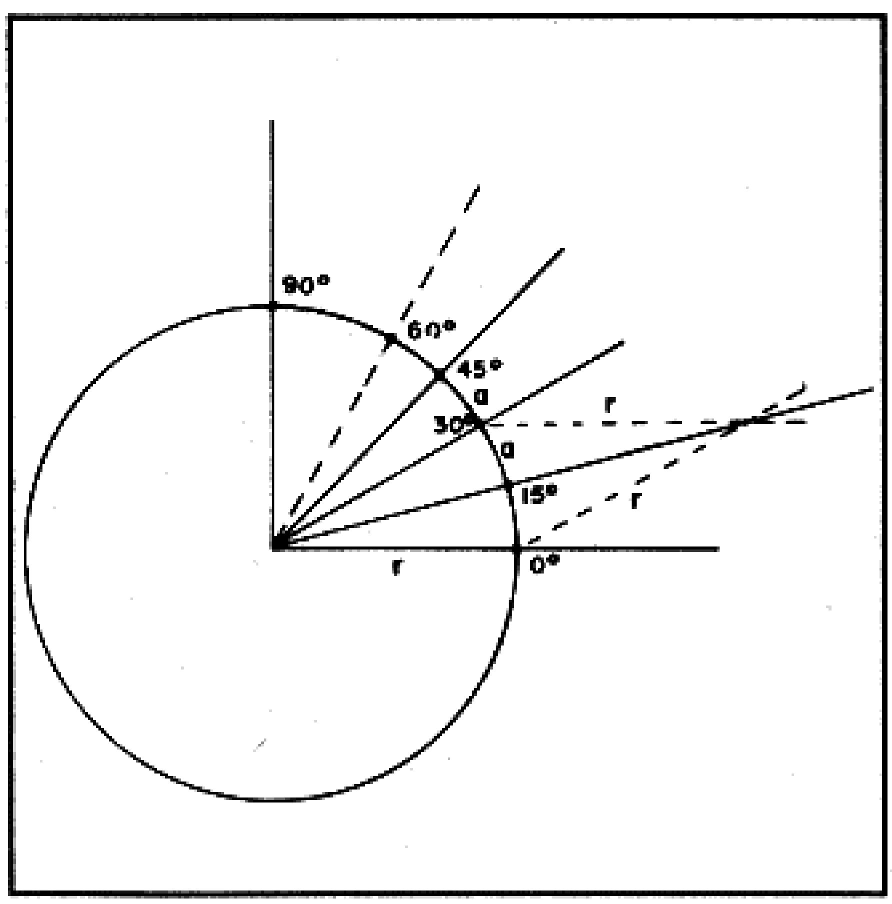


Figura 4.

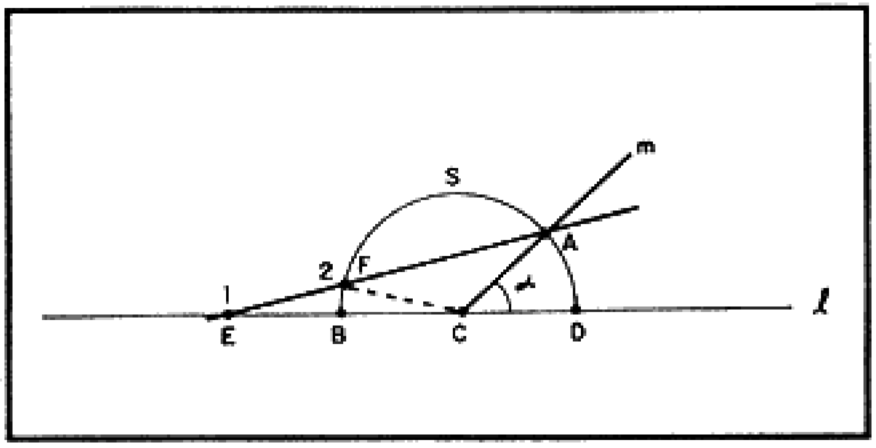


Figura 5.

En la solución de Arquímides hemos marcado la regla, lo cual no está permitido; pero esto no es lo grave ya que el compás nos permite transportar distancias; lo que hemos hecho, que no está permitido, es que hemos determinado los puntos E y F por observación, moviendo la regla sobre el plano hasta quedar en la posición conveniente. Es este movimiento precisamente el que no puede hacerse con nuestra regla y compás.

¿Cómo un problema práctico como el de la trisección del ángulo podemos formularlo matemáticamente?

Con regla y compás podemos llevar a cabo cinco construciones fundamentales:

1. Trazar la recta que pasa por dos puntos.
2. Determinar el punto de intersección de dos rectas.
3. Trazar la circunferencia con centro en un punto dado y de radio dado.
4. Determinar los puntos de intersección de dos círculos.
5. Determinar los puntos de intersección de una recta y un círculo.

Cualquier construcción que pueda reducirse a una sucesión finita de estas cinco construcciones fundamentales puede hacerse con regla y compás.

Veamos ahora en que propiedades algebraicas se traduce la condición de ser construibles con regla y compás.

A toda recta y círculo le asociaremos la ecuación cartesiana que le corresponde.

La ecuación de una recta que pasa por dos puntos es de la forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

La ecuación de una circunferencia con centro en C = (x, y) y radio r es:

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = r^2,$$

y puede escribirse de la forma

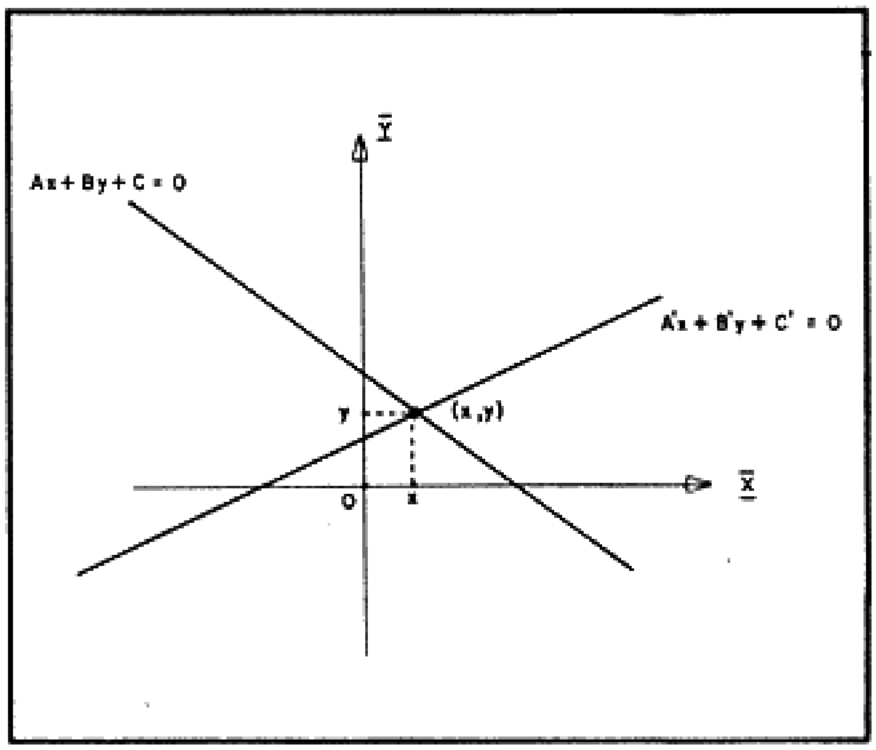


Figura 6.

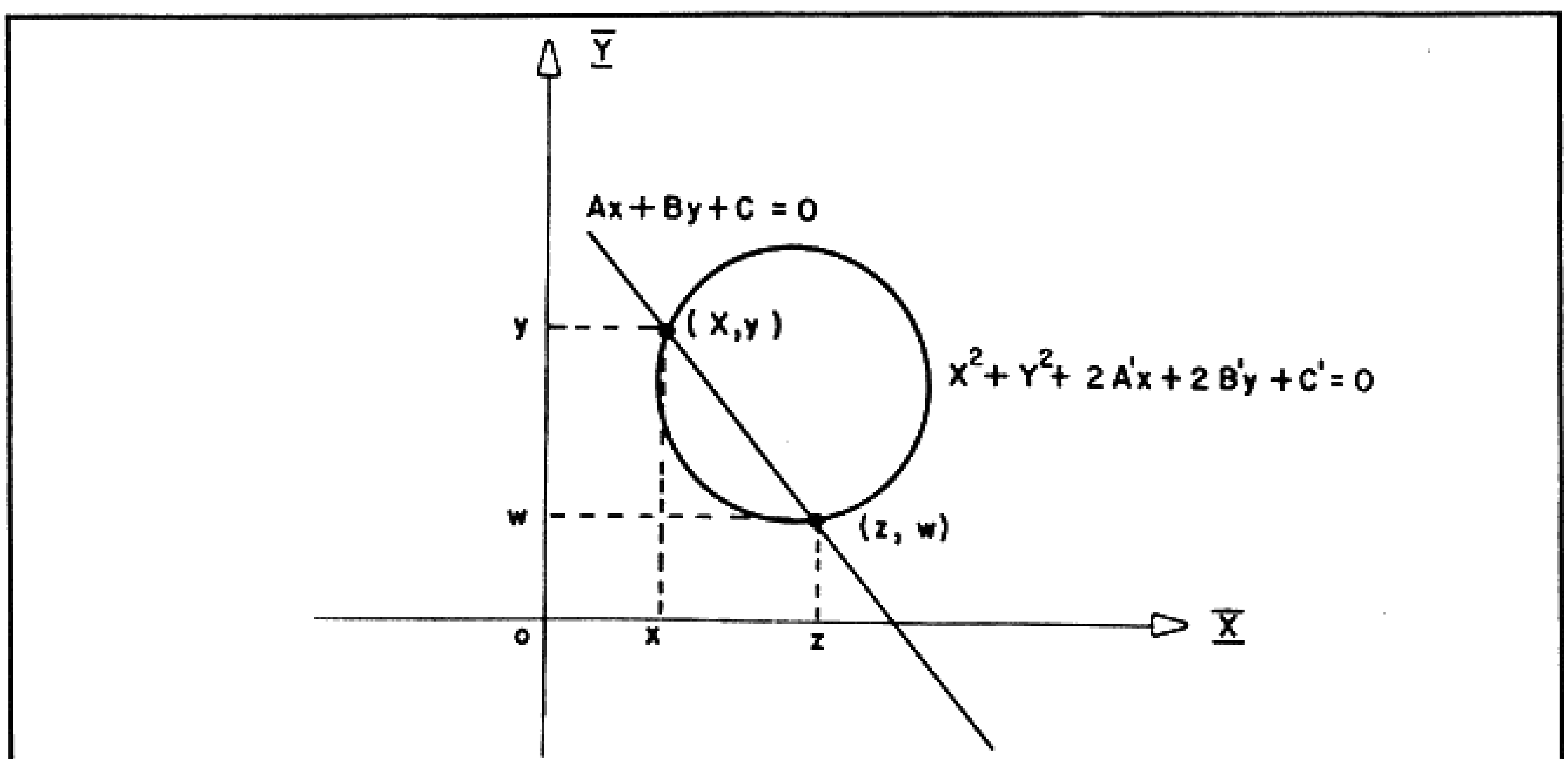


Figura 7.

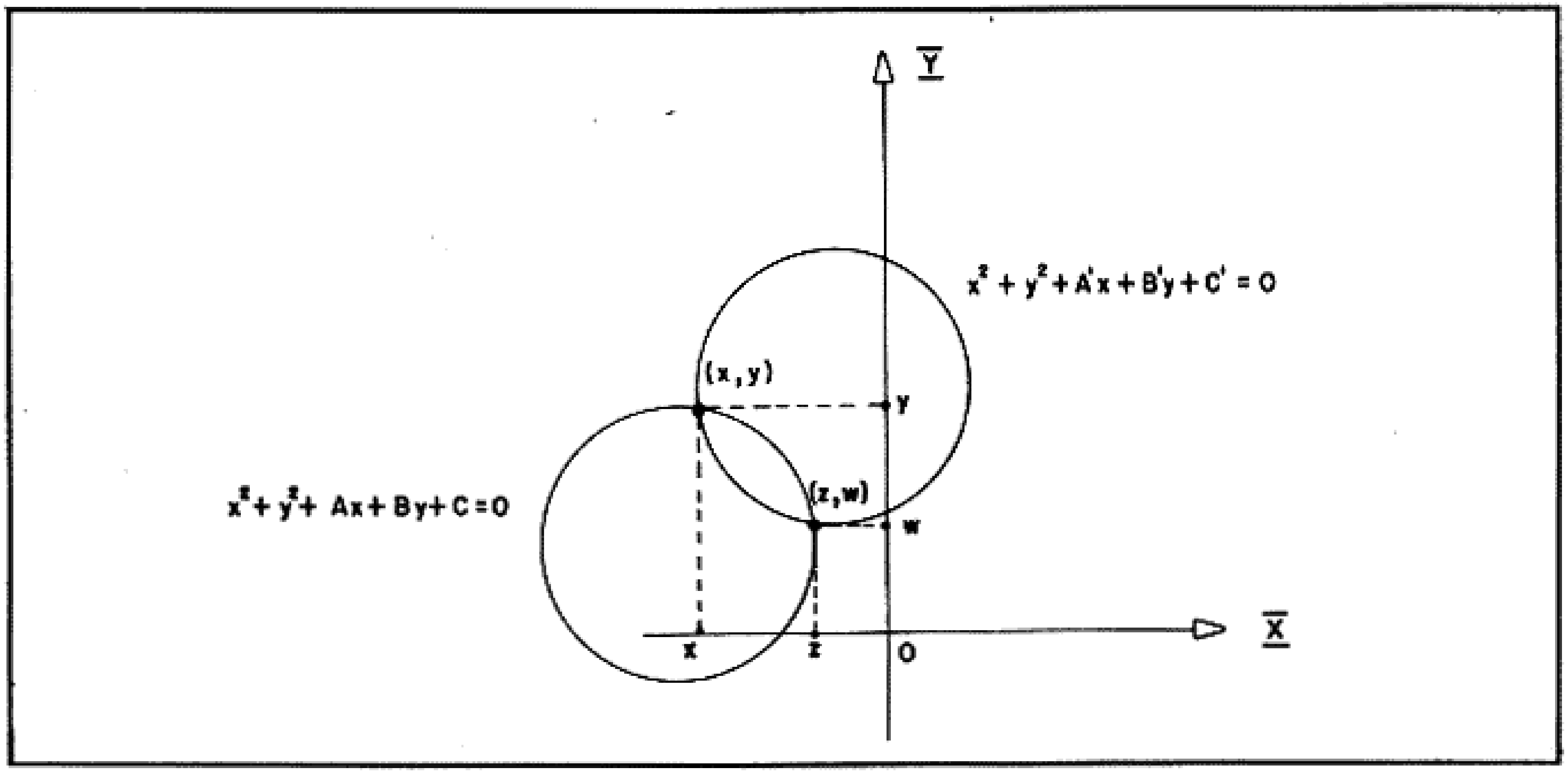


Figura 8.

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0. \qquad (3)$$

Considerando las ecuaciones (2) y (3) correspondientes a las de la recta y el círculo, las construcciones fundamentales se reducen a resolver ciertos sistemas de ecuaciones.

• Determinar el punto de intersección de dos rectas equivale a resolver el sistema de dos ecuaciones:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0$$

del cual obtenemos el punto (x,y) común a ambas rectas (figura 6).

• Determinar los puntos de intersección de una recta y un círculo equivale a resolver el sistema de dos ecuaciones:

$$Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0$$

del cual obtenemos los puntos de intersección (x,y) y (z,w) de la recta con el círculo (figura 7).

• Determinar los puntos de intersección de dos círculos equivale a resolver el sistema de dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0,$$

del cual obtenemos los puntos de intersección de las dos circunferencias (figura 8).

Resolviendo estos sistemas de ecuaciones y considerando un número finito de repeticiones de las mismas, llegamos a la conclusión de que podemos determinar con regla y compás aquellos puntos (x,y) cuyas coordenadas sean soluciones de ecuaciones de grado a lo sumo dos, con coeficientes dados o construibles.

Suponiendo que partimos de los números racionales, los números construibles son aquellos que son soluciones de ecuaciones de grado 2^k, con coeficientes racionales.

La demostración de que es imposible trisecar cualquier ángulo, consiste en demostrar que existe un ángulo que no es trisecable: el ángulo de 60°. Esto se hace mostrando que el equivalente matemático del problema de la trisección, consiste en encontrar las soluciones de una ecuación que no puede reducirse a una ecuación de grado 2^k, con coeficientes racionales.

Vamos entonces a traducir el problema de la trisección al lenguaje matemático.

Consideremos el ángulo θ que queremos trisecar, por su coseno: $\cos \theta/3 = g$. Entonces el problema consiste en encontrar x tal que $x = \cos x/3$.

Vamos a ver que determinar el coseno de un ángulo es equivalente a determinar el ángulo mismo; de manera que si es imposible, dado el ángulo de 60°, determinar el coseno de 60°/3, entonces es imposible determinar el ángulo 60°/3.

Efectivamente, considermos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano (figura 9). Tracemos una circunferencia S de radio unitario y una recta l_0 que forme con el lado positivo del eje X un ángulo igual a 60°. Sea A el punto de intersección de l_0 con S, y sea x_0 la intersección de la perpendicular desde A al eje X con el mismo eje.

Si construimos el punto x = cos 60°/3, simplemente trazando al perpendicular desde x al eje X, considerando su intersección B con S y trazando OB como lo indica la figura 9.

Vamos entonces a demostrar que es imposible construir con regla y compás el punto x tal que $x = \cos 60°/3$.

Mediante una fórmula trigonométrica el $\cos \theta/3$ está relacionado con $\cos \theta$ por la ecuación

$$g = \cos \theta = 4 \cos \theta - 3 \cos \theta/3 \qquad (4)$$

Sea $\cos\theta/3 = z$; entonces la ecuación (4) se expresa así:

$$g = 4z^3 - 3z,$$

de donde

$$4z^3 - 3z - g = 0 \qquad (5)$$

Consideremos ahora $\theta = 60°$; el coseno del ángulo de 60° es $\cos 60° = 1/2 = g$.

Sustituyendo este valor de g en la ecuación (5)

$$4z^3 - 3z - 1/2 = 0 \qquad (6)$$

De donde

$$4z^3 - 6z = 1 \qquad (7)$$

A la ecuación (7) se le conoce como ecuación de la trisección; no puede reducirse a una ecuación de grado 2^k y puede demostrarse que no tiene ninguna raíz racional. Concluimos entonces que el ángulo de 60° no es trisecable.

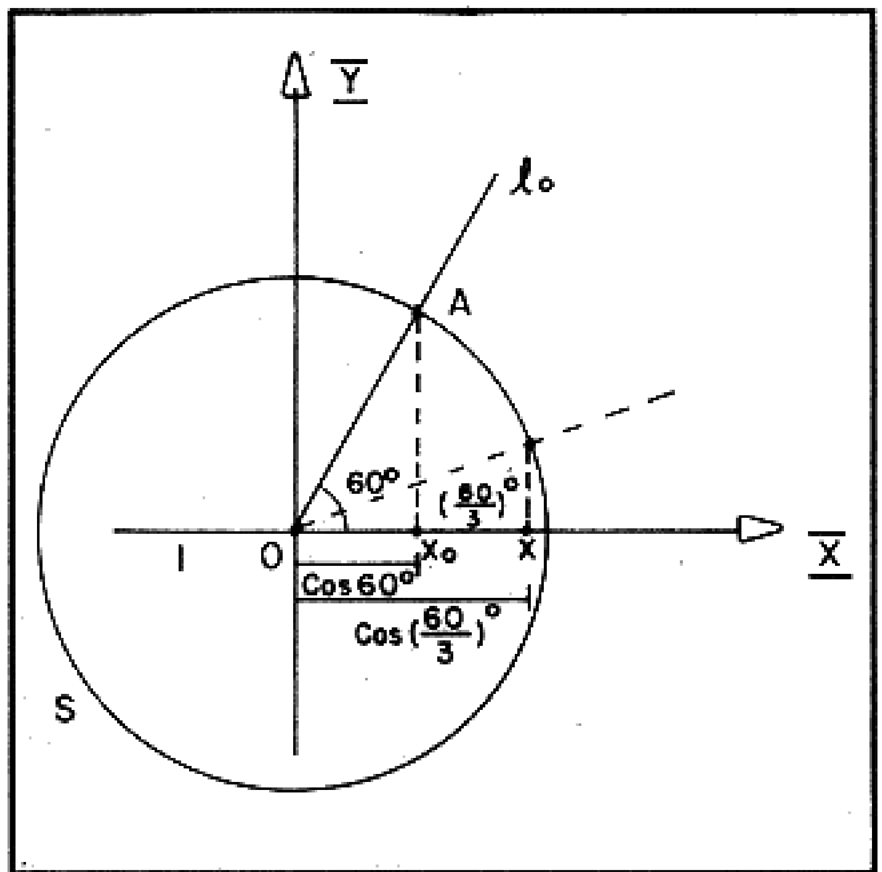


Figura 9.

Una interesante implicación de este resultado es que el ángulo de 1° no es construible con regla y compás, ya que si lo fuera, sería construible el ángulo 20° = 60°/3 sumando veinte veces el águlo de 1°. De manera que el ángulo que con tanta familiaridad hemos utilizado como unidad de medida, no es construible con los instrumentos tradicionales.