Cómo se calculaba en Mesopotamia*

GILBERTO LOIBEL**

1. LOCALIZACIÓN GEOGRÁFICA

La Mesopotamia —que significa tierra entre dos ríos, esto es entre los ríos Tigris y Eufrates— corresponde hoy aproximadamente a Irak, incluyendo también algunas partes de los países limítrofes. Toda la región desde Egipto hasta Mesopotamia, fue poblada desde tiempos inmemoriables y fue ahí donde surgieron las primeras civilizaciones que dejaron documentos escritos muy importantes. Estos primeros documentos surgieron aproximadamente en el año 3 000 a.c. tanto en Egipto como en Mesopotamia.

2. LAS DIVERSAS CIVILIZACIONES DE LA ÉPOCA

La primera civilización de la región de la cual tenemos información histórica es la de los Sumerios, un pueblo probablemente venido de Asia Central, tal vez alrededor del año 4 500 a.c., y que con relativa facilidad conquistó las tierras antes ocupadas por una población neolítica. Con algunas interrupciones, los sumerios mantuvieron el dominio de la región hasta el fin del tercer milenio a.c. Una de sus ciudades principales fue Ur.

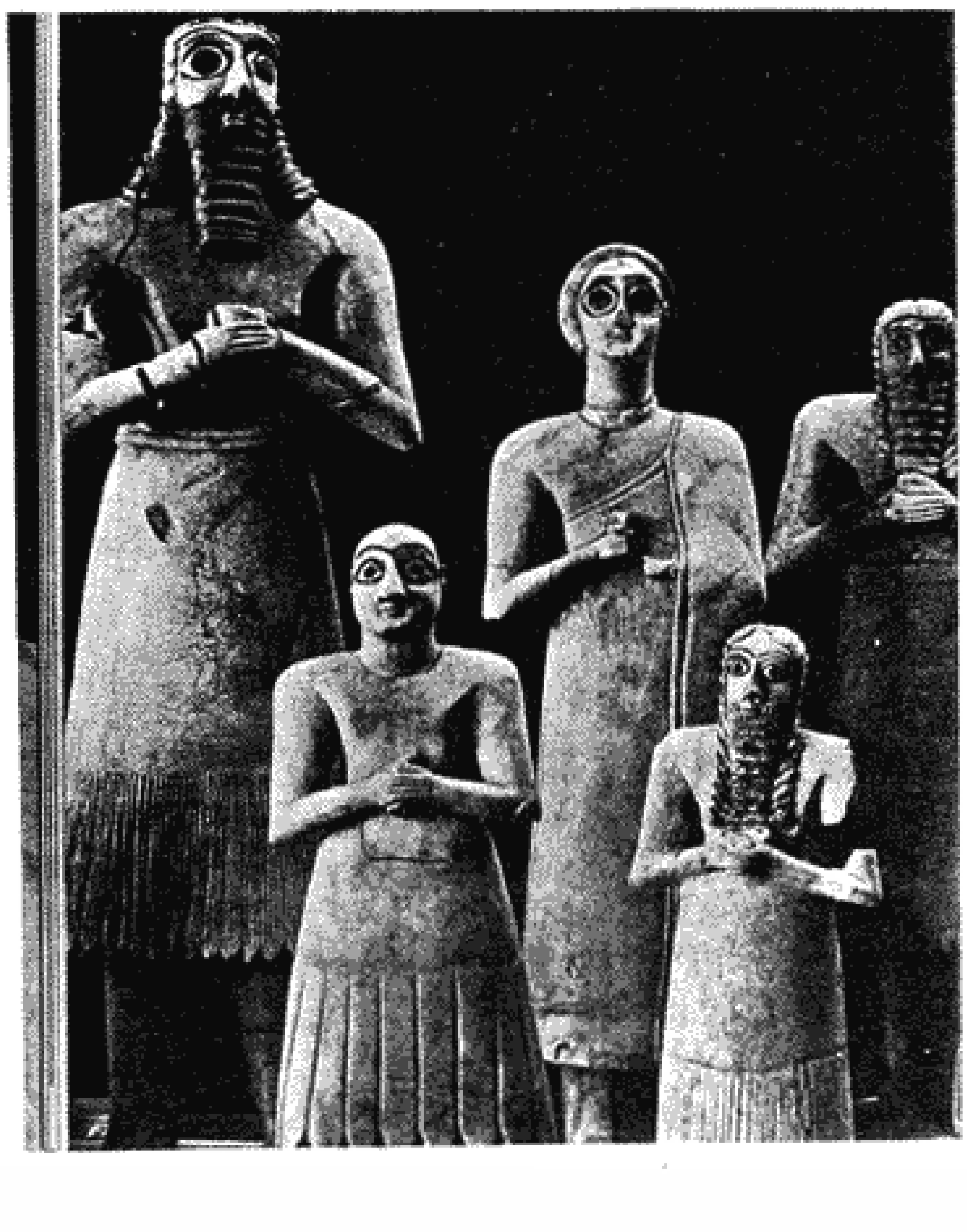
Aproximadamente en el año 2 000 antes de Cristo, la región fue conquistada por los Amoritas, un pueblo semítico, que estableció su capital en la ciudad de Babilonia. Su civilización alcanzó un gran desarrollo en la época del rey Hamurabi —conocido principalmente por el código elaborado durante su reinado. Esta civilización, conocida como la de los "antiguos Babilonios", fue destruida alrededor del año 1 750 a.c. por un pueblo bárbaro llamado "los Casitas", quienes poco se interesaron por los avances culturales de sus antecesores. Pero parte del acervo cultural fue adoptado por un pueblo vecino, los Asirios —que medio milenio más tarde iniciarían un dominio de la región que duraría algunos siglos. Su capital fue Nínive.

Durante el año 600 antes de Cristo, otro pueblo semita, los caldeos, se instaló nuevamente en Babilonia. Considerándose herederos de los antiguos babilonios, cultivaron todo lo que se relacionaba con esta civilización. Su imperio duró menos de un siglo, ya que en el año 539 los Persas, cuyo rey era Ciro, los conquistaron sin dificultades.

Alrededor del año 330 a.c., la región fue conquistada por Alejandro, y después de su muerte en 323, fue incorporada al imperio de los Seléucidas (sucesores de Seleuco). Este fue el último periodo en el cual los trazos principales de las civilizaciones anteriores aún tuvieron gran influencia.

Durante por lo menos tres milenios, estos pueblos de orígenes distintos y de comportamientos bastante diversificados tuvieron también algunas cosas importantes en común. Dos de ellas eran la escritura y el sistema de numeración.

La escritura cuneiforme evolucionó a lo largo de los siglos y sirvió a lenguas muy diferentes manteniendo sus caracte-



* Traducción de Silvia Torres, revisada por Ernesto Pérez Chavela.

** Universidad Estatal Paulista (Rio Claro), Brasil

rísticas básicas. Ésta se escribía con estiletes de aristas agudas en tablillas de arcilla. Las señales tenían forma de cuña lo que le dio el nombre de "cuneiforme". Las pequeñas tablillas, después de ser cubiertas de señales, eran cocidas al sol o en hornos, tornándose muy resistentes. Gracias a ese hecho, han perdurado hasta nuestros días millares de estas tablillas.

La escritura cuneiforme comenzó a ser descifrada hace más de 100 años, y hoy tenemos un buen conocimiento sobre muchos aspectos de la cultura de las poblaciones que vivieron en Mesopotamia. Este conocimiento es bastante vivo, pues muchas de estas tablillas tratan sobre asuntos de la vida diaria, como por ejemplo contratos comerciales, cartas, leyes, registros de impuestos, textos escolares de los cuales nos interesan particularmente los referentes a la matemática y aún tablas numéricas y textos astronómicos.

3. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN Y LA ESCRITURA NUMÉRICA EN SUS PRIMEROS TIEMPOS

El segundo trazo común de las civilizaciones en Mesopotamia es el sistema de numeración. Encontramos algunos de sus aspectos fundamentales, por ejemplo el uso de la base 60, desde los primeros documentos escritos.

Casi todas las civilizaciones que se iniciaron en la escritura de números, usaron el mismo sistema: un símbolo simple, como por ejemplo una marca, representaba el número 1, el número 2 era representado por la repetición de este símbolo, el tres por la repetición triple y así sucesivamente hasta que un nuevo símbolo representaba una unidad mayor. Esta unidad mayor era también repetida hasta que un múltiplo suyo era prepresentado por un nuevo símbolo. Así procedieron los romanos, los egipcios y también los sumerios. Éstos, en los primeros tiempos, usaban un estilete cilíndrico para escribir los números, y más tarde, uno en forma de prisma triangular (ver Fig. 1). Así las cuñas tenían formas un poco diferentes. El 1 era representado por una cuña en forma de media luna y el 10 por un círculo —más tarde el 1 era representado por una cuña triangular y el 10 por una cuña mayor en posición y formato diferentes.

Veamos la representacióm de los números 1, 2, 3 y 9 en los dos sistemas:

c	cc	ccc	ccc ccc ccc
'	''	'''	''' ''' '''

ooocc ó <<<" representaban 32. Se proseguía de esta forma hasta el 59. Es en este punto, que surge la ventaja sobre los sistemas de numeración de otros pueblos: en muchos de ellos el proceso continuaba de la misma forma como por ejemplo en el caso de los números romanos y de los números egipcios: para 100 para 1000, etc., había nuevos símbolos (en el caso de los romanos también para 5, 50, 500). Los sumerios usaban una cuña en forma de media luna mayor para representar 60, interpretando este número como un un "gran 1". El origen de esto debe ser buscado en el sistema de medidas (pesos) en el cual se tenía:

1 talento = 60 minas

1 mina = 60 ciclos

La elección del número 60 seguramente se debe a que este número tiene muchos divisores, lo que resulta muy cómodo en las transacciones comerciales. Había también señales para 600 y 3600, pero el uso de símbolos semejantes entre sí, para indicar unidades mayores, esto es, para las potencias de 60, no fue usado de forma sistemática. A través de su evolución, que duró muchos siglos y en la cual fueron introducidos números cada vez mayores, se llegó finalmente a un sistema proporcional casi tan perfecto como nuestro sistema decimal.

4. EL CAMBIO EN LA ESCRITURA NUMÉRICA Y EL PERFECCIONAMIENTO DEL SISTEMA SEXAGESIMAL

Como ya mencionamos, posteriormente se usaron cuñas triangulares agrupadas en pequeños bloques para representar los números del 1 al 59. El número 60 era representado nuevamente por el símbolo del 1, esto es por una cuña: '. Para obtener dos veces 60 se escribía " y así sucesivamente. El número 59 también podía representar 59 veces 60. Al igual que hoy escribimos 11 para representar 10 + 1 ellos escribían ' ' (cuña, espacio, cuña, es decir, las dos cuñas separadas) para representar 60 + 1. Un 10 seguido por un espacio y después por un 3 (< ''') representaba 10 veces 60, más 3, o sea, 603. Aún más, 23, espacio, 31 (<<''' <<<') era la representación de 23 x 60 + 31 = 1411. Pero esta expresión también podía representar 23 x 60 x 60 + 31 x 60 ó 23 x 60 x 60 x 60 + 31 x 60 x 60 y así sucesivamente. Esto se debe a que el símbolo del 1 también podía designar cualquier potencia de 60; 2 podía representar 2 veces cualquier potencia de 60 y así sucesivamente.

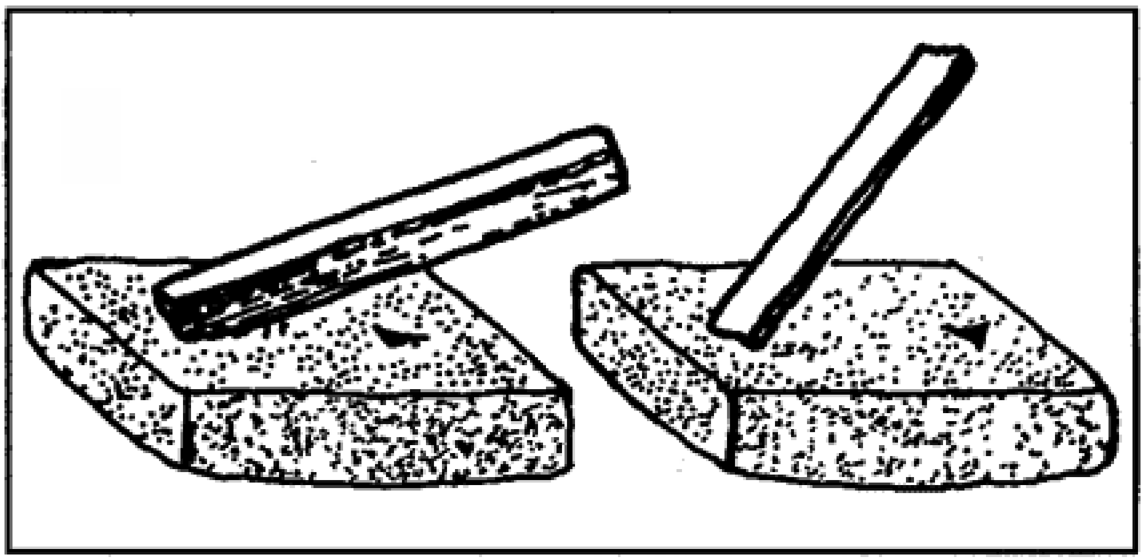


Figura 1. Tipo de estilete utilizado.

Lo más importante —y fue lo que volvió al sistema tan potente— es que las potencias de 60 podían ser también negativas: ' representaba las potencias 60^{-1} = 1/60, 60^{-2} = 1/(60 x 60), 60^{-3} = 1/(60 x 60 x 60), etc.

De esta forma el 30 <<< podía representar a la vez 30 x 60, 30 x 60^{2} = 30 x 60 x 60, 30 x 60^{3} = 30 x 60 x 60 x 60, etc., o bien, 30 x 60^{-1} = 30/60 = 1/2, 30 x 60^{-2} = 30/(60 x 60) = 1/120, el 20 (<<) podía ser interpretado como 20 x 60^{-1} = 20/60 = 1/3 y para obtener 1/5 se escribía 12 (<") esto es, 12 x 60^{-1} = 12/60 = 1/5, pero este símbolo también podía representar 12 x 60^{2} = 12/(60 x 60) = 1/(5 x 60) = 1/300, y así sucesivamente. En una tablilla del tiempo de los antiguos babilonios se encuentran números con hasta 9 posiciones sexagesimales, de las cuales 8 probablemente pertenecen a la parte fraccionaria. Esto correspondería a cerca de 15 posiciones decimales después del punto.

5. DEFECTOS DEL SISTEMA Y EL SURGIMIENTO DEL "CERO"

El mayor problema era que al escribir un número no se sabía por qué potencia de 60 era multiplicado, carecían de un símbolo para el cero y no existía el correspondiente a nuesto punto. El orden de magnitud del número tenía que ser estimado de acuerdo con el significado concreto de los datos. Aun en el caso en que este orden de magnitud fuese evidente, había todavía un márgen de error; por ejemplo, al leer el número ", sabiendo que el orden de magnitud debería ser 3600, el segundo guarismo podía representar 2 ó 120, lo mismo que 1/30, todo ello sin alterar la magnitud total. Dejar un espacio mayor o menor entre los guarismos continuaba siendo ambiguo. Solamente después del año 300 a.c. apareció una señal: dos pequeñas cuñas oblícuas, que servían para marcar una posición vacía entre dos guarismos. Este símbolo nunca fue usado después del último guarismo significativo y tampoco se llegó a fijar la posición absoluta de cada dígito como nosotros hacemos con la coma.

6. LAS PRINCIPALES TÉCNICAS DE CÁLCULO: ADICIÓN, SUSTRACCIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN. EL USO DE TABLAS

En su fase final el sistema ofrecía muchas facilidades para las operaciones aritméticas elementales. Se sumaba de la misma forma que nosotros lo hacemos, comenzando con los guarismos de menor valor relativo. En el caso de la suma al sobrepasar 60 se aumentaba 1 en la unidad inmediata superior. Al sustraer, había necesidad de "pedir prestado" de la unidad anterior. Es verdad que habiendo 59 "guarismos" las tablas eran un tanto más grandes, y como tales "guarismos" eran escritos con componentes decimales, el grado de dificultad no sobrepasaba lo razonable en las operaciones de adición y sustracción.

En el caso de la multiplicación, las cosas se complicaban considerablemente, y fue en ella que los babilonios recurrieron a uno de los recursos más importantes de su técnica de cálculo: las tablas. Las tablillas matemáticas son innumerables, entre ellas se encuentran las tablas numéricas. El primer tipo de tablas —muy frecuente— es el de multiplicar, semejantes a las nuestras. De la misma forma como actualmente nosotros usamos una calculadora, los babilonios usaban una pila de tablillas cubiertas de tablas numéricas. Y lo mismo sucede en nuestra vida diaria, ya que es mucho más fácil usar tablas pues ellas constituyen un recurso útil y razonablemente flexible.

Otro tipo de tabla —que también usaban frecuentemente— contenía los inversos de los enteros. Ya mencionamos que 1/2 era escrito como 30, 1/3 como 20 y 1/5 como 12. Así, todos los factores de 60 tenían una representación simple. Pero también otros números como el 8 tenían una representación sencilla. Esto se debe al hecho de que 8 es divisor de 60 x 60 = 3600. Es decir, ' = 60 x 60 = 3600 = 8 x 450 y ya que 450 = 7 x 60 + 30 tenemos que 1/8 era representado por ;;;; < < < (7, espacio, 30, es decir, 7 x 60 + 30). Esto es semejante al hecho que 1/8 = 0.125 en nuestro sistema decimal: 10 no es divisible por 8, pero una potencia de 10, esto es 1000, puede ser dividido por 8. Así en el sistema sexagesimal los inversos de todos los divisores de 60, 60 x 60, 60 x 60 x 60 etc., tienen representación exacta. Veamos otro ejemplo. Ya que 9 divide a 3600 podemos escribir ' = 60 x 600 = 3600 = 9 x 400 = 9 x (6 x 60 + 40), por lo tanto 1/9 era representado por ;;; < < < < (6, espacio, 40, es decir, 6 x 60 + 40). A los números que dividen a alguna potencia de 60 los llamaremos números regulares. Existen tablas conteniendo los inversos de una cantidad muy grande de numeros regulares.

El primer número "irregular", esto es sin inverso exacto es el 7. Pocas tablas representan valores aproximados de 1/7 y también 1/11. Otras traen los inversos de 59 y 61 como 1/59 = 1 1 1 y 1/61 = 59 59. Esto corresponde en el sistema decimal a 1/9 = 0.111 y 1/11 = 0.0909. Estas aproximaciones son periódicas pero parece que los babilonios no se dieron cuenta de eso, o tal vez no dieron valor a ese hecho. Todo indica que los inversos de números no regulares constituían para ellos una difucultad tan grande como las raíces cuadradas no racionales o el número "pi".

¿Cuál es la importancia de las tablas de inversos? Hagamos una analogía en nuestro sistema decimal: cuando queremos dividir por 5 muchas veces multiplicamos por 2 y quitamos un cero o transferimos el punto en una posición. De la misma forma la división por 25 es obtenida por la multiplicación por 4 o la división por 2 multiplicando por 5. Así, en el espíritu de los babilonios, 2, 4 y 5 son respectivamente los "inversos" de 5, 25 y 2.

Los babilonios dividían haciendo la multiplicación por los inversos: a/b = a x 1/b. Ésta es la razón por la que en las tablas de multiplicación aparecían al lado de los números enteros muchos de sus inversos.

Una pequeña tabla de inversos se representaba por ejemplo sobre la forma:

1/2	30
1/3	20
1/4	15
1/5	12
1/6	10
1/8	7.30
1/9	6.40

en las correspondientes tablas de multiplicación aparecían no solamente los múltiplos de los enteros, sino también del 7.30 y del 6.40.

De esta forma los babilonios tenían la facilidad de trabajar con las operaciones básicas de aritmética y también con las fracciones. En este sentido su matemática era muy superior a la de los egipcios.

OBSERVACIONES FINALES

Basados en esta facilidad de cálculo, los mesopotamios desarrollaron un álgebra bastante avanzada, resolviendo ecuaciones de segundo grado y de tercer grado lo mismo que grados superiores y aun sistemas de ecuaciones, desarrollando ecuaciones de segundo grado. Hacían también algo semejante a la interpolación logarítmica. En álgebra, sus conocimientos llegaron a un nivel de sofisticación muy superior a la de los egipcios.¤

BIBLIOGRAFÍA

1. Edward McNall Burns (1959) *História da civilização Ocidental* Editora Globo. 2a. ed. Traducción de *History of Western Civilization* 4a. ed. norteamericana de 1954.
2. Carl B. Boyer. (1954) *Historia da Matemática* Editora Edgard Blucher Ltda. Editora de la USP. Traducción de "The History of Mathematics" (1968)
3. B. L. van der Waerden (1961) *Science Awakening.* Oxford University Press.
4. Otto Neugebauer. (1969) *The Exact Sciences in Antiquity.* Dover Publications. 2a. ed. (el más importante descifrador de textos cuneiformes de matemática)