La teoría de continuos es hoy, una rama viva de la topología

Caracterizaciones de un arco y una circunferencia

ISABEL PUGA*

Si usted tiene intenciones de capturar a un criminal, puede recurrir a la técnica de bosquejar su retrato hablado. Con esta finalidad, procurará que diversos testigos aporten rasgos sobresalientes de la fisonomía del delincuente. Posteriormente consultará los archivos de la policía dentro de los cuales tal vez se encuentre aquel sujeto que posee todas las cualidades de su bosquejo. Por supuesto que, si las cualidades que usted ha elegido para su bosquejo no son suficientes, corre el riesgo de culpar a un inocente. Moreno y con bigote son rasgos insuficientes para un crimen cometido en México. Pero un lunar en la frente o una cojera mejoran considerablemente la investigación.

El trabajo de caracterizar, para un matemático, es similar al del detective que bosqueja a un asesino: Ambos buscan cualidades contundentes.

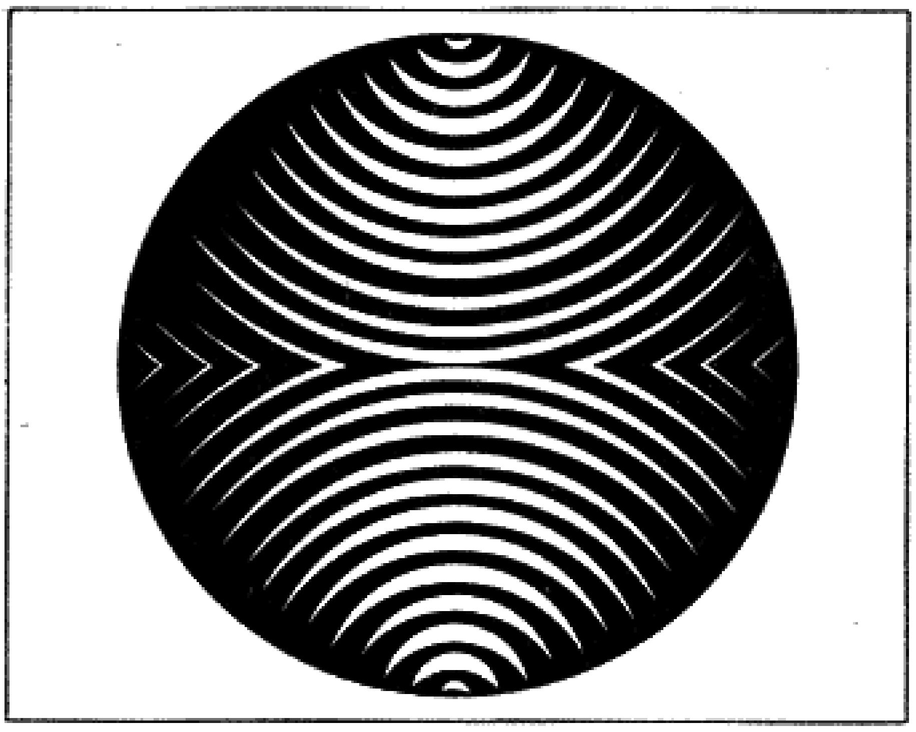
Número par, primo es una forma sofisticada de referirse al número 2. Lo interesante es que este par de propiedades caracteriza al 2. El 2 las tiene y él es el único número que tiene ambas.

A un topólogo le interesa caracterizar espacios topológicos. Con esta finalidad aguzará su ingenio para definir, inventar y descubrir las propiedades de un espacio de modo que este espacio sea el único que las posea.

Aproximadamente en los años 20 de este siglo, los Matemáticos Knaster, Kuratowski y Mazurkiewicz, en Polonia, y Moore en Estados Unidos trabajaron con espacios topológicos a los cuales hoy les llamamos continuos y establecieron teoremas fundamentales y encantadores. Es por esto que se les considera a ellos, fundadores de la Teoría de Continuos. Más tarde –alrededor de los 50 y hasta la fecha, en algunos casos– nos encontramos con Moise, Bing y Jones también en E.E.U.U. quienes aportaron grandes volúmenes de teoremas.

La Teoría de Continuos es hoy, una rama viva de la

Hajime Ouchi



Topología, una rama que produce resultados y en la cual se han destacado muchos otros matemáticos, además de los que mencionamos aquí.

Elegimos para este artículo tres caracterizaciones del arco y dos de la circunferencia. Con el fin de facilitar la exposición, reduciremos nuestro archivo a espacios que están contenidos en el plano ($\Re^2$) o en el espacio tridimensional ($\Re^3$).

Empezaremos por ver que dos conjuntos diferentes pueden ser lo mismo como espacios topológicos (equivalencia topológica). Intentamos –en seguida– dar una idea de qué es una propiedad topológica pues estas propiedades son las que utilizaremos en la caracterización de nuestros dos personajes: el arco y la circunferencia.

* *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM*

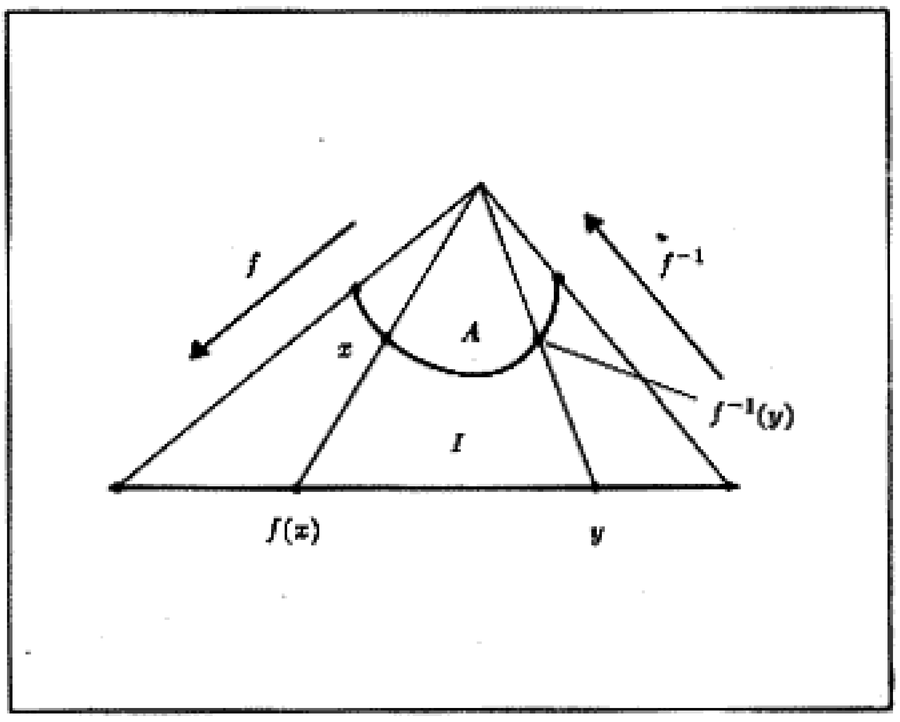
1. *EQUIVALENCIA TOPOLOGICA*

Consideremos un arco A y un intervalo I (Figura 1).

La función $f: A \rightarrow I$ que manda x en $f(x)$ es biyectiva y continua. Podemos verificar la continuidad, observando que al correr los puntos de A de un extremo a otro, f recorre los de I sin saltos. $f^{-1} : I \rightarrow A$ también es biyectiva y continua. Cuando exista una función de un conjunto X, en otro, Y, con las propiedades anteriores diremos que X y Y son topológicamente equivalentes.

En particular un intervalo y un arco son lo mismo, topológicamente hablando.

Figura 1



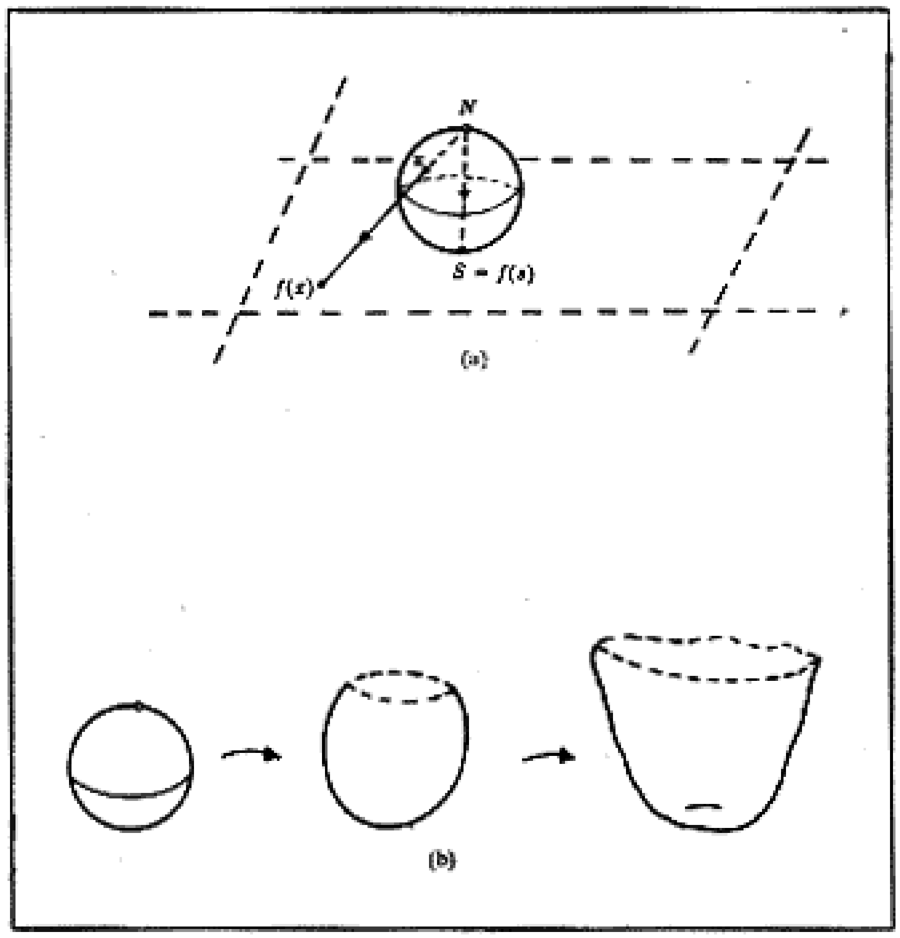
Los conjuntos pueden aparecer transformados, topológicamente, en otros muy inesperados. Por ejemplo, una esfera hueca sin el polo norte, no es más que un disfraz del plano y la función que tiene las propiedades que mencionamos al principio es la proyección estereográfica f (Figura 2).

Si trazamos una recta que pase por N, esta intersecta a la esfera en x y al plano en $f(x)$.

Una forma más plástica de pensar en equivalencia topológica es imaginarnos que alargamos, achicamos o deformamos un conjunto, sin pegar dos de sus puntos ni romperlo. Obtenemos así otro equivalente a él. Por ejemplo, podemos deformar un disco D en un conjunto A y viceversa, (Figura 3a) como si fueran laminillas de plastilina.

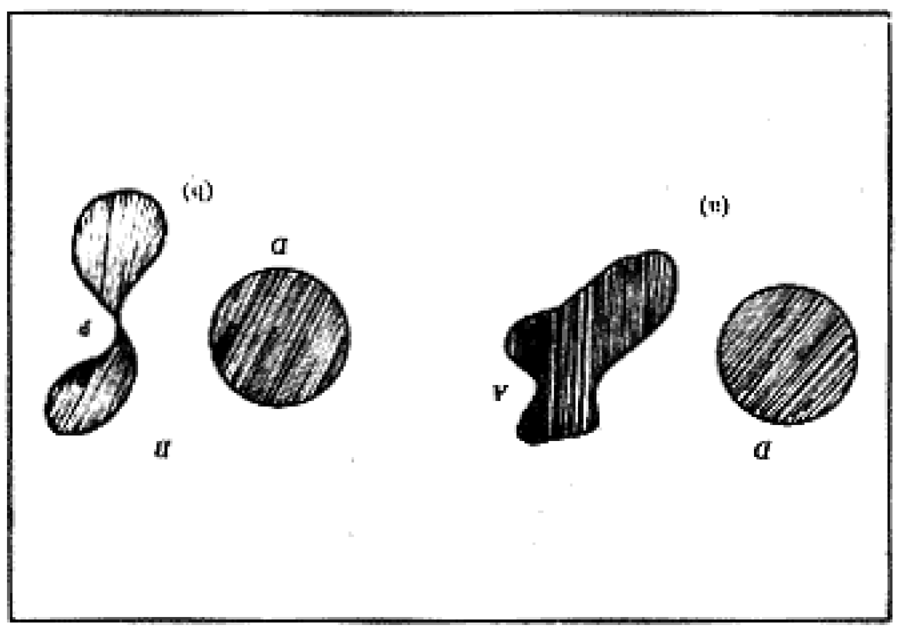
Para el caso de la esfera y el plano (Figura 2b) jalamos la esfera desde el polo norte y la vamos estirando hasta aplanarla. La línea punteada que corresponde al polo norte se distribuirá en el infinito.

Figura 2



Los conjuntos D y B en la figura 3b no son equivalentes. Hemos aplastado a D hasta pegar dos de sus puntos en uno solo (p). Esta es una deformación no permitida en equivalencia topológica.

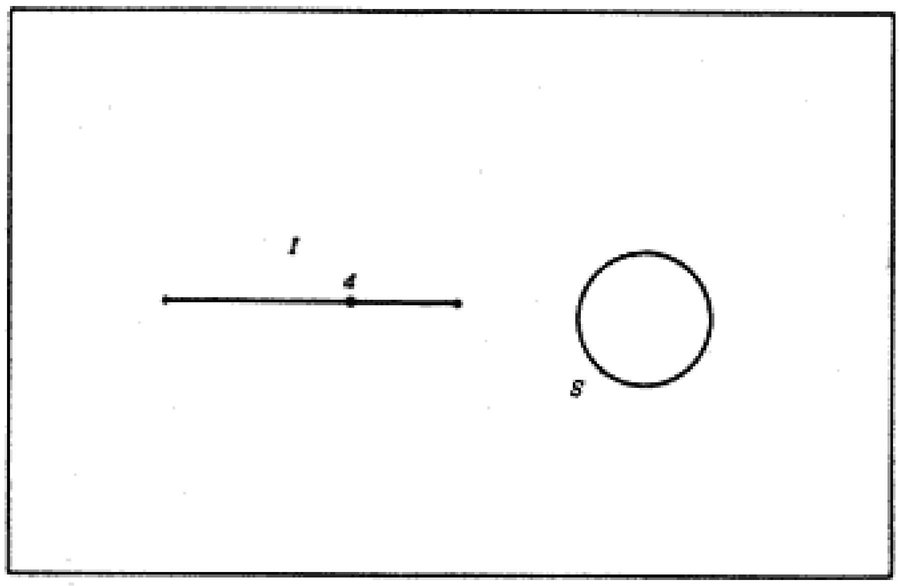
Figura 3



Otra forma –muy usual en topología– de convencerse de que D y B son diferentes es verificar que alguno de los dos tiene una cierta propiedad topológica y el otro no: Si a B le quitamos p, partimos al conjunto en dos piezas, es decir lo desconectamos, mientras que ningún punto de D tiene esta propiedad.

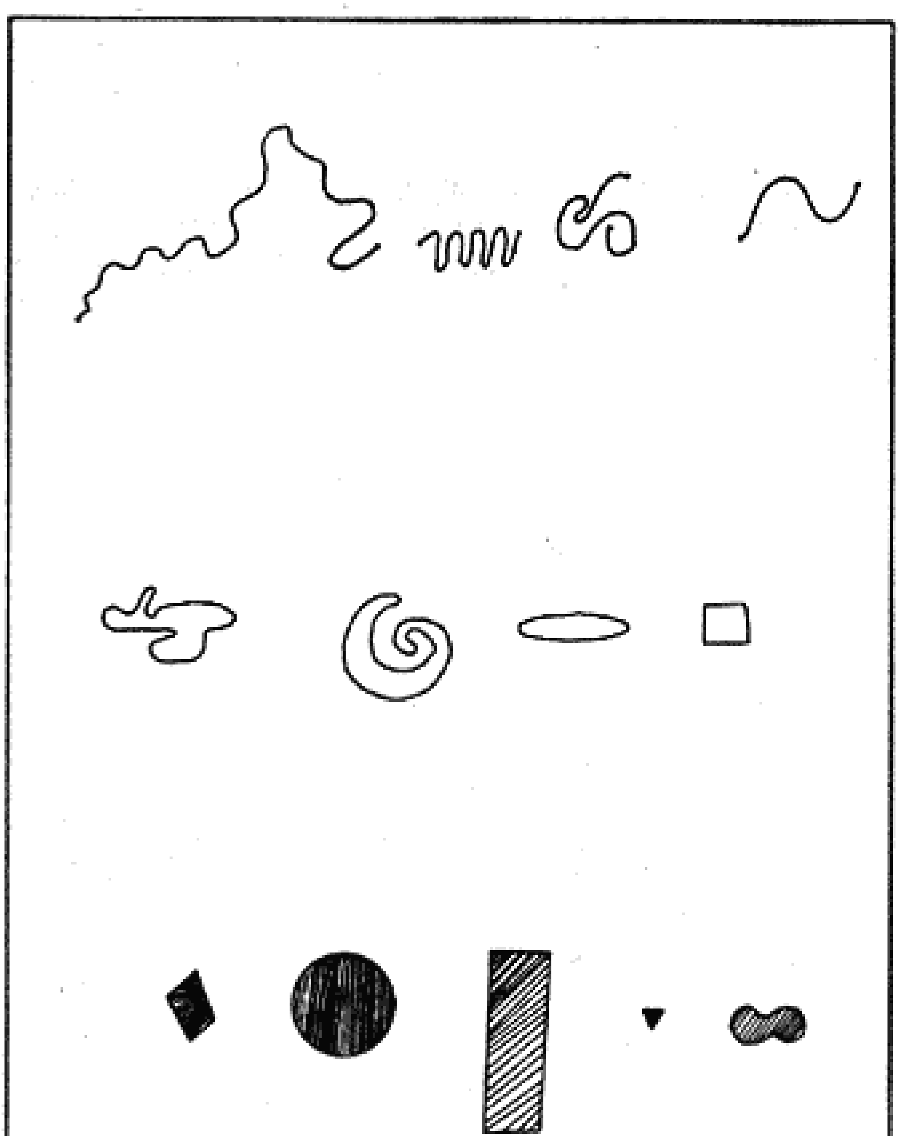
La *Conexidad* es una propiedad topológica.

Figura 4



Tenemos otro ejemplo similar al anterior con un intervalo I y una circunferencia a la que llamaremos S. (figura 4).

Imaginamos que I es un hilo. Para transformar I en S será necesario pegar sus extremos. Y viceversa: Si queremos convertir S en I tendremos que romper. Aparece, también el argumento anterior: Si a I le quitamos p, lo desconectamos; en tanto, ningún punto de S tiene esta propiedad.

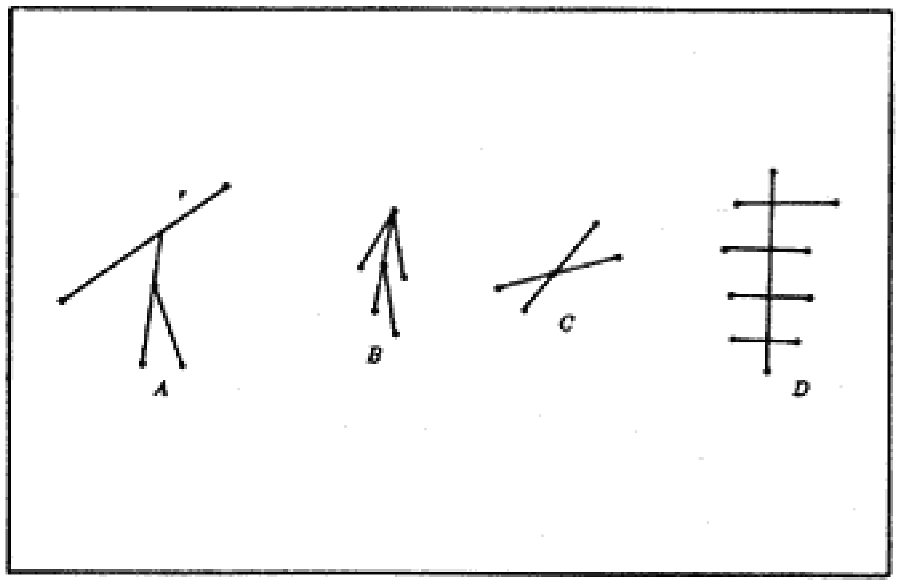


LOS CONJUNTOS DE LA FIGURA 7 SON EQUIVALENTES ENTRE SI

Figuras 5, 6 y 7

Los conjuntos de la figura 5 son todos equivalentes a un intervalo y por lo tanto a un arco, y los de la figura 6 son equivalentes a una circunferencia.

Figura 8



El árbol A y el B de la figura 8 son equivalentes pero A y B no son equivalentes a C, ni a D y C y D no son equivalentes entre sí. Podemos verificar estas afirmaciones suponiendo que estos árboles están articulados. Por ejemplo, si el árbol A le jalamos la rama r hacia abajo, obtenemos B.

La equivalencia topológica permite a los conjuntos adoptar personalidades muy diversas. Por ejemplo un cubo, una esfera y un icosaedro (sólidos) son exactamente lo mismo para los ojos de un topológo.

PROPIEDADES TOPOLOGICAS

Las propiedades topológicas son aquellas que permanecen invariantes a través de todas las "personalidades topológicas" que asuma un conjunto. Claramente el tamaño (área, volumen, longitud) *no* es una propiedad topológica ni lo es la posición de un conjunto en el plano o en el espacio. La *conexidad* y la *dimensión* sí son propiedades topológicas.

(Un conjunto es *conexo* si consta de una sola pieza)

En otras palabras, si dos conjuntos son equivalentes y uno es conexo, el otro también lo es y ningún conjunto de dimensión 2 podrá ser equivalente a uno de dimensión 3 (Figura 9).

La *Compacidad* es una propiedad topológica. Como dijimos antes, nuestros ejemplos son subconjuntos del plano

Figura 9

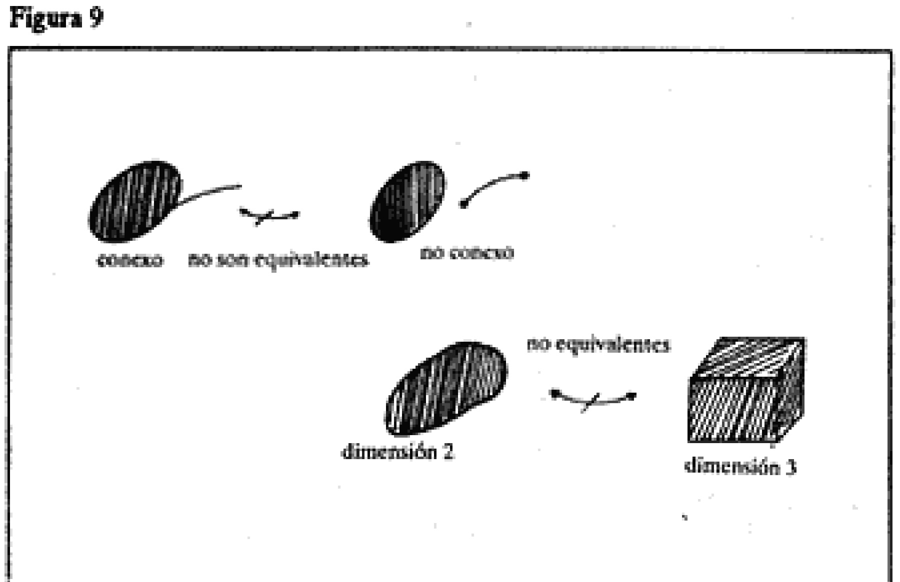
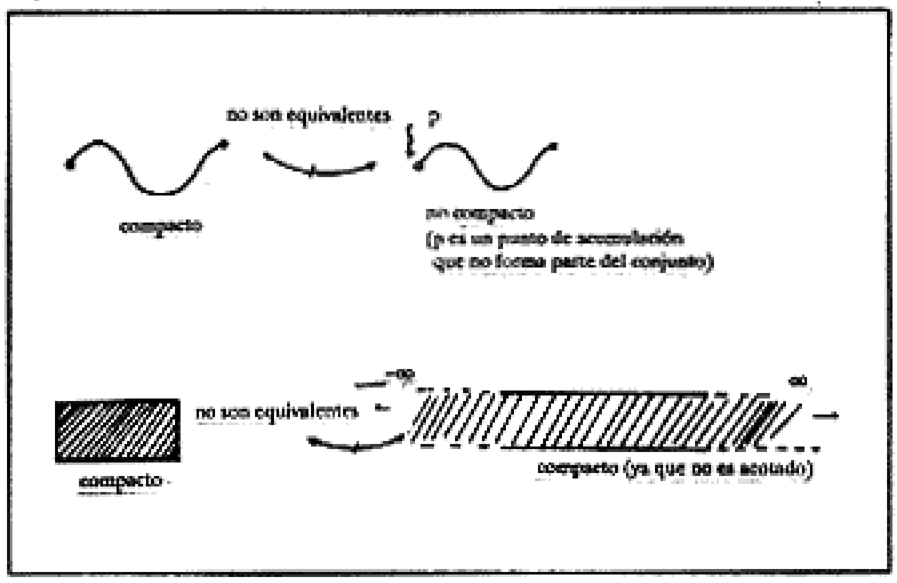


Figura 10



o del espacio tridimensional. En estos casos, un conjunto es compacto cuando es cerrado y acotado (Figura 10).

Un conjunto es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación (o puntos límites) y es acotado si hay una cota $M \epsilon \Re$ tal que $|x| \leq M$, donde x es cualquier elemento del conjunto

A un conjunto compacto y conexo se le llama *continuo*. De aquí en adelante nuestros conjuntos serán *continuos*.

PROPIEDADES QUE CARACTERIZAN A UN ARCO Y UNA CIRCUNFERENCIA

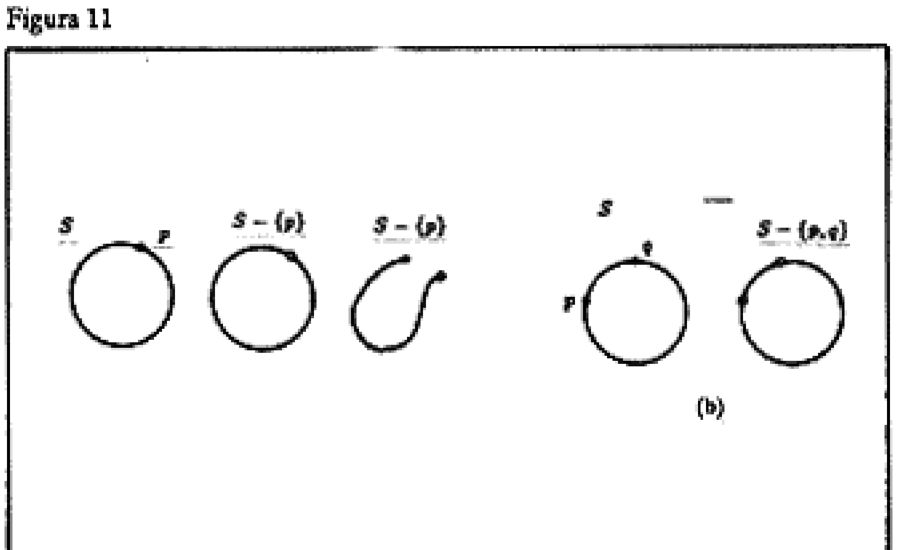
Separadores.

Ya vimos antes, (Figura 4) que si a un arco le quitamos uno de sus puntos, que no es extremo, el resultado es un conjunto no conexo. Esto quiere decir que *cualquier punto del arco que no sea un extremo separa al arco.*

Si a la circunferencia le quitamos un sólo p el resultado es un conjunto *conexo* (Figura 11a)

Pero si a esta misma circunferencia le quitamos dos puntos, p y q, (Figura 11b) entonces obtenemos un conjunto no conexo. Es decir, *cualquier par de puntos separan a la circunferencia.*

Figura 11



Resulta que estas propiedades del arco –por un lado– y de la circunferencia, por otro *caracterizan* a estos conjuntos. Es decir ellos son los unicos continuos que las poseen.

Enunciaremos los dos Teoremas correspondientes, dando crédito a sus autores:

Para el Arco., Knaster, Kuratowski, Lennes, Moore (1921)

Si un **continuo** *M tiene exactamente dos puntos que no lo separan, entonces M es un arco.*

Para la Circunferencia:

Moore (1920) *Si M es un continuo y cualquier par de puntos separa a M, entonces M es una circunferencia.*

Conexidad Local

Observemos de nuevo a nuestros ejemplos I y S (Figura 12). La intersección de un disco abierto, de cualquier tamaño (nos interesan los más pequeños), con I o con S es siempre un conjunto conexo.

Figura 12

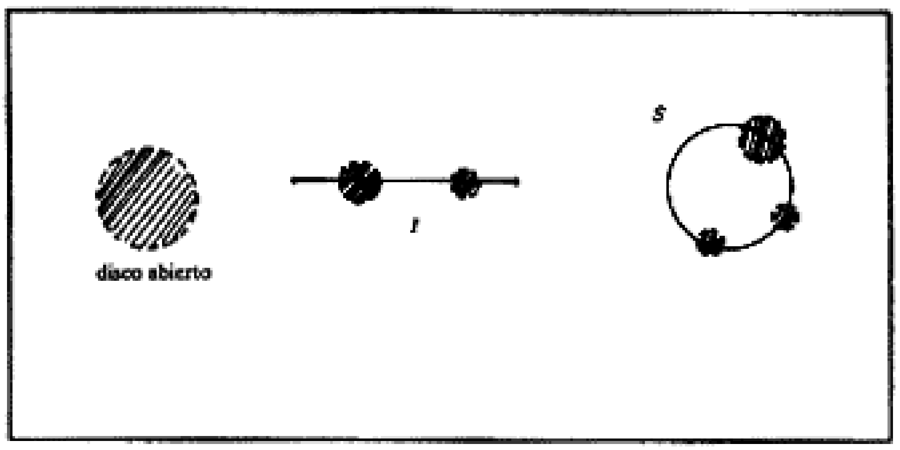
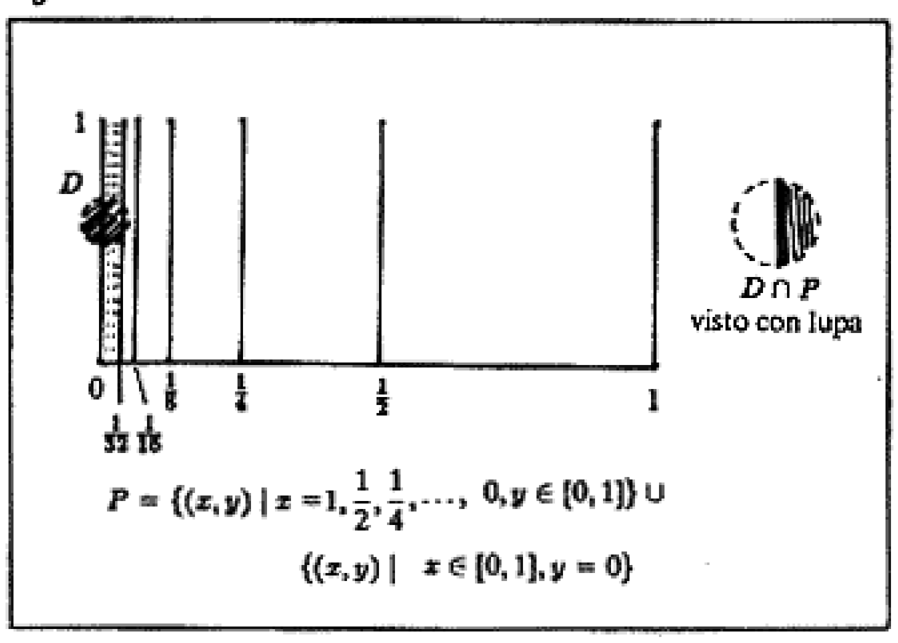


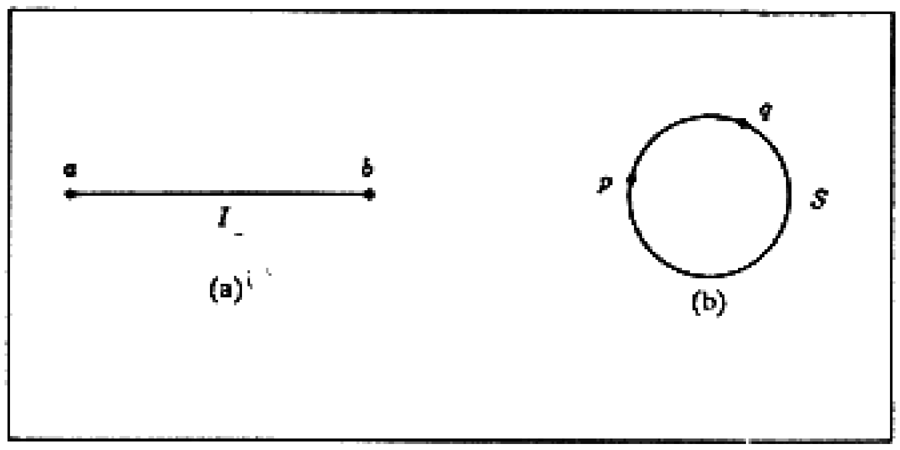
Figura 13



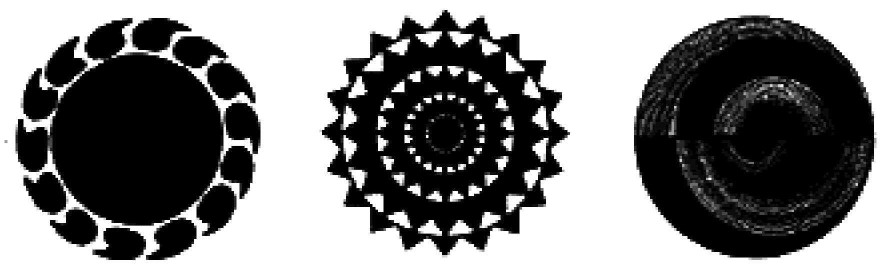
Decimos que I y S son *localmente conexos.*

El siguiente es un ejemplo de un continuo P (al que le llamamos peine) que no es localmente conexo. (Figura 13) pues

Figura 14



hay algunos discos abiertos D, cuya intersección con P no es conexa.



Dijimos que un arco y una circunferencia son localmente conexos, pero no son los únicos; Un árbol y un cuadrado también lo son.

Así que para *caracterizar* a nuestros personajes (I y S) necesitamos alguna otra propiedad.

Para I, irreducibilidad.

Sea I el intervalo [a,b] (Fig. 14 a)

Si queremos ir de a a b por adentro de I, necesitamos utilizar todo I. Es decir, no hay un *continuo* contenido propiamente en I, que contenga a los extremos a y b.

En este caso decimos que I es *irreducible* entre a y b. Para cualquier par de puntos p y q en S, hay un subcontinuo (subconjunto que es continuo) propio que lo contiene: el arco p q (Fig. 14b) y la misma propiedad tiene un disco y un árbol (Figura 15).

Figura 15

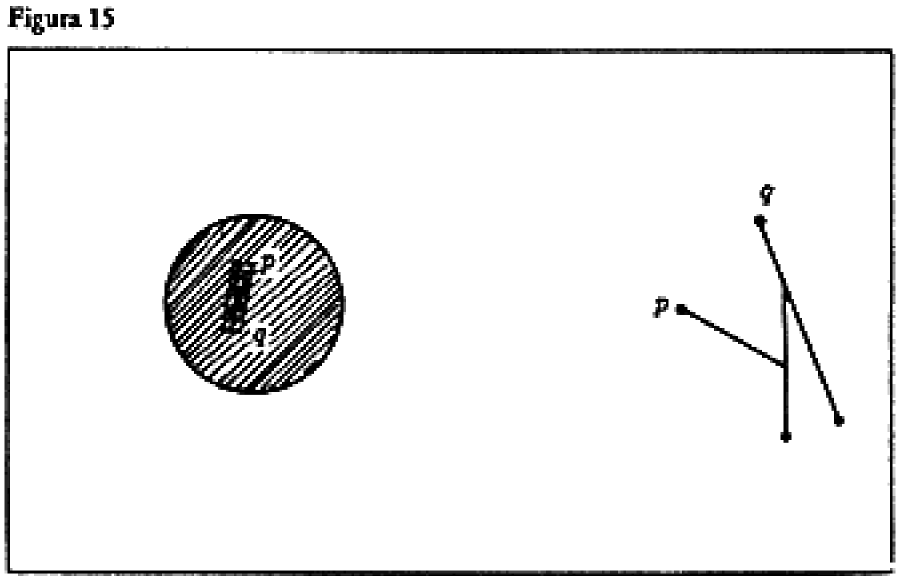
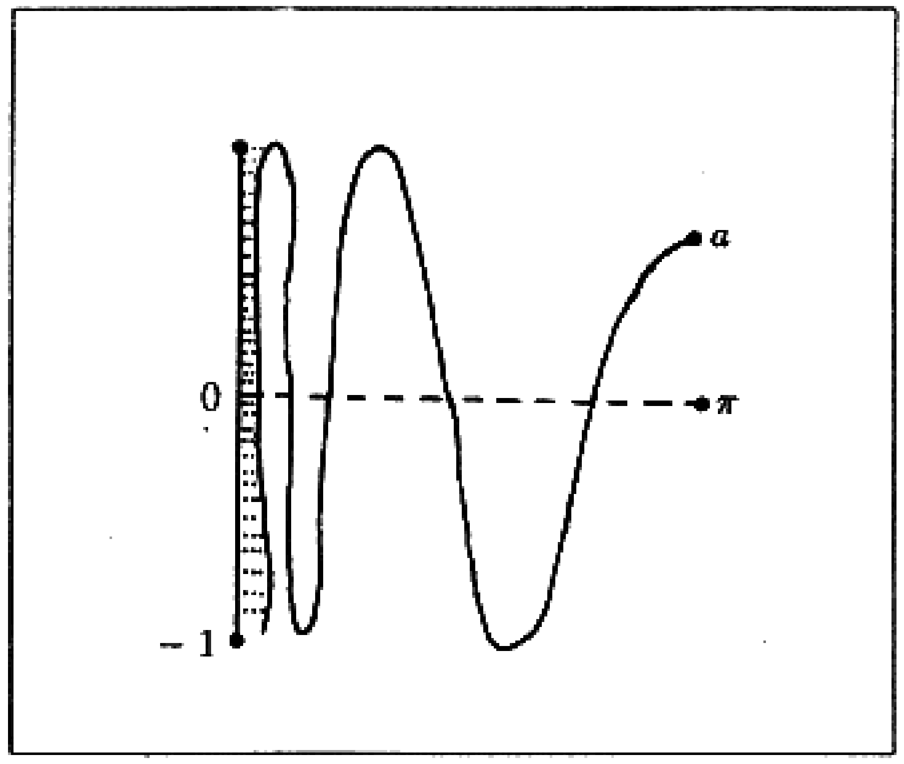


Figura 16



La irreducibilidad era la propiedad que nos hacía falta para caracterizar a I. El teorema dice:

Si un continuo M es localmente conexo y es irreducible entre dos de sus puntos, entonces M es un arco

Hay continuos que son irreducibles entre dos de sus puntos pero no son localmente conexos (Figura 16).

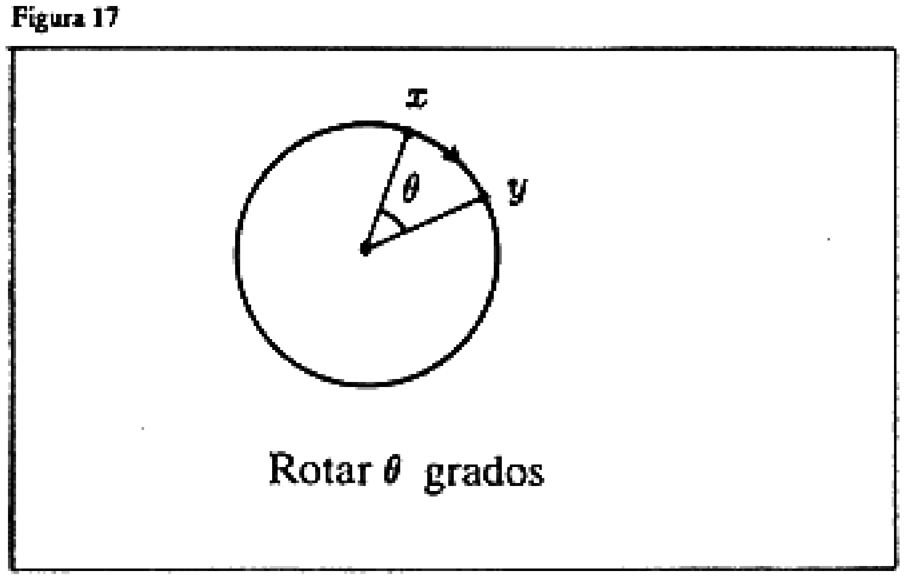
La curva $|\{(x, sen\frac{1}{x})|x\epsilon(0, \pi]\}$ junto con los puntos del eje Y entre -1 y 1 es un continuo irreducible entre a y b (b puede ser cualquier punto del eje Y entre -1 y 1).

A primera vista parecería que este conjunto no es conexo, pero les aseguramos a nuestros lectores que sí lo es pues los puntos de la curva y los del eje Y están pegados por acumulación.

HOMOGENEOS

Si en S fijamos dos puntos x y y, podemos rotar S de manera que x vaya a y (Figura 17)

Figura 17



Esta rotación es una equivalencia topológica.

Por tener esta propiedad se dice que S es homogéneo. Intuitivamente, un continuo es homogéneo si todos sus puntos juegan el mismo papel, no se distinguen unos de otros. Esto no ocurre en I pues un extremo es distinto de uno que no lo es.

En un disco cerrado, un punto de adentro es distinto de uno de la orilla.

Homogéneo es la propiedad con la cual caracterizaremos a S:

Mazurkiewicz 1924: *Si M es un continuo localmente conexo y homogéneo entonces M es una circunferencia*

Hay continuo homogéneos que no son localmente conexos. Uno de ellos es el Pseudo-Arco del cual hablaremos más adelante.

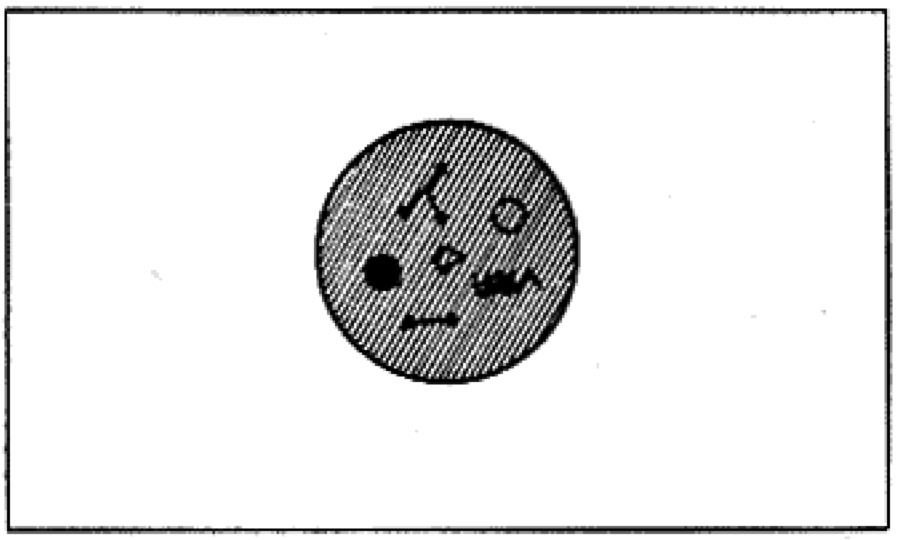
Subcontinuos. Ya mencionamos antes que un subcontinuo de un continuo X es un subconjunto de X que también es continuo.

Un punto de un continuo, por ser conexo y compacto, es un subcontinuo. El continuo X es un subcontinuo de sí mismo. En el *arco* todos los subcontinuos que no son puntos, son arcos.

En la circunferencia todos los subcontinuos, que no son puntos, son arcos excepto por la circunferencia misma.

En un disco cerrado caben una gran variedad de subcontinuos (Figura 18).

Figura 18



Alrededor de 1948 Knaster, Kuratowski, Moise, Bing, etc. se preguntaron si el arco (o intervalo) sería el único continuo cuyos subcontinuos –que no son puntos– son todos y cada uno equivalentes al continuo total.

Gracias a esta pregunta descubrieron un continuo, al que suele llamársele *Pseudo-Arco*, que tiene la propiedad de que sus subcontinuos, que no son puntos, son *pseudo-arcos*.

El Pseudo-Arco no es un arco, así que la respuesta a la pregunta de Knaster, Kuratowski, etc., es *no*.

El pseudo-arco, que es un continuo difícil (o imposible) dibujar habita en el plano y tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

1) Es homogéneo

2) Ninguno de sus puntos separa al pseudo-arco

3) No es localmente conexo

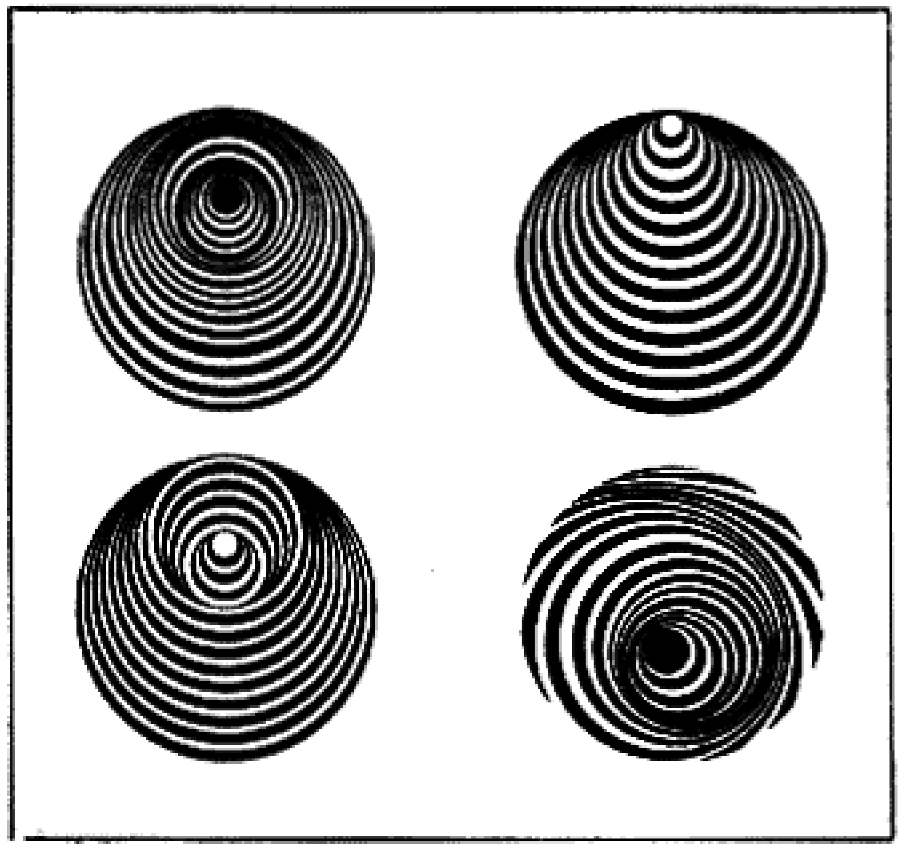
4) Es *INDESCOMPONIBLE*

Esto último significa que el pseudo-arco no se puede expresar como unión de dos subcontinuos propios, ¡difícil de imaginar!. Los ejemplos que hemos mencionado en este artículo son todos *descomponibles*.

Gracias a esta propiedad tenemos una nueva caracterización del arco, que fue demostrada en 1960 por Henderson.

Si un continuo M es descomponible y todos sus subcontinuos, excepto los puntos, son equivalentes a M, entonces M es un arco.

Hojime Ouchi



BIBLIOGRAFIA

1. Bing R. H. Snake Like Continua, Duke Math. J. 18 (1951) pág. 653-663.
2. Henderson G. W. Proof that every compact decomposable continuum which is topologically equivalent to each of its nondegenerate subcontinua is an arc. Annals of Mathematics, Vol. 72, No. 3 Nov. 1960.
3. K. Kuratowski Topology Volume II (1968) Academic Press.
4. Moise E. An Indecomposable Plane Continua which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua Transactions of the American Mathematical Society 63-1948. 581-594.