

# Matemáticas y caos

Modelos matemáticos simples, que pueden ser representados mediante ecuaciones deterministas, tienen comportamiento caótico. ¿Podrá su estudio ayudarnos a entender fenómenos tan complejos como la turbulencia?

LOURDES ESTEVA P.\*

**E**n el acontecer cotidiano estamos siempre en contacto con los tres estados de la materia: sólido, líquido y gaseoso, los dos últimos pueden presentarse en forma regular o turbulenta; así por ejemplo, debido a la velocidad alcanzada por el agua al transcurrir por los accidentes topográficos de su cauce, un río puede fluir en calma o presentar remolinos y abrupto despeñamiento de su masa líquida.

La turbulencia en un fluido está caracterizada por su movimiento irregular y desordenado, manifestándose por cambios rápidos, en apariencia incoherentes y difíciles si no es que imposibles de prever. Estas propiedades se encuentran en la atmósfera terrestre, en muchos sistemas hidráulicos e incluso en algunas instalaciones industriales tales como los circuitos para enfriamiento de las centrales nucleares.

Comprender la turbulencia, poder predecir su aparición y calcular sus efectos son problemas que se presentan en hidrodinámica, aeronáutica, meteorología, oceanografía, astrofísica, química, etc. Podemos decir que la turbulencia es uno de los problemas cruciales de la física actual y el interés que ha despertado no es nuevo porque desde hace muchos siglos los científicos vienen investigándola; por ejemplo, Leonardo de Vinci estudió el movimiento turbulento de las aguas de un río (fig. 1) debido a que quería construir un canal que comunicara a la ciudad de Florencia con el mar.

Como dijimos en párrafos anteriores, la turbulencia es el movimiento desorganizado y aparentemente errático de un fluido. Esto no es una definición precisa pero se puede tomar como una primera aproximación. En los flujos turbulentos las medidas de las cantidades que describen éstos (por ejemplo, la velocidad) presentan un comportamiento caótico. ¿Qué se quiere decir con caótico?: que estas medidas no presentan en apa-

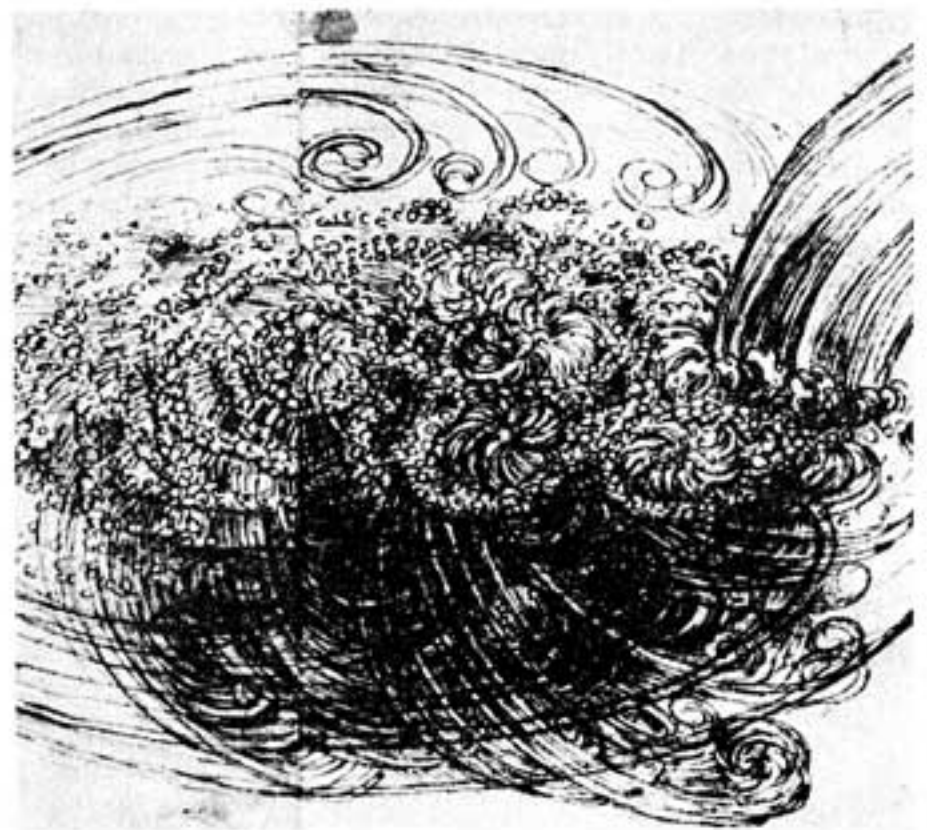


Figura 1.

riencia un patrón determinístico, sino que dan la impresión de ser totalmente aleatorios. Sin embargo se ha observado que debajo de ese caos hay cierta regularidad susceptible de ser analizada, muestra de ello son los grandes remolinos que contienen a su vez remolinos más pequeños, etc...

Un camino que podemos seguir para entender el problema de la turbulencia es estudiar la manera en que ésta aparece. ¿Cómo es que la atmósfera, el océano, y algunos sistemas hidrodinámicos van perdiendo progresivamente su carácter organizado y regular y se vuelven turbulentos?

Veámos los siguientes ejemplos:

\* *Profesor del Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM*

Si colocamos un cuerpo en la corriente de un fluido, por ejemplo, la columna de un puente en un río, entonces para velocidades muy bajas, el fluido discurre de manera irregular e independiente del tiempo como se muestra en la figura 2a; en este caso se dice que es un flujo laminar. A medida que aumenta la velocidad se empiezan a formar remolinos, no obstante, el movimiento sigue siendo regular e independiente del tiempo (fig. 2 b).

Cuando la velocidad se incrementa aún más, los remolinos empiezan a desplazarse con la corriente y el movimiento del fluido se vuelve dependiente del tiempo. Si medimos la velocidad de un punto que se mueve con la corriente a partir del puente, se observa un registro periódico como se muestra en la fig. 2c.

Existe un parámetro, llamado el número de Reynolds, que caracteriza los cambios en el comportamiento de la corriente y es proporcional al producto de la velocidad por la densidad del fluido. A este parámetro se le suele denotar por  $R$ . Cuando esta  $R$  aumenta a un cierto valor, se empiezan a formar remolinos más pequeños dentro de los remolinos grandes. El registro de la velocidad con respecto al tiempo es parcialmente periódico e irregular (fig. 2d). Aumentamos más  $R$  hasta llegar a un valor crítico donde el movimiento del fluido presenta un aspecto totalmente caótico similar al de la fig. 2, entonces el registro de la velocidad se vuelve caótico también como se muestra en la fig. 2e.

Libchaer y Maurer (1980) realizaron un experimento en el que también observa el paso de la turbulencia: un fluido contenido en un recipiente se calienta desde la parte inferior de éste, cuando la temperatura es baja el fluido permanece estático, a temperaturas más altas se empieza a observar un flujo de líquido caliente hacia arriba y de líquido frío hacia abajo dando lugar a la formación de dos cilindros convectivos (fig. 3). El registro de la temperatura en un punto sobre uno de estos cilindros es periódica (fig. 4a). A una cierta temperatura, los cilindros se tornan irregulares por existir una onda de fluido que se desplaza sobre ellos. El registro de la temperatura sigue siendo periódico con lapsos el doble del anterior. Subsecuentes aumentos en la temperatura producen la formación de nuevas ondas superpuestas a las anteriores y duplicación del periodo del registro de la temperatura.

Figura 3.

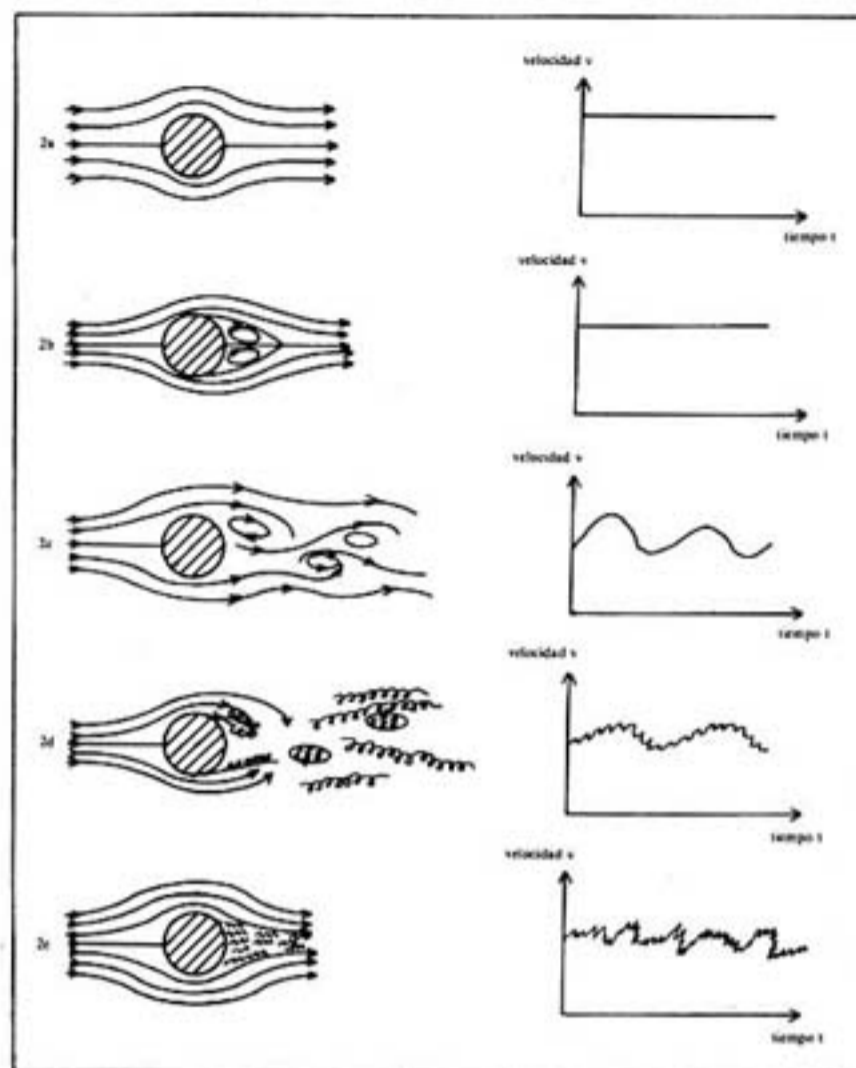
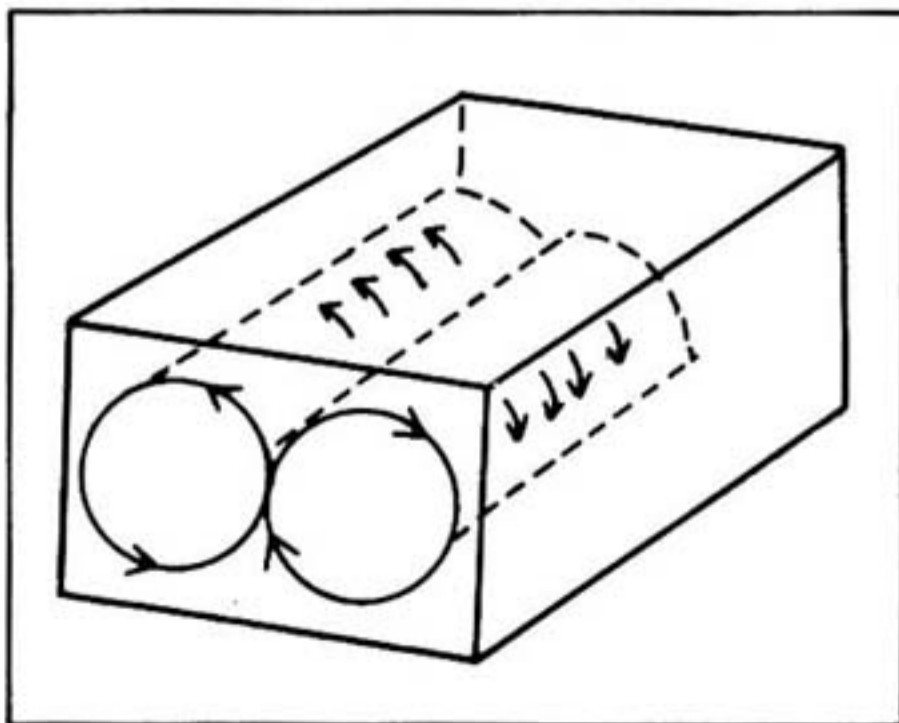
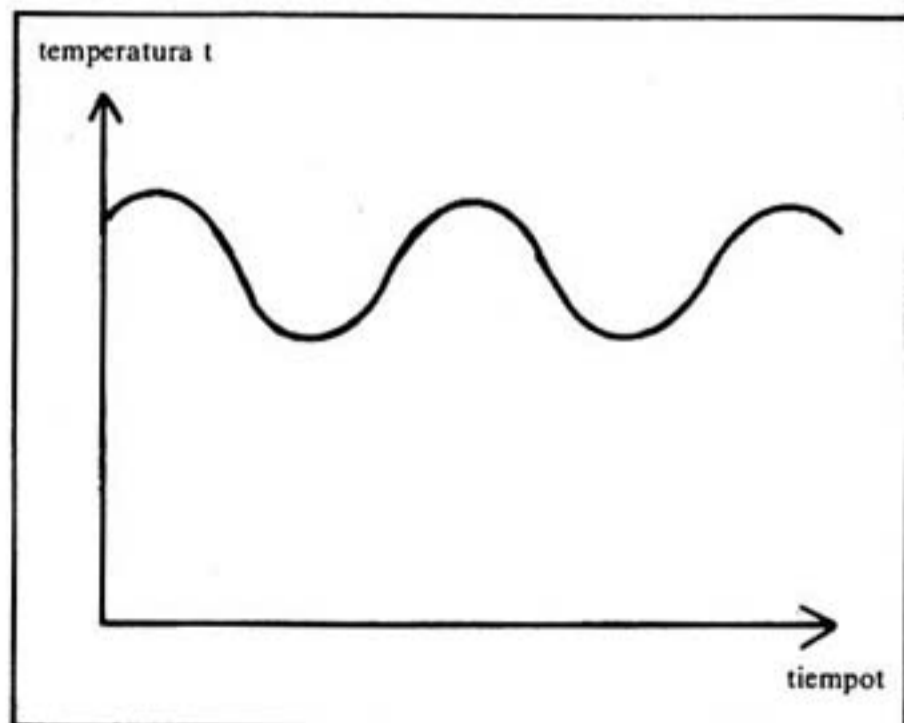


Figura 2. Comportamiento de un flujo hidrodinámico a medida que aumentamos la velocidad

Como en el caso anterior, existe un valor crítico de la temperatura a partir del cual el movimiento del fluido es caótico y el registro de la temperatura presenta un aspecto similar al de la fig. 2e.

Figura 4. Registro de la temperatura contra el tiempo en el experimento de Libchaer y Maurer.





Estos dos ejemplos muestran que al ir variando un parámetro, en el primero, el número de Reynolds y en el segundo la temperatura, se presenta una transición entre la fase laminar y la fase turbulenta.

Nos gustaría entender completamente la transición a la turbulencia en los sistemas hidrodinámicos. Desafortunadamente, a pesar de muchos años de estudio, aún no se ha encontrado una explicación satisfactoria al problema. Entre los científicos que han contribuido al estudio de este fenómeno, está Salzman, quien obtuvo un sistema de ecuaciones en derivadas parciales bastante complicado para describir el movimiento del fluido en el segundo ejemplo. Más tarde, Lorenz reduce el sistema anterior a uno de ecuaciones diferenciales ordinarios más simple:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

En estas ecuaciones  $x$  es proporcional a la intensidad del movimiento convectivo, mientras que  $y$  es proporcional a la diferencia de temperatura entre el fluido ascendente y el descendente; la variable  $z$  es proporcional a la distorsión de la temperatura vertical;  $b$ ,  $\sigma$  y  $r$  son parámetros.

Lorenz fijó los dos primeros parámetros e integró numéricamente las ecuaciones para diversos valores de  $r$  y obtuvo que a medida que aumentaba  $r$  el comportamiento de las trayectorias solución del sistema, cambiaba de una manera drástica: para valores pequeños de  $r$  las soluciones tienden a estabilizarse en un valor, a medida que  $r$  aumenta este comportamiento se complica a tal punto que existen soluciones que se "enrollan" alternadamente entre dos puntos fijos A y B, de tal suerte, que el número de vueltas que dan cada vez alrededor de cada punto es completamente arbitrario, dando la impresión de ser éste un proceso de carácter aleatorio (fig. 5). Las soluciones se van acercando a un conjunto, el cual se ve como superposición de laminillas horizontales (fig. 6). A este conjunto se le conoce como atractor extraño.

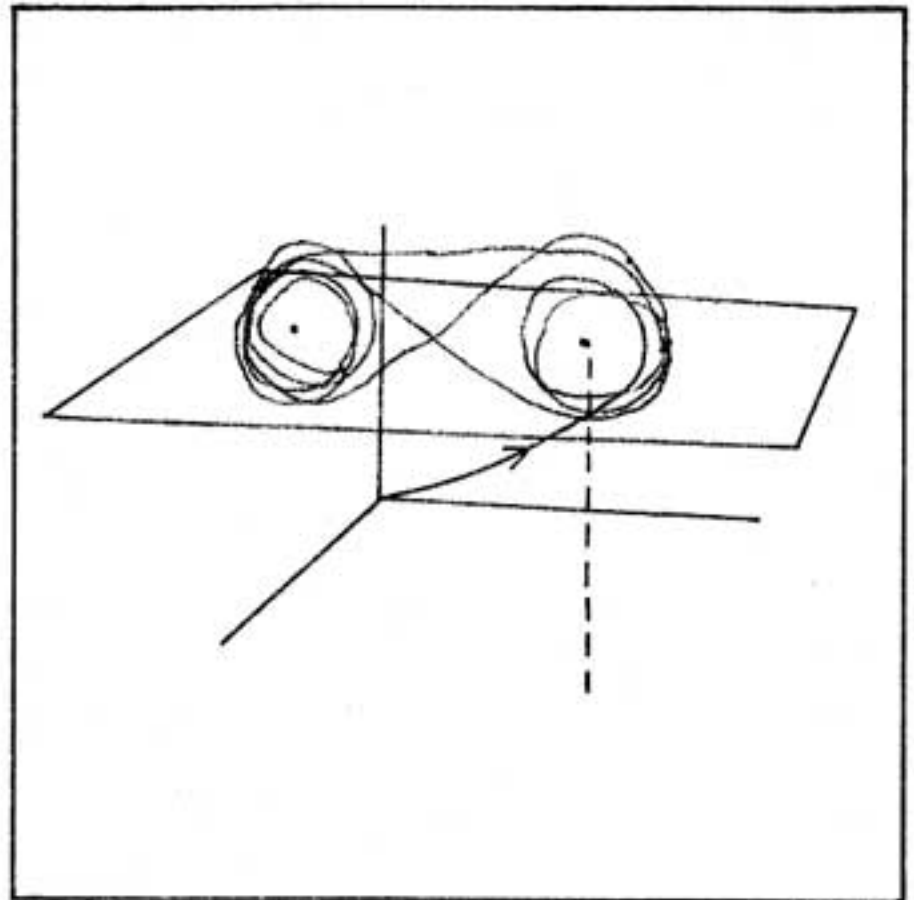


Figura 5.

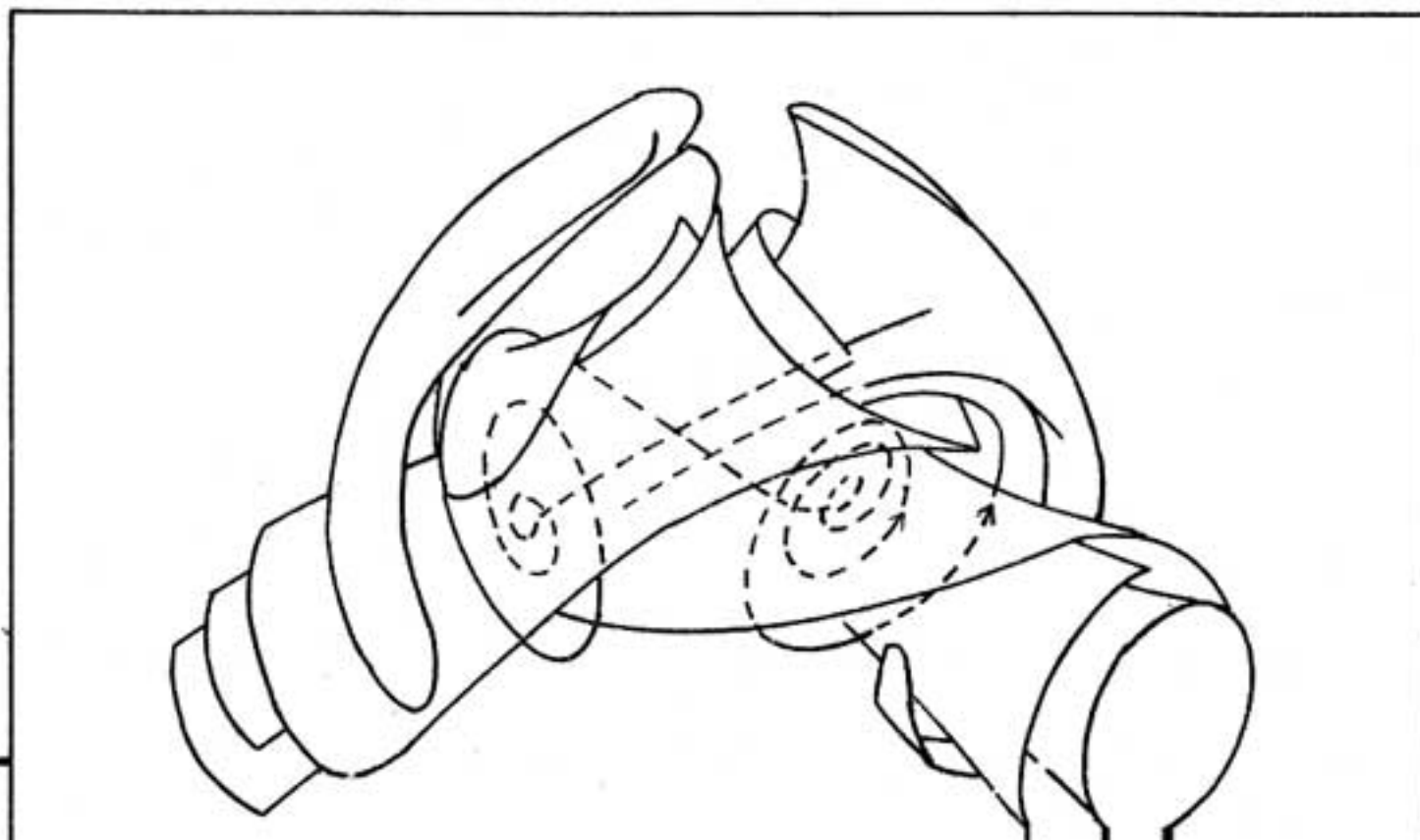
Además se observa lo siguiente: aún empezando con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas, la evolución de dos trayectorias solución es totalmente diferente. A esto se le conoce como sensibilidad con respecto a condiciones iniciales y es una característica del movimiento caótico. Entonces, si el valor del parámetro es tal que estamos en un régimen caótico, resulta imposible hacer predicciones a largo plazo, ya que cualquier error en las mediciones iniciales nos llevaría a errores cada vez mayores. Lorenz dedujo de lo anterior que las predicciones climatológicas a largo plazo son imposibles de hacer.

La transición al caos no es privativo de los sistemas hidrodinámicos, muchos modelos matemáticos en apariencia sencillos presentan también este fenómeno:

Supongamos, por ejemplo, que estamos interesados en el crecimiento de una población de individuos que se desarrollan en un medio limitado y que tienen una estación de reproducción fija. Podemos imaginar una población de insectos que nacen durante la primavera y ponen huevos que eclosionan hasta la siguiente primavera; así cada año se tiene una nueva generación. Los datos que se observan consisten en general de información acerca del promedio de la población total de esta generación. Podemos suponer que el número de individuos  $N_{t+1}$  está relacionado con el número de individuos  $N_t$  de la generación  $t$  vía la siguiente ecuación:

$$N_{t+1} = \gamma N_t - KN_t^2$$

Figura 6.



El primer término  $\gamma N_t$  se debe al crecimiento natural de la población; el segundo término  $KN_t^2$ , representa una reducción natural de la población debido a la sobrepoblación. Si hacemos la sustitución de  $N_t$  por  $(r/K)N_t$ , obtenemos la ecuación en forma normalizada:

$$N_{t+1} = \gamma N_t(1 - N_t) \quad (1)$$

donde  $\gamma$  representa la razón intrínseca de crecimiento. Nos gustaría saber, basados en la ecuación (1), la evolución de una población inicial  $N_0$ , y cómo esta evolución se ve afectada cuando cambiamos  $\gamma$ . Para mantener a la población entre 0 y 1 nos limitaremos a examinar los valores de  $\gamma$  entre 0 y 4. La gráfica de  $N_t$  contra  $N_{t+1}$  es una parábola (fig. 7).

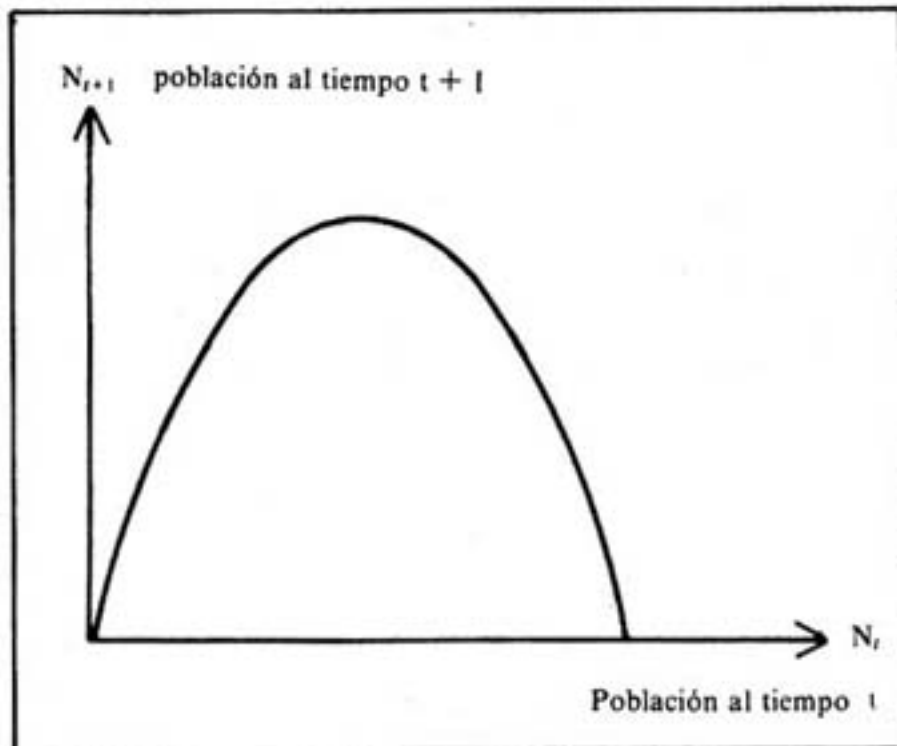


Figura 7.

Para valores de  $\gamma$  menores que 1 la gráfica está por debajo de la recta  $y = x$  lo cual quiere decir que el número de individuos de la generación  $t + 1$  es menor que el número de la generación  $t$  y por lo tanto cualquier población inicial tiende a disminuir año con año hasta extinguirse. La gráfica de la población contra el tiempo tiene un aspecto como el de la fig. 8a. Este comportamiento equivaldría al del flujo laminar de la fig. 2a. La región de  $\gamma$  entre 1 y 3 tiene otro tipo de comportamiento también simple. Si empezamos con una población inicial  $N_0$  entre 0 y 1 ésta tenderá a un valor  $N^*$  estacionario distinto de 0, el cual lo podemos encontrar resolviendo la ecuación

$$N = \gamma N(1 - N) \quad (2)$$

cuyas soluciones son  $N = 0$  y  $N = 1 - 1/\gamma$

Las soluciones de la ecuación (2), llamadas puntos fijos o puntos de equilibrio se les puede encontrar también gráficamente viendo la intersección de la gráfica con la recta  $y = x$  como se muestra en la fig. 9.

Entonces para la región en la cual  $\gamma$  está por debajo de 3, el comportamiento de la población es regular y fácil de comprender, el caos está lejos de aparecer (fig. 8a).

¿Qué pasa cuando incrementamos  $\gamma$  más allá de 3?

El punto fijo  $N^*$  se vuelve inestable, las poblaciones cercanas a él se alejan y empiezan a oscilar entre un valor grande  $N^*$  y

otro pequeño  $N^*$  (fig. 8b). Una población pequeña se reproduce mucho dejando un gran número de huevos. Pero la población al siguiente año es tan grande que, debido a los efectos de la sobrepoblación, pone menos huevos y la siguiente generación vuelve a ser menos numerosa. Así, las poblaciones en los años pares se dan grandes y en los años impares pequeñas.

A los valores  $N^*$  y  $N^*$  se les llama puntos periódicos de periodo 2, esto es, que si empezamos por ejemplo con  $N^*$ , después de dos generaciones consecutivas regresamos otra vez a  $N^*$ . En general un punto periódico de orden  $n$  es aquel que después de  $n$  iteraciones de la ecuación (1) vuelve a caer en él mismo, esto es  $N_{t+n} = N_t$  y  $n$  es el mínimo número para el cual pasa esto. La población sigue oscilando entre dos valores hasta el valor  $\gamma_1 = 1 + \sqrt{6} = 3.4496$ , a partir de este valor  $N^*$  y  $N^*$  se vuelven inestables, y aparecen 4 puntos  $N^*$ ,  $N^*$ ,  $N^*$  y  $N^*$  de periodo 4 y las poblaciones después de un tiempo oscilan alternadamente entre ellos (fig. 8c). Este comportamiento perdura hasta un valor  $\gamma_2$ , entonces el ciclo de orden 4 se vuelve a su vez inestable y aparece uno de orden 8 que permanece estable hasta un valor  $\gamma_3$ , a partir del cual aparece uno de orden 16 estable y así sucesivamente hay una cascada de doblamientos del periodo que nos recuerda un poco el proceso de doblamiento del periodo de la temperatura del ejemplo 2.

En la figura 10 se muestran los valores estables de la población en función del parámetro  $\gamma$  y los dobles consecutivos del periodo.

Este comportamiento continúa así hasta el valor  $\gamma_b = 3.5699$  en donde aparece un ciclo de longitud infinita y todos los puntos tienden a este ciclo. Si seguimos una población inicial por mucho tiempo, esta tiende a distribuirse de una manera regular en una infinidad de bandas de longitud infinitamente pequeña cada una.

Figura 8.

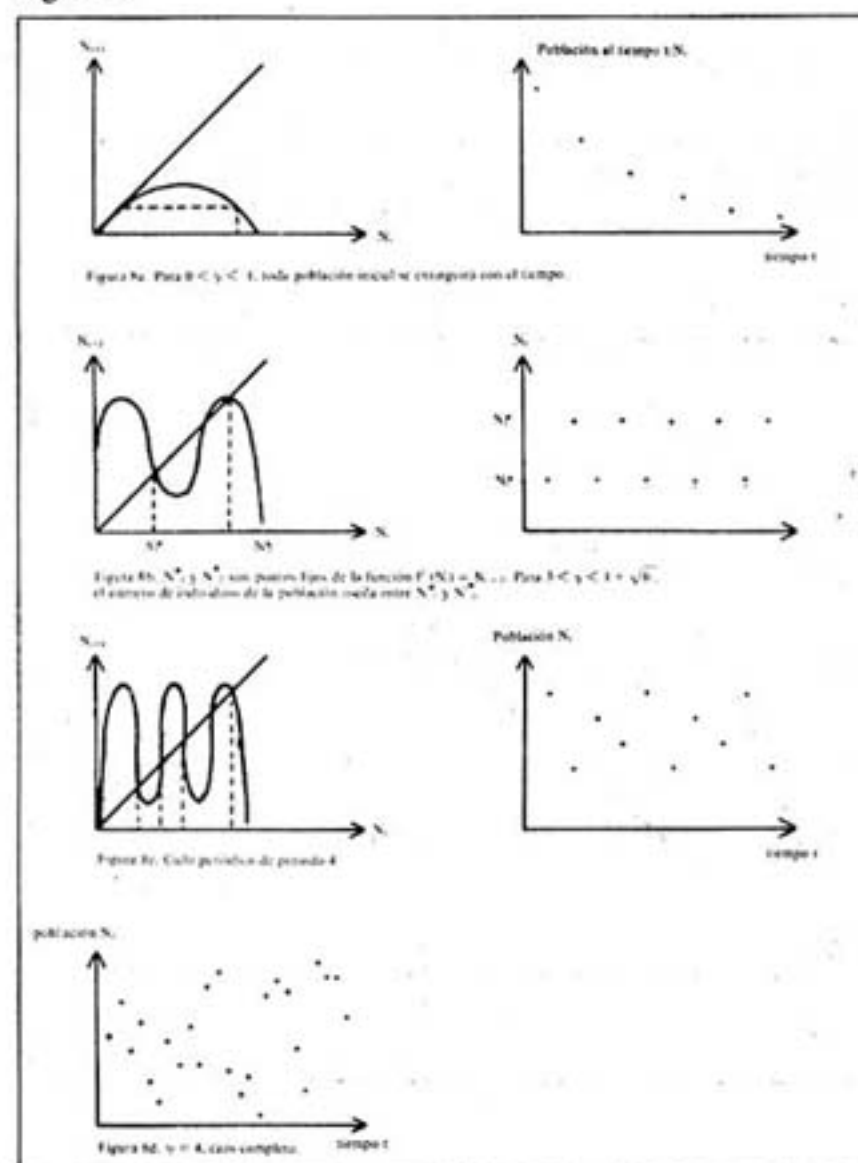


Figura 8a. Para  $0 < \gamma < 1$ , toda población inicial se extingue con el tiempo.

Figura 8b.  $N^*$  y  $N^*$  son puntos fijos de la función  $F(N) = \gamma N(1 - N)$ . Para  $1 < \gamma < 1 + \sqrt{6}$ , el número de valores de la población oscila entre  $N^*$  y  $N^*$ .

Figura 8c. Ciclo periódico de periodo 4.

Figura 8d.  $\gamma = 4$ , caos completo.



A partir de  $\gamma_b$  empiezan a aparecer puntos periódicos de orden impar hasta que para el valor  $\gamma_c = 3.8284$  aparece el primer punto de periodo 3 y esto significa la aparición del caos como demostraron Li y Yorke en el trabajo que lleva el título "Periodo 3 implica caos". A partir de este valor hay ciclos de todos los periodos; hay un número infinito de poblaciones iniciales cuyas trayectorias son totalmente aperiódicas, esto es, si seguimos una de estas trayectorias por mucho tiempo el patrón nunca se repite y los datos dan la impresión de ser obtenidos por medio de un proceso aleatorio.

En la figura 8c se muestra la trayectoria del punto inicial  $N_0 = 0.707$ . Aparentemente la población fluctúa y toma todos los valores entre 0 y 1 y aunque  $N_n$  esté determinada por  $N_0$ , para  $n$  grande, el patrón que rige esta determinación se ve caótico más que determinístico. También como en el caso de las ecuaciones de Lorenz, se observa el fenómeno que caracteriza el caos: gran sensibilidad con respecto a condiciones iniciales. Para  $m$  grande,  $N_m$  depende fuertemente de la condición inicial  $N_0$ , en el sentido de que otra condición inicial  $N_0$  por muy cercana que se encuentre a  $N_0$ , da lugar a otra trayectoria totalmente distinta. Para entender mejor lo que se quiere decir veamos el caso  $\gamma = 4$ . Haciendo el cambio de variable (que sólo vale para  $\gamma = 4$ )  $N_m = (1 - \cos 2\pi \theta_m)/2$  la ec. (1) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \theta_{m+1}) &= 4 \left( \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \theta_m) \right) \\ &\quad \left( 1 - \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \theta_m) \right) \\ &= 4 \left( \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \theta_m) \right) \\ &\quad \left( \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi \theta_m) \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 4\pi \theta_m) \end{aligned}$$

cuyas soluciones son  $\theta_{m+1} = 2\theta_m$  ó  $\theta_m = 2^m \theta_0$

Como  $\cos 2\pi \theta_m$  no se altera si aumentamos un entero a  $\theta_m$  ó si le cambiamos el signo, podemos considerar los valores de  $\theta_m$  entre 0 y 1, esto es, nos olvidamos de la parte entera de  $\theta_m$ .

Figura 9.

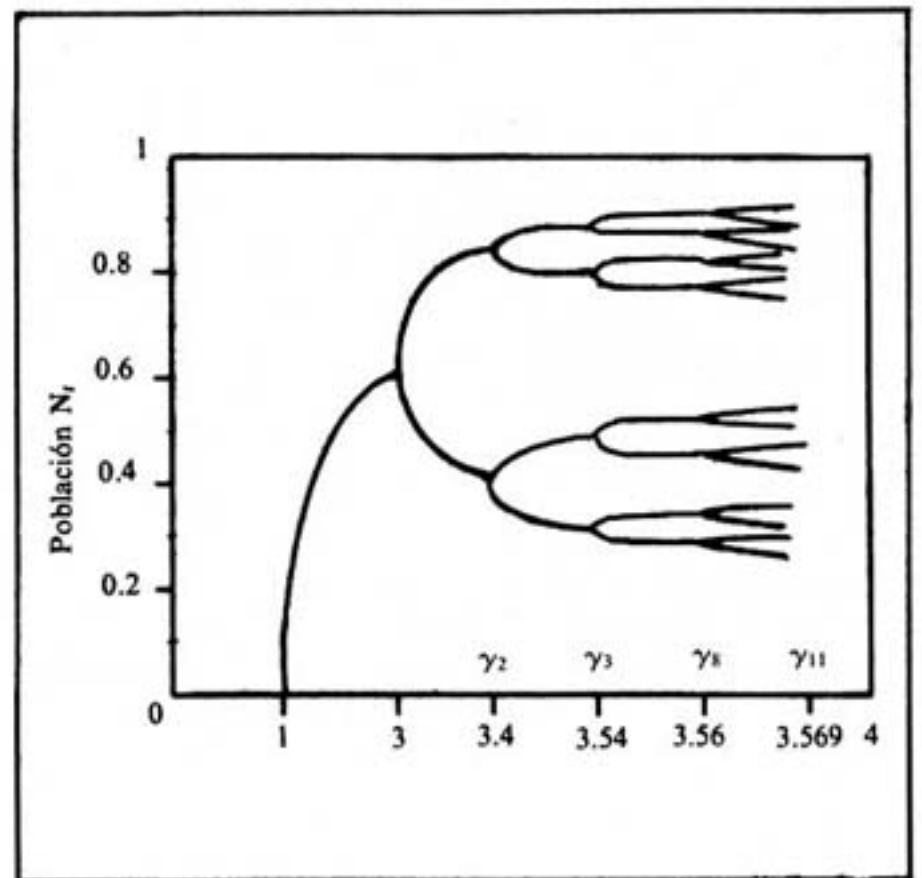
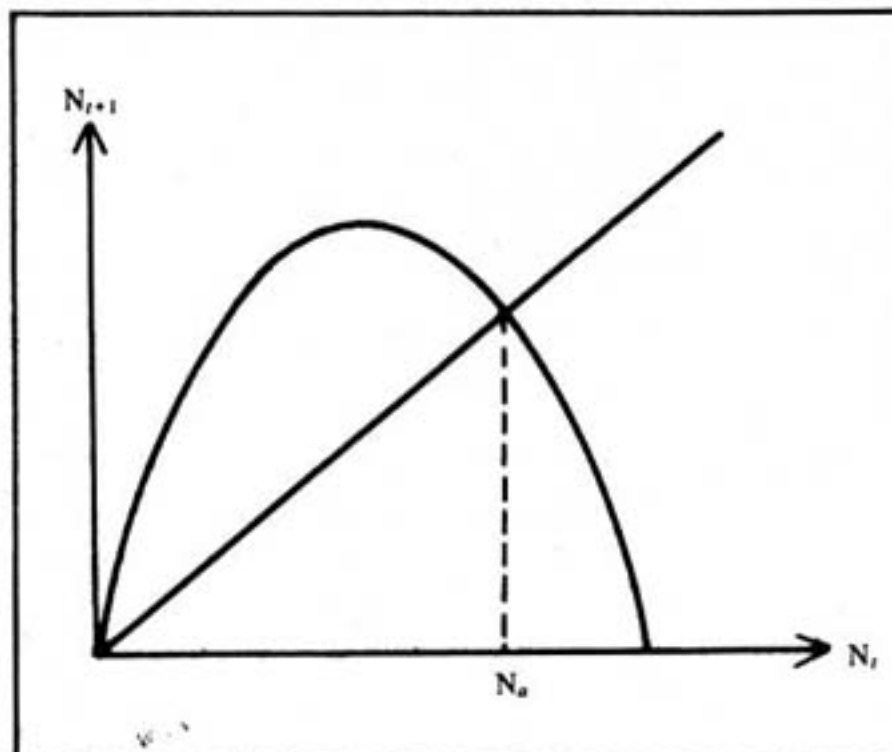


Figura 10. Valores estables de la población en función del parámetro  $\gamma$ .

Si escribimos  $\theta_0$  en base binaria, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots \\ &= .101011 \dots \end{aligned}$$

la multiplicación por 2 es simplemente un recorrimiento del punto decimal hacia la derecha.

Entonces

$$\begin{aligned} \theta_1 &= .01011 \dots \\ \theta_2 &= .1011 \dots \\ \theta_3 &= .011 \dots \\ \theta_4 &= .11 \dots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Entonces, si empezamos con  $\theta_0$ ,  $\theta_m$  dependerá de las cifras decimales a partir del  $m$ -ésimo lugar, lo cual implica que aún cuando  $\theta_0$  y  $\theta'_0$  difieran por muy poco, la diferencia entre  $\theta_m$  y  $\theta'_m$  va a ir aumentando cada vez más. Esto nos da una idea de la sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.

El hecho de que una ecuación simple y determinística como la ecuación (1) tenga un comportamiento caótico tiene varias implicaciones prácticas. Significa, por ejemplo, que las fluctuaciones aparentemente erráticas en los datos acerca de una población no tienen porque ser debidas a errores de muestreo, ni tampoco a que el crecimiento de la población sea un proceso aleatorio que no pueda ser modelado determinísticamente; sino que este comportamiento puede derivarse de un modelo como la ecuación (1) y simplemente lo que ocurre es que ésta presenta un comportamiento caótico.

Todo lo anterior no es privativo de la ecuación (1) solamente, sino que el proceso de doblamiento del periodo y transición al caos se observa en cualquier función de la forma

$$x_{j+1} = \gamma f(x_j) \quad (3)$$

donde  $f(0) = f(1) = 0$  y  $f$  tiene un solo máximo en el intervalo 0 a 1.

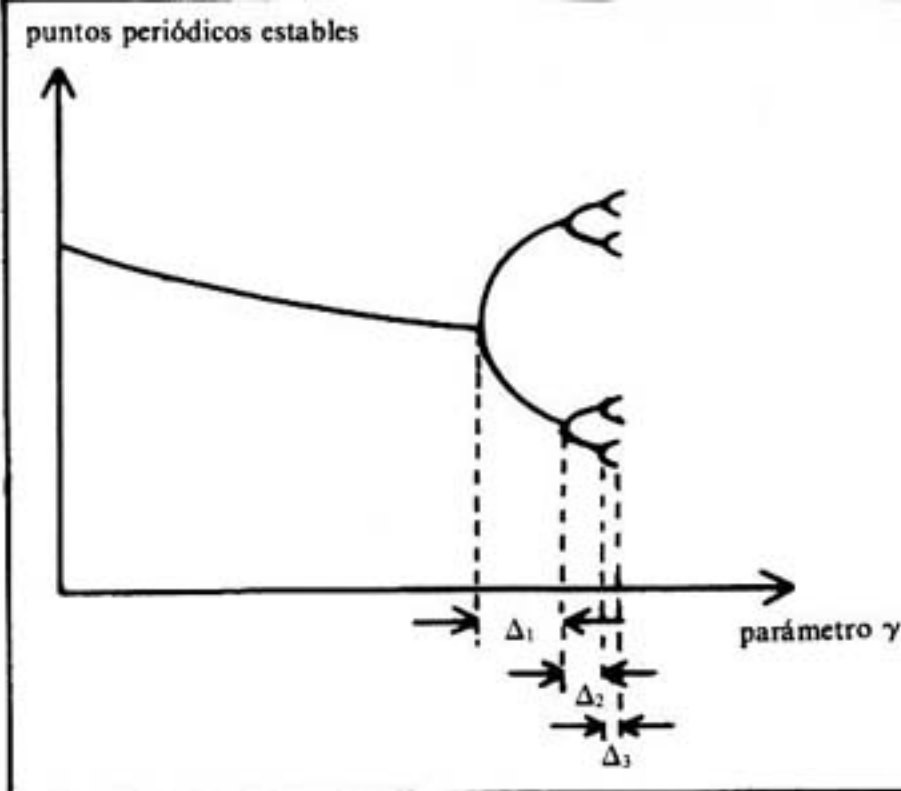


Figura 11a. La convergencia de los parámetros es universal, esto es,  $\Delta_i / \Delta_{i+1} \rightarrow \delta = 4.6692\dots$

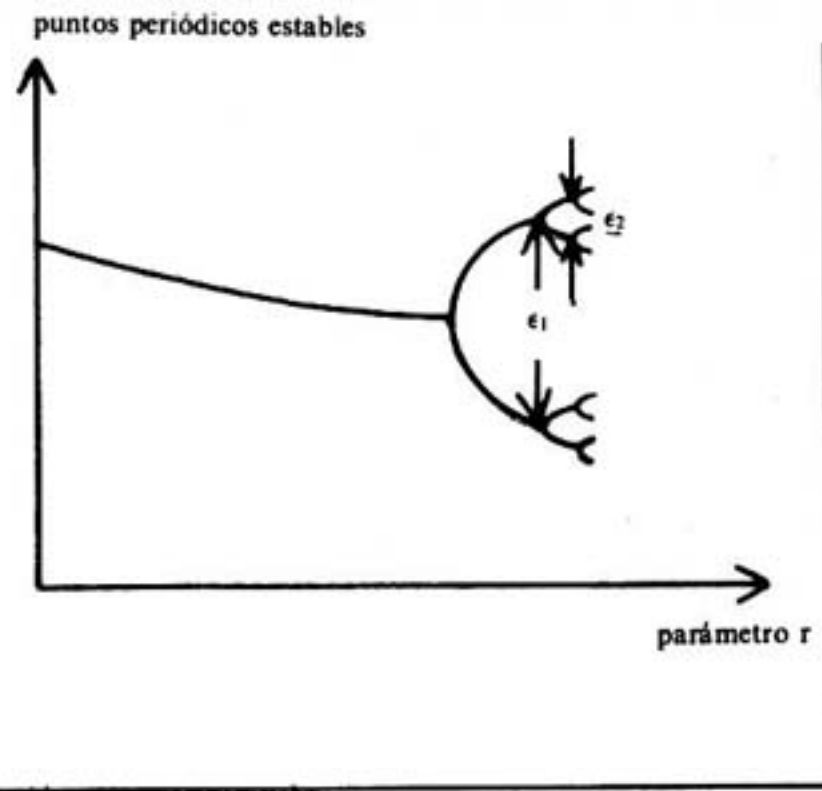


Figura 11b. La escala relativa de las ramificaciones es universal, esto es,  $\epsilon_i / \epsilon_{i+1} \rightarrow \alpha = 2.5029$

El estudio de las funciones de un intervalo  $[a,b]$  en el mismo, ha cobrado gran interés en los últimos años y se han obtenido resultados realmente sorprendentes como el Teorema de Sharkoskii:

Sea  $f$  una función continua de un intervalo  $[a,b]$  en el mismo intervalo. Ordenemos los naturales del modo siguiente:

$$3 < 5 < 7 < \dots < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 < \dots < 2^2 \cdot 3 < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 7 < \dots < 2^n \cdot 3 < 2^n \cdot 5 < 2^n \cdot 7 < \dots < 2^m < 2^{m-1} < 2^{m-2} < \dots < 2^2 < 2 < 1$$

Si existe un punto periódico de periodo  $m$  y  $m < n$ , entonces existe un punto periódico de periodo  $n$ .

O también los resultados de Mitchel Feigenbaum, quien demostró que algunas propiedades cuantitativas de la manera en que se da la transición al caos se observa en una gran cantidad de sistemas no lineales, en particular para las funciones continuas de un intervalo a él mismo.

El descubrimiento de Feigenbaum consiste de las siguientes observaciones de tipo cuantitativo:

1. Sea  $\gamma_i$  el valor del parámetro para el cual aparece por vez primera un ciclo de periodo  $2^i$ . Denotemos por  $\Delta_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i$ , entonces  $\Delta_i / \Delta_{i+1} \rightarrow \delta = 4.692\dots$  cuando  $i$  se hace muy grande. Lo sorprendente es que  $\delta$  es universal, esto es, no depende de la función en particular que se tome (fig. 11a).
2. Si denotamos por  $\epsilon_i$  la distancia entre dos puntos vecinos de un ciclo de orden  $2^i$  (fig. 11b), entonces  $\epsilon_i / \epsilon_{i+1} \rightarrow \alpha$  donde  $\alpha = 2.5029$  para  $i$  grande, donde otra vez,  $\alpha$  es independiente de la función.

Las características del caos, movimientos erráticos y gran sensibilidad con respecto a condiciones iniciales se han observado en ecuaciones de segundo orden no lineales con forzamiento, que son utilizadas para modelar circuitos eléctricos no lineales; en funciones de varias variables, como por ejemplo, la famosa "herradura" de Smale (fig. 11); en sistemas de ecuaciones no lineales de orden mayor de 2. En general el caos es algo que está presente en gran cantidad de sistemas dinámicos que modelan fenómenos físicos, químicos, biológicos y otros.

Debido a esto existe cada vez más interés sobre este tema y aunque se han hecho muchos avances para configurar una teoría al respecto, quedan aún muchas preguntas entre las

cuales destacan aquellas que se refieren a la manera en que se origina el caos cuando se varía uno o más parámetros. Esto pertenece a la Teoría de Bifurcaciones que estudia los cambios cualitativos de un sistema dinámico cuando se varía uno o varios parámetros.

## BIBLIOGRAFIA

1. Lesieser, M. La turbulence développée. *La Recherche* 139.
2. Seminario Ex-Mor. *Entropía, ergodicidad y medidas invariantes*. Comunicaciones Internas, Departamento de Matemáticas.
3. Pedrag Critanovic-Nordita. *Universality in Chaos*. 83/139.
4. Hirsch-Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Ed. Academic Press.
5. R. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 26:1. June 10 1976.

Figura 12. Herradura de Smale

El rectángulo ABCD se estira, se angosta, se dobla y se vuelve a poner encima de él como se muestra en la figura. Así A va a dar a A', B a B', etc.,...  
Sea  $f$  la función de  $R^1$  a  $R^1$  que lleva a cabo las transformaciones del párrafo anterior, entonces se puede demostrar que  $f$  tiene una infinidad de puntos periódicos (un punto  $p$  es periódico de orden  $n$  si  $f^n(p) = p$  donde  $f^n$  donde  $f$  significa iterar la función  $f$   $n$  veces).

