Las matemáticas fueron creadas para resolver problemas.

Consideraciones acerca de la enseñanza de las matemáticas

"En oposición a Arquímedes, que usaba una combinación de formalización local y métodos heurísticos..., fue la obra de Euclides la que se tomó como modelo didáctico. Las consecuencias desastrosas de este hecho se hacen sentir hasta hoy.

MANFREDO PERDIGAO DO CARMO*

El Ministerio de Educación consideró oportuno que participase en esta reunión sobre la enseñanza de la Matemática, un representante del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA) del Consejo Nacional de la Investigación, y expresase el punto de vista del matemático profesional sobre los asuntos aquí tratados.

El IMPA tiene un interés vital en estas cuestiones. En primer lugar porque la modernización de cualquier plan de estudios es esencialmente la transferencia de conquistas científicas al nivel de la enseñanza. Nadie mejor, por tanto, que un matemático familiarizado con estas conquistas para juzgar el valor, la utilidad y los límites de esta transferencia. En segundo lugar, y esto puede parecer paradójico, porque el IMPA actúa principalmente al nivel de posgrado en Matemática. La paradoja desaparece cuando tomamos en cuenta que el desarrollo de un posgrado en cantidad y nivel capaces de fortalecer las universidades, industrias y asesorías, y el contingente necesario para el desarrollo brasileño descansa, en última instancia, en una enseñanza básica objetiva y correcta.

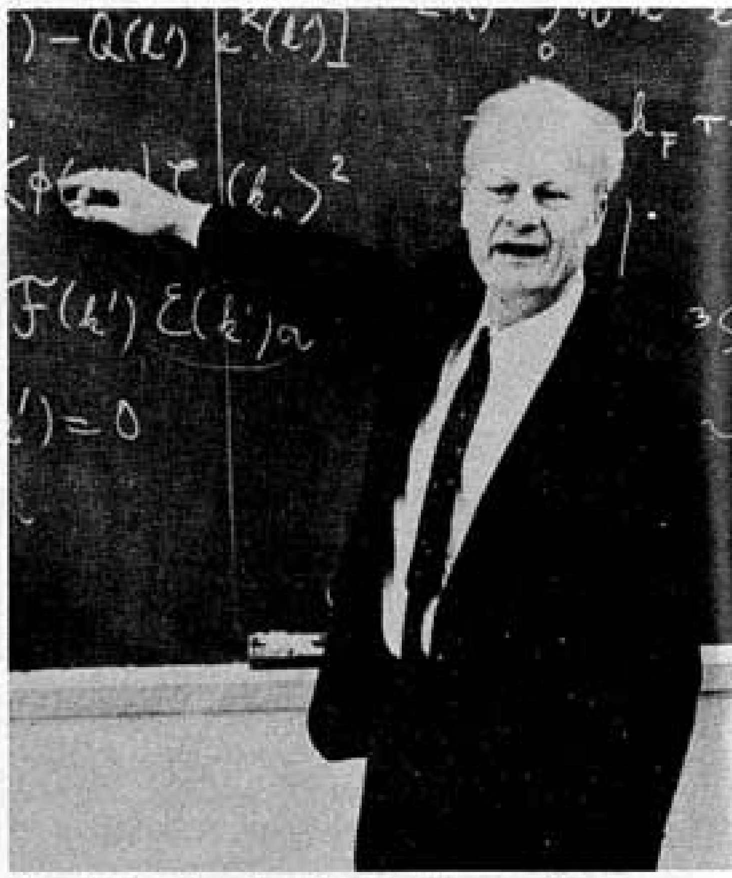
* *El titulo original es Consideraçoes sobre l ensino da Matemática. Boletin da* Sociedade Brasileira da Matemática. *Vol. 5, No. 1, 1974, pp. 105-112. Traducción de Manuel López Mateos, profesor del Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias, UNAM.*

Nos parece claro que la elaboración de los planes de estudio de Matemática para la escuela secundaria es una tarea conjunta de profesores y de matemáticos dedicados a la investigación. De hecho, a no ser que se quiera enseñar otra cosa, y no la Matemática tal y como la entienden actualmente los matemáticos, su participación es indispensable. A ellos toca, debido a su experiencia, indicar los puntos ya obsoletos, sugerir renovaciones necesarias y determinar los objetivos a lograr a largo plazo. La Matemática brasileña alcanzó ya suficiente madurez para determinar, de manera independiente, los caminos que más nos convienen.

Es necesario destacar la indispensable participación del profesor en la elaboración de estos proyectos. Su experiencia indicará las modificaciones necesarias para transformarlos en realidad, tomando en cuenta las condiciones brasileñas.

La elaboración de planes de estudio es, por tanto, una tarea a largo plazo. Debe ser precedida de consideraciones generales sobre la enseñanza de la Matemática que, desde nuestro punto de vista, se aplican a todos los grados. Es en este nivel que se sitúa nuestra colaboración en el presente debate.

Probablemente la razón fundamental para introducir Matemática en la enseñanza básica, reposa en el hecho de que nos proporciona instrumentos efectivos



Necedades sobre el conjunto vacío para niños

para comprender y actuar en el mundo que nos rodea. Esta actitud de resolver problemas propuestos por el mundo real está en la base misma de la creación de la Matemática y ha sido una fuente de inspiración y renovación de sus métodos. Tal vez convenga mencionar que la palabra problema será utilizada en un sentido amplio, tanto puede significar obtener un método que permita determinar la distancia de la Tierra a la Luna, como intentar probar que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro no se puede expresar como el cociente de dos enteros. Se puede decir, sin exageración que las estructuras más abstractas en Ma-

¿Bourbaki para niños?

temática fueron creadas para resolver problemas y que el grado de validez y permanencia de una estructura se mide por la multiplicidad de problemas que permite atacar. Estos problemas, conviene repetirlo, no son necesariamente aplicables, pero tienen sus orígenes y motivación en cuestiones propuestas por el mundo real y sus soluciones reflejan una mejor comprensión de este mundo. Esta es la Matemática de Arquímedes, Gauss, Rieman y Poincaré y de la cual queremos y debemos transmitir una parte a nuestros alumnos.

De las razones anteriores, que pertenecen a la naturaleza misma de la Matemática, se deduce que la mejor manera de enseñarla es a través de problemas. Los conceptos que se introduzcan serán aquellos indispensables para la comprensión y solución de los problemas propuestos y que ilustran sus relaciones con otros problemas y conceptos ya estudiados. Una comprensión clara de los hechos y la habilidad de usarlos adecuadamente debe tener preferencia sobre la formalización. Cuando sea conveniente y posible debe utilizarse la formalización, pero siempre de manera local. Por formalización local entendemos lo siguiente: Dado un determinado asunto, admitimos ciertas premisas, que pueden haber sido demostradas en otros asuntos o que constituyen elementos intuitivos bastante obvios como para poder trabajar con ellos. Entonces se explicitan todas las definiciones y se demuestran todas las proposiciones a partir de estas premisas.

Uno de los más grandes mal entendidos en la enseñanza de la Matemática proviene de adoptar los libros de Euclides, o pequeñas modificaciones de ellos, en la enseñanza de la Geometría. De entrada debemos absolver a Euclides de toda o cualquier culpa en el asunto. Euclides escribió sus libros con una finalidad metodológica, no didáctica. La formalización global que obtuvo del volumen de hechos geométricos conocidos hasta entonces, fue la obra de un genio, que mejor comprendían filósofos y pensadores que jóvenes estudiantes. En oposición a Arquímedes, que usaba una combinación de formalización local y métodos heurísticos y cuyas técnicas de investigación contienen el germen de una forma de enseñanza más efectiva, fue la obra de Euclides la que se tomó como modelo didáctico. Las consecuencias desastrosas de este hecho se hacen sentir hasta hoy.

Queremos dejar bien claro que la contribución metodológica de Euclides es enorme. Se mostraba por primera vez la posibilidad de una formalización global que, aún con defectos, levantaba la esperanza de extender la idea de formalización a toda la Matemática y, quién sabe, a toda la Ciencia. Hoy parece cada vez más claro que la formalización absoluta de la Matemática es un ideal inalcanzable que debe ser abandonado. Sea como fuere, las formalizaciones locales relativamente amplias tuvieron un éxito considerable en la Mecánica, en ciertas ramas de la Física Teórica, en el Algebra, etc. y la inspiración para esto se debe, indiscutiblemente a Euclides.

Desde el punto de vista didáctico, por ejemplo, el problema fundamental es que la presentación formal de la Matemática, en la mayor parte de los casos, esconde y disimula los mecanismos de creación. Solamente los alumnos muy bien dotados tienen la capacidad de apreciar este tipo de presentación, y éstos se transformarán en matemáticos sin que tengamos que preocuparnos por ellos. El alumno medio, con poca experiencia en Matemática (y éste es el caso que nos interesa aquí), tiene una profunda dificultad en seguir largas formalizaciones. La tendencia es reaccionar con disgusto y miedo, o aceptándolas como un dogma, con grandes perjuicios para su imaginación creadora.

Incluso para aquellos que van a transformarse en matemáticos, y nuestra experiencia en IMPA es bien ilustrativa, el exceso de formalización puede fácilmente transformarse en un freno al proceso creador. El objetivo de la Matemática es, debemos repetir, resolver problemas. Simples, en el caso de enseñanza, complejos e incluso abiertos en el caso de la investigación. En cualquiera de los dos casos la intuición y la imaginación creadora desempeñan un papel fundamental y la formalización es apenas un elemento auxiliar. En este sentido el espíritu de Arquímedes es mucho más adecuado para la Matemática actual que el espíritu de Euclides.

Conviene en este momento llamar la atención a una falacia frencuente que consiste en confundir pensar correctamente con pensar axiomáticamente. En Matemática, como en todo lo demás, es necesario pensar correctamente. No hicieron otra cosa los matemáticos ilustradores del pasado como Gauss, Riemann y Poincaré, que nos legaron el inmenso edificio del que hoy disponemos, sin utilizar el método axiomático.

Esta falacia es tanto más grave por estar presente, de manera implícita, en una cierta actitud en relación con la enseñanza de la Matemática que se autodenomina Matemática Moderna. Dejando a un lado lo impropio del término los lla-

Enfrentar los problemas

Arquímedes (c. 287-212 A. C.)

Henry Poincaré (1854-1912)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

maré "modernistas", y creo no cometer injusticia al definir, según Papy, la Matemática Moderna como la enseñanza de la Metemática mediante las estructuras fundamentales. Estructuras fundamentales fue un término creado por la escuela Bourbaki para designar ciertos conceptos lógicamente simples (grupo, orden, topología) que aparecen reiteradamente en la formación de conceptos matemáticos lógicamente complejos (aunque intuitivamente más simples). Según las afirmaciones del Psicólogo Jean Piaget, las estructuras fundamentales corresponden a ciertas categorías básicas del pensamiento humano. Partiendo de estas premisas, los "modernistas" suscriben que la Matemática debe enseñarse a partir de las estructuras fundamentales. La comprensión explícita de estas estructuras facilitaría enormemente el proceso de aprendizaje de todo el resto, que discurriría de manera natural. En resumen, un Bourbaki para niños.

Ahora bien, como todos saben, Bourbaki es un descendiente directo de Euclides. En su libro "Elementos de Matemática" publicado en la década de los 40 la escuela Boubarki intentó, según sus propias palabras, "tomar la Matemática desde su inicio" y reconstruirla entera a partir de las estructuras fundamentales. Sería una extensión de la formalización de Euclides, con las correcciones necesarias, a toda la Matemática. Como bien lo saben todos los matemáticos que trabajan en investigación, falló el planteamiento global del proyecto. Las áreas más representativas de la Matemática actual no tendrían cabida en la filosofía del proyecto inicial.

Así como en el caso de Euclides, la influencia metodológica del proyecto Bourbaki fue bastante grande. Mientras que desde el punto de vista de la investigación fue prácticamente inexistente. En realidad, el vigoroso desarrollo de la Matemática en las últimas décadas se realizó en un espíritu que relega al formalismo a un segundo plano e ignora completamente la existencia de Bourbaki. Desde este punto de vista podemos afirmar que una didáctica de la Matemática que insiste en sus aspectos formales está en contradicción con el espíritu de la verdadera Matemática Moderna, esto es, la que se hace en nuestros tiempos. Dicha didáctica debe por tanto considerarse vieja y obsoleta.

El origen y motivos de las estructuras más abstractas de la matemática, son cuestionadas por el mundo real y sus soluciones reflejan una mejor comprensión del mundo.

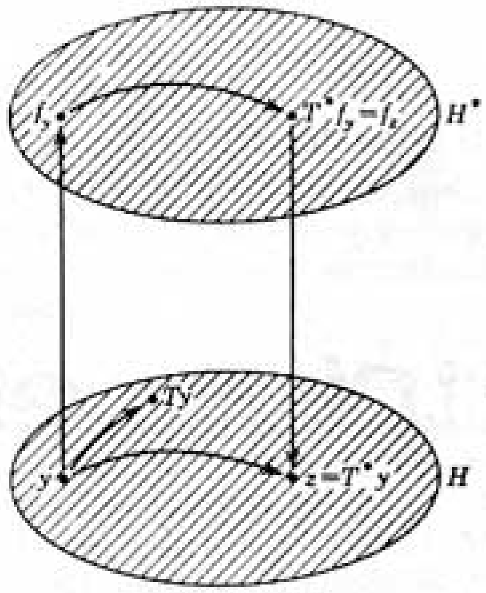
Admitida la verdad de la afirmación de Piaget, hecho discutible pero cuya apreciación nos desviaría del punto principal de esta exposición, quedan, entre otras, las siguientes objeciones a los métodos "modernistas".

1. No existe razón alguna para esperar que el hecho de explicitar verbalmente los mecanismos básicos del pensamiento ayude a su desarrollo operacional. Por ejemplo, como observó René Thom, es dudoso que el conocimiento previo de las estructuras básicas de una lengua ayude a alguien a expresarse con fluidez en esa lengua. Por el contrario, lo que sucede con más frecuencia es que el intento de colocar este conocimiento prematuro ejerce un efecto de freno en el proceso de aprendizaje. Este ejemplo se puede multiplicar para mostrar que el estudio extemporáneo de las estructuras fundamentales puede dificultar, en vez de facilitar, el aprendizaje de la Matemática.

2. Las estructuras fundamentales representan un largo proceso de elaboración a partir de elementos que nos proporciona el mundo real. Por ser lógicamente más simples, necesitan de una mayor formalización para su tratamiento. Ahora bien, el espíritu de formalización es precisamente la antítesis del espíritu de la Matemática actual y sería curioso que quisiéramos modernizar nuestros planes de estudio con ideas que se están volviendo obsoletas.

3. Como ya observamos, los modernistas confunden rigor sustancial con rigor formal. Aclaremos con un ejemplo. Supongamos que unimos por una recta dos puntos de un plano, uno en el interior de una elipse en ese plano, y otro en el exterior. La afirmación de que la recta en cuestión cruza la elipse es sustancialmente rigurosa. Es posible formalizar una demostración de esta afirmación pero en este caso sería inútil. En el contexto de un trabajo de investigación, dicha demostración sería una pedantería. En el contexto de la enseñanza básica, la demostración sería enfadosa y desviaría la atención hacia puntos que no son relevantes en la cuestión.

El rigor formal tiene un cierto papel a desempeñar en la Matemática, pero aplicarlo en situaciones como las anteriores revela una falta de comprensión de la naturaleza de la Matemática. De hecho, el rigor formal absoluto de una teoría puede alcanzarse con total ausencia de



Hay temas de álgebra lineal que se pueden enseñar desde secundaria y que desarrollan el sentido de investigación.

significado de los elementos de la teoría. Dicha teoría sería un conjunto de proposiciones de la forma "p implica q", donde nada sabemos sobre p o sobre q, y ni siquiera si q es cierta; sólo garantizamos que q se deduce de p según las reglas de una cierta lógica. Como dice Bertrand Russell, es una toría de la cual no sabemos de lo que estamos hablando ni si lo que estamos diciendo es verdad. Sería curioso especular sobre el nivel de demencia instalado en la Matemática si hubiera seguido esta dirección de rigor formal absoluto. Mientras tanto, el rigor formal y el tipo de rigor que los modernistas quieren transmitir a sus alumnos, y su ausencia, es la mayor crítica que ellos hacen a los otros sistemas de enseñanza.

Finalmente las distorsiones de las mismas ideas modernistas en manos inexpertas han conducido a la situación actual de la enseñanza de la Matemática Moderna en Brasil, donde se da énfasis a las trivialidades de manejar conjuntos, se insiste en expresiones lingüísticas irrelevantes, y se estimula la mediocridad a través de ejercicios rebuscados sobre el conjunto vacío. Aunque fuese válida la posición modernista (e insistimos que es inadecuada y obsoleta), su aplicación en Brasil resultó, con raras excepciones, un completo caos. Ha llegado el momento de abandonar estas posiciones y estructurar una enseñanza compatible con la Matemática actual y más adecuada con la realidad brasileña.

Sin embargo esto no significa que aboguemos por un retorno a la enseñanza tradicional de la Matemática. Es absolutamente necesaria una renovación de los planes de estudio y en la manera de enseñar. En un mundo lleno de computadoras, naves espaciales y modelos estadísticos, es indispensable que la enseñanza de la Matemática refleje esta nueva realidad y ayude a comprenderla.

Pero este cambio debe realizarse tranquilamente, sin euforias exageradas o con promesas irrealizables. Es esencial que el cambio obedezca a dos principios básicos. Primero, que el material enseñado sea útil para comprender el mundo que nos rodea. Segundo, que pueda efectivamente transmitirse en las condiciones brasileñas.

De poco nos servirá copiar planes de estudio americanos, belgas o franceses si el conjunto de profesores que tenemos no permite aplicarlos. Los cambios deben proyectarse de manera lenta y progresiva, de modo que permita a los profesores adaptarse continuamente a nuevas condiciones.

A manera de ejemplo mencionaremos algunos tópicos que probablemente puedan incluirse en la enseñanza de primer grado. Uno de los que representan un cambio en los planes de estudio tradicionales es la introducción del Algebra Lineal en dimensión dos: sistemas de coordenadas, vectores y rectas en el plano, sistemas de ecuaciones lineales, matrices de 2 x 2 y programación lineal. Está claro que estos temas no deben presentarse de manera estéril en un simple orden lógico. Se deben motivar con problemas y se deben aplicar cada vez que sea posible. La programación lineal puede dar origen a, o ser motivada por, pequeños proyectos de investigación realizados por equipos. La distribución de los temas a lo largo del programa debe obedecer principalmente a las exigencias de motivación y oportunidad.

La idea de linealidad es básica en la Matemática actual. La introducción implícita de esta idea en la enseñanza del primer grado es útil y, si es posible, debe realizarse.

Otro ejemplo que demanda modificaciones en los planes de estudio tradicionales es el estudio cuidadoso (no por ello formalmente riguroso) de los números naturales, enteros y racionales. Para comprender el paso de los números naturales a los números enteros es necesario el estudio de las propiedades formales de las operaciones con los números naturales (conmutatividad, asociatividad, distributividad). En realidad la única explicación natural de que $(-1)(-1)=1$, es que queremos mantener, en los números enteros, las propiedades formales de las operaciones con los números naturales. En este caso se justifica plenamente el estudio explícito de estas propiedades. De manera general una guía indispensable para construir todo el campo numérico es mantener las propiedades de las operaciones; esto refuerza la importancia del estudio explícito de las propiedades mencionadas.

Otros ejemplos incluyen la trigonometría del triángulo rectángulo, cuya multiplicidad de aplicaciones la convierte en un instrumento ideal en este nivel, y el lenguaje de la teoría de los conjuntos. Dado su carácter trivial este lenguaje debe introducirse cuando sea necesario y sin ningún énfasis particular.

Como ejemplo final nos gustaría mencionar la Geometría Euclidiana. Consideramos que la Geometría básica de rectas, triángulos, polígonos y círculos se debe enseñar de manera sintética esto es, mediante figuras y construcciones geométricas. El contenido intuitivo de la Geometría Euclidiana hace de este tema uno de los más ricos del plan de estudios del primer grado. No es razonable que las meras objeciones de rigor formal sean motivos para sustraer a los alumnos de las aplicaciones y de los desafíos de imaginación que proporcionan los métodos geométricos. De acuerdo con el gusto de los alumnos se pueden introducir métodos analíticos auxiliares. Sin embargo los métodos geométricos no deben abandonarse jamás.

Para concluir con estas consideraciones me gustaría enfatizar en el carácter aplicado y computacional que debe tener la enseñanza de las Matemáticas en el primer grado. Es a través de este contacto con la realidad más inmediata que el alumno aprende a sentir el vigor de la Matemática y comienza a comprender el papel que desempeña en la construcción del mundo que ve a su alrededor. Esta comprensión de la fuerza y las limitaciones de la Matemática es esencial para que él pueda juzgar cosas simples de su existencia, tales como el valor de la computadora o de los resultados de una encuesta de opinión.

La obra de Euclides la comprendían mejor los filósofos y pensadores que jóvenes estudiantes, su finalidad es metodológica no didáctica.