¿Ignoramus et ignorabimus?

Carlos Torres Alcaraz

En agosto de 1900 David Hilbert dictó una conferencia ante el pleno del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en la ciudad de París. El título de la misma era muy simple: "Problemas matemáticos", un tema apropiado para el cambio de siglo.[1] En ella, Hilbert emprendió la defensa de una convicción que le acompañó durante toda su vida: que todo problema matemático es susceptible de una solución exacta. Éste fue el punto de partida de sus subsecuentes reflexiones acerca del futuro de las matemáticas.

Hilbert había pensado en esta cuestión durante mucho tiempo. Antes del Congreso dudó entre abordar este tema o la relación entre las matemáticas y la física, un punto que Poincaré había contemplado tres años atrás. Su decisión final la tomó con base en una sugerencia de Minkowski: "sería más atractivo mirar hacia el futuro, enumerando una lista de problemas en los que los matemáticos habrían de ponerse a prueba durante el siglo venidero".[2] Se trata quizá de la conferencia más renombrada en la historia de las matemáticas. Tras precisar las exigencias que toda buena solución debe satisfacer, en la parte final presentó y analizó su famosa lista de 23 problemas individuales cuya resolución, pensaba, contribuiría al avance de las matemáticas en el siglo XX.[3]

La convicción de Hilbert

En un encendido pasaje, Hilbert parte de la sugerencia de Minkowski para adentrarse en nuestro anhelo por anticipar el futuro:

[1] David Hilbert, "Mathematical Problems" (trad. de Mary Winston Newson), en *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 28. American Mathematical Society, 1976, pp. 1-34.

[2] Véase Constance Reid, *Hilbert*. Nueva York, Springer-Verlag, 1970, p. 69.

[3] Véanse Felix E. Browder, ed., *Mathematical developments arising from Hilbert problems* [Proc. Symp. Pure Math.], vol. 28. Providence, American Mathematical Society, 1976 y Jean-Michel Kantor, "Hilbert's Problems and their Sequels", en *The Mathematical Intelligencer*, vol. 18, núm. 1, 1996. En cuanto a las exigencias para las buenas soluciones, la más importante es —dice Hilbert— "su exposición metódica y sistemática".

> ¿Quién de nosotros no se alegraría al descorrer el velo que oculta al futuro, y lanzar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo en los siglos venideros? ¿Hacia qué metas específicas tenderán los espíritus matemáticos más preeminentes? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos en el amplio y fértil terreno del pensamiento matemático traerán consigo los nuevos tiempos? [...] Pues el cierre de una gran época no sólo nos invita a mirar hacia el pasado, sino a dirigir nuestros pensamientos hacia el futuro.[4]

Para Hilbert, una manera de mirar hacia el futuro de las matemáticas es a través de sus problemas. De hecho, cada etapa de su historia se caracteriza por ciertos problemas que estimularon la creación de nuevos métodos, y por algunos otros que no se pudieron resolver. "Es mediante la solución de problemas que el investigador pone a prueba el temple de su acero; encuentra nuevos métodos y nuevos discernimientos, y gana un horizonte más amplio y libre".[5] Los problemas matemáticos pueden provenir de cualquier parte, pero una vez que ingresan al dominio de la matemática se les debe resolver mediante el razonamiento puro, sin otra ayuda que la de la lógica y la imaginación. Esto, dice Hilbert, marca la diferencia entre las matemáticas y el resto de las ciencias.

Obviamente, puede suceder que al tratar de resolver un problema, todos los intentos estén condenados al fracaso, no por falta de destreza o inventiva, sino porque las hipótesis adoptadas son insuficientes para decidir la cuestión. En este caso el problema aparecerá, visto desde la teoría a la que pertenece, como un reto insuperable. Hilbert propone en tal caso recurrir a un procedimiento en el que confía plenamente: probar que las hipótesis admitidas son insuficientes para zanjar la cuestión. En este último caso, la "disolución" del problema se lograría en un segundo nivel, en el que el razonamiento no es acerca de los objetos de la teoría, sino acerca de la teoría misma.[6] Así, de acuerdo con Hilbert, dado un problema matemático siempre es posible (a) resolverlo con los recursos disponibles en la teoría, o (b) demostrar que los axiomas y métodos de prueba admitidos en la teoría no son suficientes para decidir la cuestión, es decir, que todos los intentos por hallar una respuesta al interior del sistema están condenados al fracaso.

Es importante señalar que para muchos matemáticos esta última posibilidad no representa una solución al problema mismo. Por ejemplo, desde 1963 sabemos que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos, lo cual para muchos matemáticos no resuelve en sí la cuestión

[4] D. Hilbert, "Mathematical Problems", en *op. cit.*, p. 1.

[5] *Idem*.

[6] Desde la antigüedad los matemáticos han ofrecido pruebas de imposibilidad. Por ejemplo, la prueba de que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado. No obstante, fue la matemática moderna la que introdujo esta forma de razonamiento en la práctica ordinaria, superando en forma inesperada viejos y difíciles problemas que habían resistido a todos los intentos de solución dentro de la teoría. Por ejemplo, la trisección del ángulo, la rectificación del círculo y la duplicación del cubo con regla y compás; la solución de cualquier ecuación de quinto grado por medio de radicales y la prueba del quinto postulado de Euclides. Todos estos problemas fueron resueltos de manera inesperada: mostrando que con los medios seleccionados no es posible darles solución.

acerca de la cardinalidad del conjunto de los números reales. Tal como lo advierte Kurt Gödel: "[...] sobre la base del punto de vista aquí admitido, una prueba de la indecidibilidad de la conjetura de Cantor con relación a los axiomas adoptados para la teoría de conjuntos [...] de ninguna manera resuelve el problema".[7] El punto de vista referido es el del realismo conceptual, según el cual "los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describen una realidad bien determinada, en la que la conjetura de Cantor debe ser falsa o verdadera. Por tanto, su indecidibilidad a partir de los axiomas hoy asumidos sólo puede significar que estos axiomas no contienen una descripción completa de esa realidad".[8] No obstante, para Hilbert, que en estas cuestiones adopta un punto de vista muy cercano al nominalismo, la alternativa recién mencionada (a o b) agota todas las posibilidades: dado un problema matemático, alguna de ellas se habrá de alcanzar, de modo que tarde o temprano se aclarará la relación lógica entre la proposición matemática ("el problema") y los principios admitidos. Más allá de esto, diría Hilbert, la matemática no puede ni debe intentar ir: un "no" rotundo al realismo conceptual.

> Es quizá este importante hecho junto con otras razones filosóficas lo que da lugar a la convicción (compartida por todos los matemáticos, aunque sin el soporte de una prueba) de que todo problema matemático bien definido es susceptible necesariamente de una solución, ya sea en la forma de una respuesta efectiva a la pregunta propuesta, o mediante una prueba de la imposibilidad de su solución, y por tanto del irremediable fracaso de todos los intentos. [...] ¿Es el axioma de la resolubilidad de todo problema matemático una característica peculiar del pensamiento matemático, o es acaso una ley general inherente a la naturaleza de la mente, el que toda cuestión que se pregunta debe tener una respuesta?[9]

Vista desde la matemática, esta convicción, que Hilbert eleva al rango de axioma, parece un factor prevaleciente a lo largo de la historia, y en última instancia la causa de nuestra persistencia al tratar de resolver un problema matemático, en vez de retroceder ante los fracasos. Vehemente, exclama: "La convicción en la resolubilidad de todo problema matemático es un incentivo para el trabajador. Escuchamos dentro de nosotros el canto imperecedero: he ahí un problema. Busca su solución. La podrás encontrar mediante la razón pura, pues en la matemática no hay *ignorabimus*".[10] Es sobre esta base que Hilbert postula la resolubilidad de todo problema matemático: tarde o temprano cualquier cuestión matemática será resuelta en el sentido recién señalado.[11]

[7] Kurt Gödel, "What is Cantor's continuum problem?", en Paul Benacerraff y Hilary Putnam, comps., *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*. 2a. ed. Cambridge, Massachusetts, Universidad de Cambridge, 1964, p. 263.

[8] *Idem*.

[9] D. Hilbert, "Mathematical Problems", en *op. cit*., p. 7.

[10] *Idem*. *Ignorabimus* = ignoraremos. En latín en el original.

[11] En cuanto al axioma de la resolubilidad de todo problema matemático, lo correcto es ubicarlo en un contexto kantiano, tal como lo sugiere Michael Detlefsen en "FOM: Hilbert and solvability, etc.", http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/1999-June/003272.html. Kant, al igual que Hilbert, considera que una prueba de la imposibilidad de resolver un problema con los métodos y principios elegidos es

Una contienda filosófica

En la cita anterior, Hilbert utiliza la expresión *ignorabimus* en alusión al fisiólogo y filósofo francés Emile DuBois-Reymond (1818-1896), quien al abordar el problema de la existencia de límites en el conocimiento de la naturaleza sostuvo que hay problemas, denominados por él *trascendentales*, que son irresolubles; éstos incluyen la naturaleza de la materia y la fuerza, y todo lo relacionado con el origen del movimiento, la sensación y la conciencia. Su desalentadora frase "*Ignoramus et ignorabimus*" —Ignoramos e ignoraremos—, se convirtió en el lema de muchos científicos y filósofos en los años ochentas del siglo XIX, y una equivocación, desde el punto de vista de Hilbert. En franca oposición, Hilbert no sólo afirma que todo problema matemático se puede resolver, sino que extiende esta creencia a toda la ciencia.[12] En su discurso de retiro a los 68 años de edad sostuvo, tal como lo había hecho 30 años atrás, que no existe tal cosa como un problema irresoluble. Sus palabras finales dan testimonio de su irrefrenable optimismo:

> Alguna vez el filósofo Comte dijo —con el propósito de mencionar un problema ciertamente irresoluble— que la ciencia nunca podría descubrir el secreto de la composición química de los cuerpos celestes. Unos pocos años más tarde este problema fue resuelto mediante el análisis espectral de Bunsen y Kirchhoff [...] La verdadera razón por la cual Comte no pudo hallar un problema irresoluble es, en mi opinión, que no hay en absoluto problemas irresolubles. En lugar del necio *ignorabimus*, nuestra respuesta es la contraria: Debemos saber, sabremos.[13]

Este credo no fue compartido por todos sus coetáneos. Por ejemplo, L. E. J. Brouwer, una de las fuerzas motrices del intuicionismo matemático en el siglo XX, a la vez que niega la universalidad del principio lógico del tercero excluido, sostiene con firmeza que éste es equivalente a la suposición de que todo problema matemático es resoluble, y afirma: "En cuanto a la convicción a veces expresada de que no hay problemas matemáticos irresolubles, no existe en nuestros días ni siquiera una sombra de su prueba".[14]

también una forma de resolverlo (véase Kant, *CRP*, A476/B504 y A480/B508). Al respecto, es importante notar que en tal caso la "solución" no se obtiene a través de una prueba al interior de la teoría, sino a través del análisis de las condiciones bajo las cuales se le intenta probar o refutar. En otras palabras, Kant y Hilbert aceptan como "solución" de un problema lo que en filosofía se conoce como una *solución trascendental*, y en lógica como una *prueba de indecidibilidad*. Como ya lo hemos señalado, esta postura no es compartida por los defensores del realismo conceptual.

[12] Es importante señalar que Hilbert jamás intentó probar esta afirmación más allá de la matemática. No obstante, el solo hecho de mencionarla es un indicativo de la firmeza de sus convicciones.

[13] D. Hilbert, "Logic and the Knowledge of Nature", en William B. Ewald, comp., *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. 2 vols. Trad. de W. B. Ewald. Oxford, Clarendon, 1996, p. 1 165. Las últimas palabras de la cita —Debemos saber, sabremos [*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*]— son el epígrafe que se halla sobre la tumba de Hilbert.

[14] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *E. J. Brouwer Collected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Trad. de Arend Heyting. Ámsterdam, North Holland, 1975, p. 21.

Brouwer recrimina a Hilbert el no apoyar su creencia con una prueba. Para entonces (1908) Hilbert se hallaba inmerso en el estudio de las ecuaciones integrales y la física teórica, así que el reto tuvo que esperar por casi una década para ser aceptado. Antes de ir a los detalles, hay dos importantes observaciones por hacer:

1. Tal como lo advierte Brouwer, la creencia de Hilbert en la resolubilidad de todo problema matemático no tenía a la sazón ningún fundamento teórico. Más bien, se trataba de una visión metafísica, de una especulación: en el dominio de la matemática, la razón pura no conoce límites. Esta fe en el poder de la razón sólo es comparable a la de Leibniz y es superior a la de Descartes. Un pensamiento muy en la línea racionalista de la filosofía occidental: los productos de la mente son trasparentes a ella misma, es decir, no hay cuestiones irresolubles en este dominio.

2. Como hemos visto, para Hilbert son dos las maneras de resolver un problema: una, razonando *dentro* de la teoría; la otra, razonando *acerca* de la teoría. Por tanto, su creencia se apoya decididamente en la convicción de que la estructura de toda teoría matemática es algo que podemos descubrir, sin dejar nada oculto con relación a su orden lógico-demostrativo.[15] En otras palabras: para Hilbert, el camino seguro para resolver un problema matemático fluctúa entre la teoría y la metateoría.[16]

La teoría de la demostración

Finalmente, en 1917 Hilbert retomó públicamente la cuestión de los fundamentos de la matemática cuando, en una conferencia dictada ante la Sociedad Matemática de Suiza, señaló la necesidad de investigar la demostración matemática a fin de establecer los fundamentos de esta ciencia.[17] Éste fue el inicio de un periodo de intensa actividad en esta área, donde su principal preocupación era probar la consistencia de la matemática clásica.[18] Aun así, la cuestión de la resolubilidad de todo problema matemático siguió ocupando un lugar importante en sus planes.

Según Hilbert, el problema de los fundamentos de la matemática clásica quedaría resuelto al probar que está libre de contradicciones, es decir, demostrando su consistencia. Ésta era la principal razón por la cual se concentró en el estudio de la demostración matemática. Con este propósito fue que propuso convertir cada demostración en un arreglo estructurado de fórmulas que pudiera exhibirse en concreto y examinarse en todas sus partes, para lo cual era necesaria la formalización. Dentro de este nuevo enfoque, el problema de la resolubilidad, planteado inicialmente con cierta vaguedad

[15] Véase D. Hilbert, "The Foundations of Mathematics", en Jean van Heijenoort, comp., *From Frege to Gödel*. Trad. de Stefan Bauer-Mengelberg y Dagfinn Føllesdal. Cambridge, Massachusetts, Universidad de Harvard, 1967, p. 475.

[16] La única expresión que Hilbert utiliza con el prefijo "meta" es "metamatemática". No obstante, la palabra "metateoría" se ajusta perfectamente a sus intenciones en este caso.

[17] Véase D. Hilbert, "Axiomatisches Denken", en D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3. Berlín, Springer Verlag, 1935, pp. 146-156.

y más cercano a la especulación filosófica que a la matemática, se transformó en un tema de investigación formal. Ahora el estudio de la estructura deductiva de las teorías matemáticas pasaba por los siguientes conceptos: *cálculo lógico* (la misma noción que la de *sistema formal* en la lógica matemática), *inferencia formal*, *prueba formal*, *consistencia* y *completud*.[19] Hilbert denominó esta empresa *teoría de la demostración*. Su principal objetivo era probar, con métodos finitistas, la consistencia de la matemática clásica.[20] En cuanto al tema que nos ocupa, Hilbert advierte: "Ciertamente, la teoría de la demostración no puede proporcionar un método general para resolver todos los problemas matemáticos. No existe algo de ese tipo. Sin embargo, lo que sí cae dentro del campo de acción de nuestra teoría es la prueba misma de la consistencia de la suposición del carácter resoluble de todo problema matemático".[21]

Veamos qué tenía Hilbert en mente al momento de relacionar entre sí las nociones de consistencia y resolubilidad. Supongamos que se cuenta con un procedimiento para decidir si una fórmula A es consistente con los axiomas de una teoría formal $\mathfrak{I}$. Ahora, si aplicamos este procedimiento a una fórmula $\exists x p(x)$ y descubrimos que sí lo es, entonces podemos asumir la existencia de una solución para el problema expresado por $p(x)$, pues, en el peor de los casos, $\exists x p(x)$ es independiente de los axiomas de $\mathfrak{I}$, de modo que resulta imposible probar la fórmula $\neg\exists x p(x)$ o hallar un contraejemplo para $\exists x p(x)$. En tal caso se puede añadir $\exists x p(x)$ como un axioma (si no es que ya es un teo-

[18] Al parecer, un segundo incentivo para Hilbert fue que su alumno dilecto, Hermann Weyl, se convirtió al intuicionismo, un hecho que rebasó los límites de su tolerancia. Era indispensable detener esta tendencia resolviendo en forma definitiva el problema de los fundamentos.

[19] Todos estos conceptos son de naturaleza sintáctica, aunque Hilbert jamás se refirió a ellos en tales términos (el término "sintaxis" fue introducido en la lógica por Rudolf Carnap en los años treintas del siglo pasado). Por ejemplo, los conceptos de consistencia y completud considerados son los siguientes: Una teoría formal I es *consistente* si no hay una fórmula A de su lenguaje tal que A y $\neg A$ (donde "$\neg$" es el símbolo para la negación) son derivables en I; de la misma manera, I es *completa* si para cada fórmula cerrada A, o A o su negación $\neg A$ es derivable en I.

[20] *Grosso modo*, la matemática finitista es la matemática de la evidencia sensible, en la que sólo se consideran propiedades y relaciones entre objetos concretos de la experiencia sensible (signos y combinaciones finitas de signos), y sólo se toman en consideración métodos combinatorios. Esta teoría no se construye axiomáticamente, sino que se desarrolla en un plano informal sobre la base de la evidencia intuitiva.

[21] D. Hilbert, "Acerca del infinito", en Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura, comps., *David Hilbert, fundamentos de las matemáticas*. Trad. de Luis Felipe Segura. México, UNAM, Facultad de Ciencias, 1993 (Mathema), p. 108. En mi opinión, por "la suposición del carácter resoluble de todo problema matemático" debemos entender en este caso el principio del tercero excluido. Este principio establece que toda proposición matemática es verdadera o falsa. Por tanto, asumirlo respalda la idea de que todo problema tiene respuesta. Una dificultad respecto a este principio es que su validez no se puede afirmar sin más con relación a las totalidades infinitas. Piénsese, por ejemplo, en un enunciado existencial de la forma $\exists x A(x)$ relativo a los enteros positivos, donde $A(x)$ es un predicado decidible. La única manera de validar el principio en esta circunstancia sería a través de la exhibición de un caso favorable, *i. e.*, de una n tal que $A(n)$, o de una prueba que mostrara que para cada n, $\neg A(n)$. En un dominio finito esto siempre se puede lograr a través de la revisión exhaustiva de todos sus elementos. No obstante, en el caso de los enteros positivos resulta imposible llevar a cabo una tarea de esta naturaleza a fin de llegar a una conclusión negativa. Por tanto, con relación a los conjuntos infinitos nada garantiza la validez

rema) y postular, con ello, la existencia de una solución para el problema $p(x)$.[22] Ahora vemos por qué una prueba de consistencia para $\exists xp(x)$ es, para Hilbert, una manera de resolver el problema expresado por la fórmula. Hay dos observaciones:

1. Planteado de esta manera, el problema de la resolubilidad de todo problema matemático se fragmenta, debiéndose considerar en el contexto de cada teoría específica. Por otra parte, esta fragmentación reduce el problema a proporciones manejables. Cuando Hilbert abordó esta cuestión en 1900 pasó por alto que la irresolubilidad no es una cuestión absoluta, sino relativa a los axiomas adoptados. Esta noción tan abierta de resolubilidad —es decir, resolubilidad no a través de medios específicos sino a través de *cualesquiera medios imaginables*— es, por decir lo menos, cuestionable, y parece no tener ningún sentido.[23]

2. En el contexto de la teoría de la demostración, la cuestión de la resolubilidad de todo problema matemático es una cuestión precisa con relación a cada teoría específica. De esta manera, incluso ante la imposibilidad de precisar un método general para resolver todos los problemas matemáticos, Hilbert está preparado para abordar la cuestión caso por caso, investigando la estructura lógica de cada teoría. En cada situación la cuestión de la resolubilidad se convierte en un problema combinatorio relativo al sistema considerado, es decir, en un problema matemático. De esta manera, Hilbert busca dar fin a una disputa filosófica (la de la resolubilidad de todo problema matemático) no a través de la discusión verbal, sino haciendo matemáticas. Se trata, en fin, de la "matematización" de un problema filosófico.

El programa

Hacia 1925 Hilbert tenía detallado un programa cuya meta principal era "eliminar de una vez por todas la cuestión relativa a los fundamentos de la matemática".[24] Lo podemos resumir como sigue: (1) formalizar la matemática clásica; (2) probar, con métodos finitistas, que la formalización es consistente; (3) probar, si tal es el caso, que el

incondicional del principio del tercero excluido, el cual tiene el rango de una noción ideal y como tal se le debe justificar. En otras palabras, Hilbert ve en el principio del tercero excluido una idea regulativa en el sentido de Kant —una hipótesis acerca de los objetos mediante la cual damos unidad y simplicidad a nuestro pensamiento— cuya incorporación debemos justificar. Dicha justificación consistiría en una prueba de consistencia, lo cual cae dentro del campo de acción de la teoría de la demostración, tal como lo afirma Hilbert en el pasaje citado.

[22] Aquí entra en juego el "principio creativo" de Hilbert, según el cual nosotros creamos los objetos matemáticos mediante axiomas. Al respecto, véanse la correspondencia Hilbert-Frege en Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Trad. de Hans Kaal. Chicago, Universidad de Chicago, 1980, y los comentarios de Michael Detlefsen en "FOM: Hilbert and solvability, etc.", en *op. cit*.

[23] Al respecto, véase Kurt Gödel, *Collected Works. III: Unpublished Essays and Lectures*. Comp. de Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Warren Goldfarb, Charles Parsons y Robert M. Solovay. Nueva York/Oxford, Universidad de Oxford, 1995, p. 65, n. 4.

[24] D. Hilbert, "The Foundations of Mathematics", en *op. cit*., p. 464.

sistema formal es completo; y (4) hallar un método para determinar la validez (universal) de las fórmulas del cálculo de predicados. Todas estas cuestiones están relacionadas con la cuestión de la resolubilidad. Para nuestros fines, en lo que sigue será suficiente con limitarnos a la teoría de los números.

Supongamos la existencia de un sistema formal S para la teoría elemental de los números que es consistente (es decir, no puede probar una fórmulas A y su negación $\neg A$) y completo. Bajo tales circunstancias, el sistema tendría la capacidad de decidir cualquier problema matemático expresable en su lenguaje. Podríamos, por ejemplo, ordenar las pruebas formales conforme a los números de Gödel e inspeccionarlas sucesivamente, hasta hallar una prueba de la fórmula pretendida o de su negación. A causa de la completud, eventualmente llegaríamos a la prueba de una o la otra, y debido a la consistencia, una vez en posesión de la prueba de una de ellas sabríamos de la inderivabilidad de la otra, de modo que la cuestión quedaría resuelta. Por cierto, esto mostraría la existencia de un algoritmo para decidir la verdad o falsedad de cualquier fórmula perteneciente al lenguaje de S en caso de que el sistema fuera correcto (es decir, que no pudiera probar enunciados aritméticos falsos).

Si el programa hubiera tenido éxito en esta empresa, Hilbert habría podido desechar la vaga noción de "verdad", sustituyéndola por la noción exacta de teorema formal,[25] o manejar la noción de "verdad" a través de la noción (sintáctica) de consistencia, dado que en un sistema completo la consistencia es equivalente a la demostrabilidad.[26] Por otra parte, ante la falta de garantías de que la completud se podría alcanzar en general, Hilbert planteó el *problema de la decisión* (*Enthschendugsproblem*): hallar un método efectivo para decidir si una fórmula cerrada del cálculo de predicados es válida. Tal método proporcionaría un procedimiento de decisión para cualquier sistema matemático con un número finito de axiomas, como lo son las principales teorías matemáticas.[27] Hilbert vio en esto "el problema fundamental de la lógica matemática".[28]

Con relación a tales objetivos, Hilbert creyó que éstos se alcanzarían en poco tiempo. En 1928 escribió: "toda cuestión que se puede plantear dentro del marco de la teoría de la demostración [...] encuentra un respuesta única dotada de precisión matemática".[29]

[25] De hecho, Jacques Herbrand, un seguidor del programa, denomina "verdaderas" a las fórmulas que son formalmente derivables en el sistema. Véase, por ejemplo, Jacques Herbrand, "Les bases de la logique hilbertiene", en *Revue de Metaphysique et de Morale*, 1930, núm. 37, pp. 243-255.

[26] Para ver cómo se relacionan consistencia y completud, consideremos la siguiente definición debida a Hilbert: Un sistema es *completo* si al añadir a los axiomas un enunciado que no es derivable en el sistema, entonces podemos derivar una contradicción en el sistema extendido. Véase D. Hilbert, "Problèmes de Foundation des Mathèmatiques", en Jean Largeaut, comp., *Intuitionisme, et theorie de la demonstration*. Trad. de J. Largeaut. París, Librairie Philosophique J. Vrin, 1992, p. 182.

[27] Para ser más precisos: una fórmula A es derivable en el cálculo de predicados a partir de un conjunto K de axiomas, si y sólo si hay un subconjunto finito $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq K$ tal que la fórmula $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$ es válida. En símbolos, $K \vdash_{PC} A \Leftrightarrow$ existe $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq K$ tal que $\models A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow A$.

[28] Véase D. Hilbert y Wilhelm Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*. Trad. de Lewis M. Hammond. Nueva York, Chelsea Publishing Company, 1950, p. 112.

[29] D. Hilbert, "Problèmes de Foundation des Mathèmatiques", en *op. cit.*, p. 184.

La confianza de Hilbert con relación a estas cuestiones es un muestra del optimismo que siempre lo caracterizó, surgido en este caso de una ilusión: la de estar en posesión de una *lingua philosophica* (el lenguaje de la lógica de predicados) y de un *calculus racionator* (el cálculo de predicados) como aquellos soñados por Leibniz.[30]

Algunos resultados adversos

En lo que sigue nos limitaremos a algunos resultados debidos a Kurt Gödel, Alonso Church y Alan Turing relacionados con el tema.

Si bien Gödel demostró en 1929 el teorema de completud para el cálculo de predicados de primer orden,[31] un resultado en armonía con el programa de Hilbert, en 1931 asombró al mundo matemático con dos hallazgos sorprendentes: la completud no se puede alcanzar en el dominio de la aritmética; ninguna teoría consistente que contenga una formalización de la aritmética recursiva puede probar su propia consistencia.[32]

Tras los teoremas de Gödel, la posibilidad de zanjar el problema de la resolubilidad por medio de un sistema completo cayó en desgracia. En cuanto al problema de la decisión, la esperanza de una solución favorable se desvaneció gradualmente hasta que al final cedió ante la certeza de que era inalcanzable. Dicha certeza se apoya en dos resultados negativos probados por Church y Turing en 1936,[33] quienes, tras aclarar la noción de "procedimiento efectivo" (necesaria para probar tales resultados) demostraron que el problema de la decisión es irresoluble para la lógica de predicados, así como para cualquier sistema S que contenga una formalización de la aritmética recursiva.[34]

[30] En un célebre escrito, Leibniz se refiere a la creación de una *lingua philosophica* y, sobre de ella, de un *calculus racionator* que constituiría un forma cuasi-mecánica de extraer conclusiones, imaginando que, una vez en posesión de él, quienes quisieran resolver cualquier controversia filosófica sólo tendrían que tomar un lápiz y decir ¡calculemos!

[31] Podemos enunciar este resultado como sigue: *toda fórmula válida del lenguaje del cálculo de predicados es derivable en dicho cálculo*, es decir, *el cálculo de predicados es completo respecto al conjunto de fórmulas válidas* (completud semántica).

[32] Podemos enunciar estos resultados como sigue: Sea S un sistema formal que contiene una formalización de la aritmética recursiva. Si S es consistente, entonces: $G1$ (primer teorema de incompletud). Se pueden hallar enunciados aritméticos simples A pertenecientes al lenguaje de S tales que ni A ni su negación $\neg A$ son demostrables en el sistema; $G2$ (segundo teorema de incompletud). La fórmula C que expresa la consistencia de S no es derivable en S, es decir, el sistema S no puede probar su propia consistencia. Posteriores investigaciones mostraron que las fórmulas A y C en $G1$ y $G2$ son equivalentes a fórmulas del tipo $\forall\overline{a}\ \exists\overline{x}\ P(\overline{a}, \overline{x}) = 0$, donde $\overline{a}$ y $\overline{x}$ son sucesiones finitas de variables sobre los enteros positivos y P es un polinomio con coeficientes enteros. Por tanto, entre los problemas que S no puede resolver se hallan algunos de naturaleza elemental, a saber, enunciados diofantinos acerca de la existencia de soluciones para ecuaciones polinomiales.

[33] Véase Alonso Church, "An unsolvable problem of elementary number theory", en *The American Journal of Mathematics*, vol. 58, 1936, pp. 345-363, y Allan M. Turing, "Computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", en *Proceedings of the London Mathematical Society (2)*, núm. 42, 1937, pp. 230-265.

[34] Para ser más precisos, Church y Turing probaron que no hay una función recursiva f del conjunto de fórmulas del cálculo de predicados (o del sistema S) en el conjunto $\{0, 1\}$ tal que $f(A) = 1$ sí y sólo

De esta manera, las esperanzas de Hilbert por alcanzar un sistema axiomático completo para la aritmética o, al menos, un sistema incompleto pero decidible que apoyara parcialmente su credo, se redujeron a nada, y la resolubilidad de todo problema matemático pasó a depender de la posibilidad de hallar impredecibles vías de solución en un número ilimitado de casos. Por otra parte, este fracaso no refutó categóricamente la creencia de Hilbert.

La cuestión del computabilismo

Ciertamente, ni los teoremas de Gödel ni los resultados de Church y Turing aseguran la existencia de problemas absolutamente irresolubles, aunque muestran los obstáculos por superar si lo que se quiere es una respuesta favorable. Al respecto, analizaremos algunas consecuencias de los teoremas de Gödel con relación al debate en el dominio de la filosofía de la mente.[35]

En la matemática, ¿es superior el poder del pensamiento humano al de las máquinas?, para ser más precisos, ¿habrá una máquina probadora de teoremas equivalente a nuestra intuición matemática, digamos en el dominio de la teoría de los números? Estas cuestiones son el núcleo de interminables disputas desde los años treintas del siglo XX, las cuales se agudizaron tras la publicación de dos polémicos artículos, uno de Turing en 1950 y otro de J. R. Lucas en 1961.[36] Hoy en día la literatura sobre el tema está llena de apasionados ensayos en los que defensores y detractores del *computabilismo* —tendencia según la cual la mente funciona esencialmente como una máquina de Turing— tratan de resolver la cuestión más allá de toda duda, en un esfuerzo por demoler o apuntalar el último bastión de nuestro orgullo: ya no somos el centro del universo (Copérnico), ni el centro de la creación (Darwin), y posiblemente no somos dueños de nuestros actos (Freud); pero, nuestra mente, ¿es nada más que una máquina?[37]

si *A* es válida (si y sólo si *A* es derivable en *S*). Esta respuesta negativa al problema de la decisión se apoya en la *tesis de Church-Turing* (mejor conocida como *tesis de Church*), la cual, llanamente, dice que toda función aritmética efectivamente calculable (todo predicado aritmético efectivamente decidible) es general recursiva(o). Esta tesis, que se puede expresar mediante la ecuación *efectivamente calculable* (*decidible*) = *general recursiva(o)*, goza de una amplia aceptación por distintas razones y cuenta con un vasto soporte empírico.

[35] La filosofía de la mente es una rama de la filosofía que trata de la naturaleza de los fenómenos mentales en general, y del papel de la conciencia, la sensación, la percepción y el razonamiento en lo particular. Sus problemas incluyen lo relacionado con el libre albedrío, la relación mente-cuerpo, el problema de las otras mentes y el computabilismo. Al respecto, sólo tocaremos algunos aspectos de esta última cuestión y únicamente en relación con el tema que nos ocupa. Una interrogante básica en este dominio es la siguiente: ¿se puede describir el funcionamiento de la mente humana en términos algorítmicos o computacionales? Como veremos, la respuesta a esta pregunta tiene serias implicaciones con relación a la resolubilidad de todo problema matemático.

[36] Véase A. M. Turing, "Computing Machinery and Intelligence", en *Mind*, vol. LIX, núm. 236, 1950, y J. R. Lucas, "Minds, Machines and Gödel", en *Philosophy*, 1961, vol. XXXVI, pp. 112-127.

[37] Además de Turing, dos figuras importantes que sostienen o han sostenido esta tesis son Hilary Putnam y Jerry A. Fodor. El primero instauró en los años cincuentas una postura filosófica denominada

Al respecto, los teoremas de Gödel se han utilizado en muchos intentos por derribar esta tesis.[38] Aun cuando al presente sólo se han alcanzado resultados parciales en este dominio, algunos de ellos se relacionan con la cuestión de la resolubilidad.

Para ubicar el tema en su justa perspectiva, recapitulemos la relación entre las nociones de *sistema formal* y *máquina de Turing*; *grosso modo*, éstas son equivalentes. En efecto, dado que los sistemas formales son de naturaleza sintáctica, todos los procesos formales realizables en ellos los pueden llevar a cabo máquinas de Turing. Por ejemplo, dado un sistema formal S para la aritmética, es posible definir una máquina de Turing T que producirá exactamente los mismos teoremas que S. El recíproco también es cierto: dada una máquina de Turing T, es posible construir un sistema formal F cuyo conjunto de teoremas coincida con la producción de T, de modo que las nociones de *sistema formal* y *máquina de Turing* son intercambiables. En consecuencia, los teoremas de Gödel también valen para las máquinas de Turing y se pueden exponer en forma modificada como sigue. Sea M una máquina productora de teoremas para la aritmética recursiva. Si M no puede producir enunciados aritméticos contradictorios, de la forma $E \wedge \neg E$, entonces: ($G1'$) Hay enunciados aritméticos A (los cuales dependen de M) tales que ni A ni su negación $\neg A$ son producibles por M; ($G2'$) El enunciado aritmético C que expresa la consistencia de M no puede ser producido por M.

Algunos autores han visto en estos teoremas una refutación al computabilismo. Por ejemplo, Nagel y Newman[39] y Lucas[40] arguyen que la diferencia entre la mente humana y cualquier máquina consistente productora de teoremas aritméticos radica en que ésta es incapaz de producir (*probar*) algunos enunciados aritméticos que la primera puede reconocer como verdaderos (*v. gr.*, A y C en $G1'$ y $G2'$). De este modo, concluyen, la mente humana supera a cualquier computadora (o máquina de Turing) en cuanto a su capacidad para reconocer verdades aritméticas.

funcionalismo bajo el precepto de que la mente es esencialmente una máquina computadora; a la sazón, un rasgo de su pensamiento era que lo único relevante para el estudio de la cognición es el funcionamiento de la mente, no su composición material. Al respecto, Fodor sostiene algo semejante; según él, la idea central de la ciencia cognitiva es aquella de la teoría de la demostración, según la cual las relaciones semánticas, en particular las relaciones semánticas entre los pensamientos, se pueden simular mediante procesos sintácticos (aquí vemos manifestarse en toda su extensión la idea de la mecanizabilidad del pensamiento). Estos autores niegan toda importancia a las neurociencias, pues desde sus respectivos puntos de vista las propiedades neurológicas del cerebro son irrelevantes para dar cuenta de las propiedades cognitivas de la mente. Véase, por ejemplo, Hilary Putnam, *Mind, Languaje and Reality: Philosophical Papers*, vol. 2. Cambridge, Universidad de Cambridge, 1975, caps. 18-22, y Jerry A. Fodor, *The languaje of Thought*. Cambridge, Universidad de Harvard, 1975.

[38] Véase, por ejemplo, Emil Leon Post, "Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions", en Martin Davis, comp., *Basic Papers On Undecidable Propositions, Unsolvable Problems And Computable Functions*. Nueva York, Raven Press, 1964, pp. 340-417, J. R. Lucas, *op. cit.*, Roger Penrose, *The Emperor's New Mind*. Oxford, Universidad de Oxford, 1989 y R. Penrose, *Shadows of the Mind*. Oxford, Universidad de Oxford, 1994.

[39] Ernest Nagel y James R. Newman, *Gödel's Proof.* Nueva York, Universidad de Nueva York, 1958.

[40] J. R. Lucas, *op. cit*.

Precisemos el argumento de Nagel y Newman. En la demostración de su primer teorema de incompletud, Gödel construye un enunciado aritmético *A* que afirma, una vez decodificado en el metalenguaje, su inderivabilidad en el sistema. Dicho enunciado tiene la propiedad de ser verdadero si y sólo si como fórmula es inderivable en *M*. Por tanto, argumentan dichos autores, no siendo derivables *A* y *C* en *M*, pues *M* es consistente, quien esto observa reconoce en ello la verdad de ambos enunciados. *Ergo*, la superioridad de la mente sobre la máquina.

El argumento anterior parece plausible, pero hay una falla en él. Para saber que *A* y *C* son verdaderos, primero debemos probar la consistencia de *M*. De otra manera, lo único que se tendría sería el enunciado condicional "Si *M* es consistente, entonces *A* y *C* son verdaderos", de donde no se sigue sin más la verdad de *A* y *C*.[41] Ahora, es precisamente *G*2 (o *G*2') quien nos previene acerca de los obstáculos que debemos superar en este sentido: una prueba de consistencia para un sistema matemático que comprenda a la aritmética recursiva deberá ir más allá del sistema. Pero, si el sistema es suficientemente poderoso como para abarcar el 99.9% de la matemática existente (como, por ejemplo, *ZFC*), ¿deberíamos dar por sentado que tarde o temprano probaremos, nosotros los humanos, la consistencia del sistema?, es decir, ¿estamos seguros de que en cada caso hallaremos las evidencias necesarias para probar la consistencia de *cualquier* sistema matemático? Conforme a la creencia de Hilbert, tal debería de ser el caso.

Si bien los teoremas de Gödel muestran algunas limitaciones del enfoque axiomático —como, por ejemplo, su incapacidad para alcanzar ciertas metas—, es un error pensar que prueban directamente la superioridad de la mente humana sobre las computadoras. Es más, en la actualidad no está descartada la posibilidad de una máquina demostradora de teoremas equivalente a nuestra intuición matemática, es decir, de una máquina *M* (en un lenguaje apropiado) cuya producción coincida con el conjunto de teoremas que la mente humana alguna vez pudiera probar. Esto no va en contra del segundo teorema de Gödel, pues la única conclusión asequible es que la mente humana, al igual que la máquina, jamás podría probar la consistencia de *M*. En otras palabras, si la mente humana tiene las mismas capacidades matemáticas que una máquina de Turing *M*, entonces el problema aritmético que expresa la consistencia de *M* será también irresoluble para la mente. Obviamente, esto sería devastador para la creencia de Hilbert, pues habría problemas aritméticos absolutamente irresolubles para la mente humana. Es más, tales enunciados se podrían exhibir, pues serían de corte elemental. Pero en tal caso la alternativa señalada por Hilbert —resolver un problema con los recursos disponibles en una teoría o demostrar que se trata de un indecidible—, no sería exhaustiva.

En resumen: lo único que podemos concluir a partir del segundo teorema de Gödel es la siguiente disyuntiva: o bien la mente humana supera a todas las máquinas (es decir, puede decidir más cuestiones aritméticas que cualquier máquina consistente), o bien

[41] Obviamente, probar un enunciado de la forma "Si *P* entonces *Q*" no significa probar *Q*, incluso si *Q* es verdadero. Es más, en los casos relevantes la máquina *M* logra producir la fórmula $C \rightarrow (A \wedge C)$ que formaliza el condicional en cuestión (donde *A* y *C* son como en G1' y G2').

hay problemas aritméticos absolutamente irresolubles para la mente humana (donde no se excluye que ambas alternativas se cumplan).[42] De esta manera, quienes rechazan la segunda alternativa deben hallar una vía de escape al computabilismo.

Como podemos ver, los teoremas limitativos nos ofrecen una notable herramienta para explorar la cuestión del computabilismo, con la clara posibilidad de resolver un problema filosófico no mediante la discusión verbal, sino haciendo matemáticas. En ello, Gödel secundó a Hilbert.

Perspectivas

Por ahora parece distante el día en que la controversia en torno al computabilismo llegue a su fin. Al respecto, dice Hao Wang:

> Si reflexionamos en el carácter y el desarrollo de la intuición matemática tal como se muestra en la práctica de la comunidad matemática, podremos examinar con mayor cercanía la posibilidad de que nuestra intuición matemática sea (o no) equivalente en su poder al de alguna computadora. No obstante, los fenómenos relevantes son tan complejos e indefinidos que yo, por mi parte, me niego a encarar tan formidable tarea.[43]

A pesar del comentario al final de la cita anterior, fue Wang mismo quien sugirió una posible refutación al computabilismo: mostrar que la mente humana puede probar su propia consistencia.[44] A propósito de esta posibilidad, Gödel advierte que el principal obstáculo es la clarificación de la noción de *prueba absoluta*: "En vista de que [...] no tenemos claridad acerca de esta noción, sigue siendo posible que la consistencia de la intuición matemática no sea una proposición, o al menos que esto no sea evidente".[45]

La falta de claridad en torno a la noción de prueba absoluta se hace evidente una vez que enfrentamos las paradojas intencionales, que muestran nuestra deficiente comprensión de la misma. Tenemos, por ejemplo, la proposición "Esta proposición no es demostrable", la cual destruye el uso reflexivo de la noción de prueba. Éste es el punto detrás de la propuesta de Gödel: si hemos de refutar al computabilismo, primero debemos hallar una solución a las paradojas que comprenden la noción de prueba,

[42] Véase Hao Wang, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge, Massachusetts, MIT, 1996, p. 185. Respecto a la alternativa anterior, algunos autores la miran con desestima o indiferencia. Por ejemplo, en un comentario a un escrito de Gödel, George Boolos afirma que a él no le sorprende la posibilidad de verdades matemáticas a las que no se les pueda dar una prueba comprensible por los humanos. Véase George Boolos, "Note to 1951*", en K. Gödel, *Collected Works*, *vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, p. 294.

[43] H. Wang, *op. cit.*, p. 185.

[44] Véase H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*. Londres, Routledge and Kegan Paul, 1974, pp. 317-321.

[45] *Apud* H. Wang, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, p. 188.

con la esperanza de lograr una prueba de consistencia con los medios retenidos.[46] Su razonamiento se basa en una analogía. Como sabemos, una vez definida la noción de "procedimiento efectivo" mediante el concepto de función recursiva o sus equivalentes, fue posible probar algunos resultados en torno a lo que se puede y no se puede resolver mediante algoritmos (*v. gr.*, la ya mencionada respuesta negativa al problema de la decisión). En forma análoga, si se tuviera una definición precisa de la noción de prueba (es decir, una noción *absoluta*), que por ahora sólo se ha definido con relación a teorías específicas, podríamos establecer resultados generales acerca de lo que se puede y no se puede probar, y ver de manera directa (ésta es la esperanza de Gödel) que el dominio de "lo demostrable" no encierra contradicciones.[47]

Esto, por supuesto, no probaría que todo problema matemático es resoluble, pero mantendría viva la creencia de Hilbert (a la que Gödel se adhiere, aunque por otras razones). Obviamente, la vía sugerida por Gödel debe superar algunos obstáculos. Por ejemplo, debe hacer frente a la incompletud de todo formalismo y a la paradoja de Richard, que excluye ciertas formas de definir la noción de prueba en un sentido absoluto. Al respecto, Gödel considera que esto se podría lograr definiendo la noción de prueba de manera no constructiva. Hasta donde sabemos, nada se ha logrado en esta dirección.

Otra línea de pensamiento en contra del computabilismo es la de Roger Penrose, quien en cierto sentido sigue a Lucas. En un par de libros polémicos,[48] Penrose se apoya en los teoremas de Gödel y la física cuántica para defender la tesis de que el funcionamiento de la mente no se puede describir en términos computacionales. Al igual que Gödel, cree que la matemática trata con verdades eternas relativas a un mundo intangible, del que en principio ninguna parte quedaría fuera del alcance de nuestro conocimiento. En su opinión, la correcta lectura de los teoremas de incompletud es que la verdad matemática no se puede determinar mediante reglas creadas arbitrariamente por los humanos, y que el entendimiento humano va más allá de los argumentos formales y los procedimientos computables.[49] En cuanto a este último punto, confía en que la mecánica cuántica proporcionará los elementos necesarios para establecer de manera indubitable que en el funcionamiento del cerebro intervienen procesos físicos aleatorios y, por lo mismo, no computables, de modo que su tesis tendría el apoyo de la fisiología del cerebro. Obviamente, hoy en día la propuesta de Penrose no es más que una línea de investigación.

Justo en el extremo opuesto tenemos a Robin Gandy, quien, en franca oposición a Gödel, Lucas y Penrose, sostiene que eventualmente no habrá ninguna diferencia

[46] Véase *idem*. Por supuesto, puede ser que nuestra intuición matemática sea inconsistente; no obstante, en tal caso el problema de "resolubilidad" de todo problema matemático sería trivial.

[47] Desde nuestro punto de vista, la noción de *prueba absoluta* es tan sólo una idea en el sentido que Kant le da a este término. Por tanto, lo que Gödel propone es alcanzar un mejor entendimiento de la misma a fin de convertirla en un concepto.

[48] R. Penrose, *The Emperor's New Mind* y *Shadows of the Mind*.

[49] Véase R. Penrose, *Shadows of the Mind*, p. 418.

esencial entre lo que el intelecto humano y las máquinas pueden hacer en el dominio de la matemática.[50] Discípulo de Turing, Gandy cree que todos esos elementos no algorítmicos del pensamiento matemático que podemos agrupar bajo el nombre de "chispa divina" (*divine spark*), tan utilizados en contra del computabilismo, serán simulados adecuadamente por las máquinas de la enésima generación. En este contexto, por "chispa divina", Gandy entiende la clase de discernimientos que entran en juego en la matemática cuando, por ejemplo, decimos "¡Oh!, ya veo como va", o cuando se nos vienen a la mente cosas como "no estaría bien si..." o "esto se asemeja (o me recuerda) a..."[51] Estas vías de pensamiento, afirma, no son estrictamente algorítmicas, no porque sea imposible mecanizarlas, sino porque son falibles. Así, si una máquina pudiera llevar a cabo procesos similares a los recién señalados, sería imposible probar la no mecanizabilidad: tanto la máquina como el matemático humano se hallarían en una situación similar, pudiendo llegar a resultados verdaderos mediante procesos que en un principio parecen no mecanizables.[52] En cuanto al futuro, sostiene que en cincuenta o cien años todo esto será simulado adecuadamente mediante procesos aleatorios, y que habrá máquinas que en algunas áreas de la matemática serán consideradas por los matemáticos como valiosos colegas (y no meros asistentes).[53] De esta manera, la pretendida superioridad de la mente humana sobre las máquinas sería negada por la simple existencia de tales colegas mecánicos, y el fantasma de la irresolubilidad recorrería la matemática como una sombra.

Esto es lo que, según Gandy, nos depara el futuro. Y si bien para algunos no se trata sino de una fantasía —una visión sustentada en promesas, más que en logros reales—, en conjunto revela una interesante posibilidad que nadie puede ignorar, una posibilidad que los rivales de la inteligencia artificial deben rebatir.[54]

[50] Véase Robin Gandy, "Human versus Mechanical Intelligence", en Peter Millican y Andy Clark, comps., *Machines and Thought*. Oxford, Universidad de Oxford, 1996, p. 125.

[51] Consideremos dos ejemplos: 1. La prueba euclidiana de que para cualquier colección (finita) de números primos, hay un número primo que no figura en la colección; este teorema lo prueba Euclides para tres primos, y supone que el lector tiene suficiente "chispa divina" para *ver* cómo trabaja el argumento con cualquier colección (finita) de primos; 2. La hipótesis de Riemann; ¿de dónde supone Riemann que todos los ceros no triviales de la función zeta de Euler $\zeta(s)$, extendida al campo de los números complejos, se hallan sobre la recta $Re(s) = 1/2$?

[52] Véase R. Gandy, "Human versus Mechanical Intelligence", en *op. cit.*, p. 135. Con mayor generalidad, William J. Rapaport sostiene algo similar al decir que la sintaxis es suficiente para el pensamiento real. Véase al respecto William Rapaport, "How to Pass a Turing Test. Syntactic, Semantics, Natural Language Understanding, and First-Person Cognition", en *Journal of Logic, Languaje and Information* [número especial sobre Alan Turing e inteligencia artificial], vol. 9, núm. 4, octubre de 2000, pp. 467-490.

[53] R. Gandy, "Human versus Mechanical Intelligence", en *op. cit.*, pp. 133-136. Gandy incluso indica cómo se podría llevar a cabo tal simulación.

[54] Por "inteligencia artificial" entendemos la ciencia y el arte de hacer que las máquinas hagan cosas que requerirían de inteligencia si las hiciera un ser humano, como, por ejemplo, elaborar un diagnóstico médico, jugar (¡y ganar!) al ajedrez, especular en la bolsa de valores o demostrar teoremas. Una lúcida introducción al tema se halla en John Haugeland, *La inteligencia artificial*. México, Siglo XXI, 1988.

Al respecto, una posibilidad es que la cuestión se decida en la práctica, con la construcción de máquinas que simulen adecuadamente la mente humana. Ciertamente, esto no sería una prueba irrebatible de que la mente humana *es* equivalente a una máquina, pues podría suceder que ni la inteligencia artificial ni la fisiología lograran reunir los elementos necesarios para demostrar un hecho de tal naturaleza. En tal caso lo único que se tendría como prueba sería la evidencia empírica.[55]

Estos ejemplos, que sólo recogen una pequeña parte de los debates contemporáneos, deberían bastar para formarse una idea del curso que siguió durante la segunda mitad del siglo XX el problema planteado por Hilbert. Al respecto, las líneas de investigación más promisorias parecieran ser las dos ya expuestas: la investigación de la demostración matemática con el propósito de caracterizarla de manera absoluta, y la sugerida por las ciencias de la computación y la inteligencia artificial. Así, lo que comenzara como una simple profesión de fe, la creencia en la resolubilidad de todo problema matemático, terminó por enlazarse con dos cuestiones que nos remiten al pasado y al presente de la ciencia y la filosofía occidental: la exploración de la mente y la inteligencia artificial.

Por lo que a nosotros concierne, la magnitud de la empresa nos mueve a pensar en la imposibilidad de alcanzar algún día una respuesta definitiva. No debemos olvidar que la cuestión atañe, no al conocimiento del mundo externo, sino al de nuestras propias capacidades. ¿Podremos conocer a tal punto el funcionamiento de nuestras mentes como para disipar tales dudas? Al pensar en ello, no podemos sino recordar el epitafio que Homero, el gran poeta de la Antigüedad, consagrara al Testórida, según parece uno de los primeros en entregarse a tales misterios: "Oh Testórida, aunque las cosas oscuras para los mortales son en gran número, nada les resulta a los hombres más difícil de conocer que su propia mente".[56]

Breves reflexiones

El interés de Hilbert en la teoría de la demostración y en el enfoque algorítmico de la prueba matemática se originó, al menos en parte, en su deseo de probar que todo problema matemático es resoluble. Esto lo llevó a la necesidad de aclarar la estructura deductiva de la matemática y al problema de la decisión, con la consiguiente introducción de nuevos métodos y conceptos. En la actualidad, estos conceptos y métodos forman parte de diversas ramas de la lógica matemática, y se extienden a dominios tales como las ciencias de la computación y la demostración automática de teoremas. Pese a que ningún resultado en la lógica lleva su nombre, la contribución de Hilbert a este dominio se puede apreciar en la cantidad de problemas que planteó, y en el legado

[55] En efecto, el hecho de que la mente humana se pudiera simular adecuadamente con las máquinas no probaría la supuesta equivalencia. Más bien, la prueba de tal hecho se debería dar con apego a estándares que la inteligencia artificial está lejos de alcanzar. Por supuesto, sería un placer contar con colegas tan interesantes como los que sugiere Gandy.

[56] Homero, Epígrafe V, al Testórida o hijo de Testor.

de la teoría de la demostración. Con firmeza, trazó las líneas de investigación en esta área, marcando el destino de toda una generación de investigadores. La tierra que abonó es el suelo donde florecieron los teoremas de Gödel, Church y Turing, mismos que exhibieron las dificultades subyacentes a su propia creencia.

En cuanto a la cuestión de la resolubilidad de todo problema matemático, sabemos, como ya lo hemos expresado, del alto grado de dificultad que supone darle una respuesta precisa. La creencia de Hilbert tiene profundas raíces en la filosofía racionalista. En ello se adhiere a Kant, quien sostiene que toda cuestión surgida dentro del dominio de las ciencias matemáticas debería tener una respuesta precisa. Con el paso del tiempo hemos aprendido acerca de las sutilezas que oculta un pensamiento tan simple. Como sea, es el mismo Kant quien ofrece un posible indicativo de la naturaleza de la cuestión planteada por Hilbert. En un conocido pasaje del prólogo a la primera edición de la *Crítica de la razón pura*, Kant nos advierte de la disposición de la razón a hacerse preguntas que no puede responder por sobrepasar todas sus facultades. En este sentido, la pregunta por la resolubilidad de todo problema matemático pareciera ser una de tales interrogantes. No obstante, con esto no queremos decir que Hilbert se equivocó al intentar una prueba que diera sustento a sus creencias. Si bien consideramos que sus dudas jamás se podrán aclarar del todo, semejando más bien una incógnita que cumple con las premoniciones de Kant, esto no significa que sus esfuerzos fueran en vano. Por el contrario, gracias a su empeño la matemática se benefició con un enorme caudal de métodos y hechos sorprendentes. Con vehemencia, Hilbert impulsó nuevas y fructíferas líneas de investigación, mostrando con ello que la matemática no es distinta de las demás actividades humanas o de la vida misma: nos ocupamos de las cosas no sólo por su utilidad práctica o su factibilidad, sino por el reto que nos plantean; trazamos planes en una dirección, sin saber en realidad a dónde iremos a parar.

En contra de la imagen popular que ve en la matemática una ciencia fría y racional, Hilbert nos mostró que ésta es también un producto de nuestras pasiones, de nuestro irrefrenable deseo por alcanzar el absoluto.